

氏 名	高 宏彪
博士の専攻分野の名称	博士（工学）
学位記号番号	博理工甲第984号
学位授与年月日	平成27年3月24日
学位授与の条件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	Automated Theorem Finding by Forward Reasoning Based on Strong Relevant Logic:Methodology and Case Studies (強相関論理に基づく前向き推論による自動定理発見：方法論と事例研究)
論文審査委員	委員長 教授 程 京徳 委員 教授 吉田 紀彦 委員 准教授 小柴 健史 委員 准教授 吉浦 紀晃 委員 准教授 堀山 貴史

## 論文の内容の要旨

The problem of automated theorem finding is one of the 33 basic research problems in automated reasoning which was originally proposed by Wos in 1988. The problem of automated theorem finding is “What properties can be identified to permit an automated reasoning program to find new and interesting theorems, as opposed to proving conjectured theorems?” The most important and difficult requirement of the problem is that, in contrast to proving conjectured theorems supplied by the user, it asks for the criteria that an automated reasoning program can use to find some theorems in a field that must be evaluated by theorists of the field as new and interesting theorems. The significance of solving the problem is obvious because an automated reasoning program satisfying the requirement can provide great assistance for scientists in various fields.

The problem of automated theorem finding is still an open problem. Although there have been valuable works on the research of automated theorem proving, those works cannot be applied to the problem of automated theorem finding. On the other hand, a few works aimed to automated theorem discovery and automated theorem generation have been done. However, the problem of automated theorem finding which is to pursue properties to find new and interesting theorems is different from the automated theorem discovery and automated theorem generation. In fact, Wos's problem can be regarded as an attempt to find a systematic methodology in automated reasoning area, but the works on automated theorem discovery and automated theorem generation are not. The works on automated theorem discovery and automated theorem generation almost aimed to one certain mathematical field and current results of those works are only rediscovery of some simple known theorems in some certain fields, rather than finding new and interesting theorems.

Cheng proposed that forward reasoning based on strong relevant logic is a hopeful approach to solve the automated theorem finding problem. Reasoning is the process of drawing new conclusions from some premises which are already known facts and/or previously assumed hypotheses. Because reasoning is the only way to draw new, previously

unknown conclusions from given premises, there is no discovery process that does not invoke reasoning. On the other hand, by using strong relevant logic as the fundamental logic to underlie reasoning for automated theorem finding, one can avoid paradoxical theorems in using classical mathematical logic, various conservative extensions of classical mathematical logic, and traditional relevant logics. However, no one showed how to use a systematic method by forward reasoning based on strong relevant logic to do automated theorem finding.

This thesis proposed a systematic methodology for automated theorem finding by forward reasoning based on strong relevant logic. The methodology consists of five phases. The first phase is to prepare logical fragments of strong relevant logic for various empirical theories. The second phase is to prepare empirical premises of a target empirical theory. The third phase is to reason out empirical theorems in the target empirical theory. The fourth phase is to abstract these empirical theorems. The fifth phase is to find interesting theorems from the empirical theorems. The methodology holds generality so that we can use it to do automated theorem finding in various fields.

In order to show the effectiveness of our methodology, we did three case studies of automated theorem finding in three different mathematical fields by using our methodology. The first mathematical field is NBG set theory, the second one is Peano's arithmetic and the third one is graph theory. For each case study, we elaborated how to apply our methodology, showed the results and gave an evaluation. After we presented three case studies, we evaluated the methodology from viewpoint of generality.

This work has following contributions. The first contribution is that we proposed a systematic methodology for automated theorem finding based on the semi-lattice model of formal theories in which the core is strong relevant logic, and the minimum element is the formal theory of axiomatic set theory, above it other formal theories can be established like number theory, graph theory, and lattice theory, so the methodology holds generality for various mathematical fields. The second contribution is that we proposed a method to do automated theorem finding based on the abstraction process of mathematical concept such that we can systematically find theorems from simple theorems to complex theorems. The third contribution is that we proposed a method to generate hypothesis by using forward reasoning approach by strong relevant logic and then combine automated theorem proving approach to systematically find those theorems proved by mathematical induction. The fourth contribution is that we performed three case studies of automated theorem finding in three different mathematical fields by using our methodology and clearly showed our method and results. Before our works, it is only in theory to use forward reasoning approach based on strong relevant logic to perform automated theorem finding in different mathematical fields, but our works showed the detail and systematic procedure of automated theorem finding clearly.

This thesis is organized as follows. Chapter 1 presents the background and purpose of this research. Chapter 2 explains the basis of the strong relevant logic and the terminology of automated theorem finding. Chapter 3 presents our systematic methodology for automated theorem finding. Chapter 4 presents the case study of preparation of logical fragments. Chapter 5 presents the case study of automated theorem finding in NBG set theory. Chapter 6 presents the case study of automated theorem finding in Peano's arithmetic. Chapter 7 presents the case study of automated theorem finding in graph theory. Chapter 8 gives a discussion about our methodology. Finally, concluding remarks are given in Chapter 9.

## 論文の審査結果の要旨

自動定理発見問題とは、自動推論分野の大家である Wos により 1988 年に提示された自動推論における 33 個の未解決問題の一つであり、計算機プログラムを用いて、予め与えられた定理を自動的に証明することではなく、新しい定理を自動的に発見する一般的方法を求めることである。これは、自動推論分野においてよく知られている未解決難問であり、多くの応用分野への適用が期待されているが、提示されてから既に 20 年以上に経ったにもかかわらず現在でもまだ完璧に解決されておらず、非常に重要でかつ挑戦的なテーマである。

本論文は、自動定理発見問題の最終解決へ向けて新しい突破口を開くために、強相関論理に基づく前向き推論による自動定理発見に関する系統的な方法論、およびその方法論に基づいて行った幾つかの研究事例について、著者の研究を通じて得た知見と成果を述べたものであり、9 章から構成されている。

第 1 章では、本研究の背景、目的、および位置付けについて述べた。まず、自動定理発見問題とその研究現状を概観した。そして、自動定理発見問題の最終解決のために、自動定理発見に関する系統的な方法論の必要性を述べ、本研究の目的として、強相関論理に基づく前向き推論による自動定理発見に関する系統的な方法論を提案し、その有効性を事例研究を通じて実証することを定めた。

第 2 章では、強相関論理に基づく前向き推論による自動定理発見における基本概念と専門用語を説明した。

第 3 章では、強相関論理に基づく前向き推論による自動定理発見に関する系統的な方法論を提案した。この方法論は、(1) 形式理論の束論モデルに基づいて強相関論理体系の論理定理部分集合 (fragment) 群半束の準備、(2) 対象領域における経験前提の準備および形式理論の束論モデルに基づいて対象領域形式理論半束の定義、(3) 強相関論理に基づく前向き推論、(4) 基本的な概念から高度な概念へ経験定理の抽象化、(5) 新しく面白い経験定理の識別と抽出という 5 つのプロセスから構成され、形式理論の束論モデルに定められた半順序に従って (3) ~ (5) の繰り返しで、対象領域において経験定理を段階的かつ網羅的に導出することである。また、数学的帰納法が必要となる分野において、強相関論理に基づく前向き推論を用いた帰納仮説生成と自動定理証明システムを用いた検証とを、自動定理発見に関する系統的な方法論に組み込む方法も提案した。

第 4 章では、強相関論理体系の論理定理部分集合群半束の準備について述べた。具体的に、論理結合子や単項演算子の入れ子の度合いに基づき、強相関述語論理  $EcQ$  の論理定理部分集合群半束を定義した。そして、定義した論理定理部分集合群半束に定められた半順序に従って、汎用前向き推論エンジン FreeEnCal を用いて、強相関述語論理  $EcQ$  の論理定理部分集合群半束を段階的に導出した。強相関論理体系の論理定理部分集合群半束の準備は、系統的な方法論の一部であるが、一度だけ準備したら、導出した論理定理部分集合群半束を、さまざまな対象領域における自動定理発見に適用することができる。

第 5 章では、提案した系統的な方法論に基づいて行った、形式化された NBG 集合論における自動定理発見の事例研究について述べた。まず、形式化された NBG 集合論の公理と定義を収集して、NBG 集合論における概念間の定義関係に着目し、基本的な概念から高度な概念へという半順序で公理と定義の部分集合群半束を定義する。そして、公理と定義の部分集合群半束に定められた半順序および強相関論理体系の論理定理部分集合群半束に定められた半順序に従って、公理と定義の部分集合を経験前提として、強相関論理の論理定理部分集合を論理前提として、汎用前向き推論エンジン FreeEnCal を用いて、簡単な NBG 集合論の経験定理から高度な NBG 集合論の経験定理までに段階的に自動定理発見を行った。最後、導出した NBG 集合論の経験定理を分析し、方法論の健全性と有効性を確認した。

第6章では、提案した系統的な方法論に基づいて行った、形式化された整数論（ペアノ算術）における自動定理発見の事例研究について述べた。実施方法は、NBG 集合論における自動定理発見の事例研究と基本的に似ているが、数学的帰納法の適用について、強相関論理に基づく前向き推論を用いた帰納仮説生成と自動定理証明システムを用いた検証とを、自動定理発見に関する系統的な方法論に組み込む方法も実際に行い、その健全性と有効性を確認した。

第7章では、提案した系統的な方法論に基づいて行った、グラフ理論における自動定理発見の事例研究について述べた。グラフ理論はこれまでに形式化されていないので、まず、グラフ理論における概念定義をNBG 集合論の述語と関数を用いて形式化した。そして、NBG 集合論における自動定理発見の事例研究とほぼ同じ方法で、グラフ理論の経験定理を段階的に導出した。

第8章では、三つの数学分野における自動定理発見の事例研究結果を考察した。三つの異なる数学分野における自動定理発見の事例研究を通して、提案した系統的な方法論は一般的に健全性と汎用性があり、他の数学対象分野や知識工学応用分野にも適用できると主張するとともに、完全性、計算用資源、効率の観点からこの方法論の現在の限界も議論した。

最後に、第9章では、本研究で得た成果と知見をまとめ、残された研究課題を示した。

なお、本論文の主な内容は、既に7編の学術論文として、世界トップクラス学術雑誌である Theoretical Computer Science 誌 (Elsevier) (1編)、国際学術論文誌 (Springer) (4編)、および査読付きの IEEE 学会国際会議論文集 (2編) において公表され、あるいは、公表が決定されている。

以上のように、本論文は、自動定理発見問題の最終解決へ向けて新しい突破口を開くために、強相関論理に基づく前向き推論による自動定理発見に関する系統的な方法論を提案し、その方法論に基づいて行った幾つかの研究事例について述べ、提案した方法論の健全性、有効性、汎用性を示した。これらの研究成果は、知識工学分野にとって新しい知見を示し大きく貢献するものである。従って、当学位論文審査委員会は、本論文が、博士（工学）の学位を授与するに十分値するものと判定した。