

## 汎用的な自動定理発見ツールの実現と応用

プロジェクト代表者：後藤 祐一  
(理工学研究科・数理電子情報部門・助教)

### 1 背景と目的

自動定理発見とは、予め与えられた定理を自動的に証明することではなく、計算機を用いて新しい定理を自動的に発見することである。自動定理発見問題は、自動定理発見の一般的な方法を求めるという問題であり、1988 年ごろ自動定理証明の大家であるアメリカの **Wos** 博士により提示された世界的に知られている難問である [Wos, Automated Reasoning 33 Basic Research Problems, 1988]。自動定理発見は自動定理証明と異なり、予めゴール、すなわち発見すべき定理を定めることができないため、証明では行うことができず、推論を用いるしかない。「推論」とは、与えられた前提（既知の事実あるいは仮定）に推論規則を適用して未知の新しい結論を導出する過程のことである。一方、「証明」とは、あらかじめ明確に与えられた結論（言明あるいは仮説）に対して、与えられた前提からその結論へ至る論理的道筋を見つけ出す過程のことである。推論と証明の本質的な違いは、証明は証明しようとする物事（ゴール）があらかじめ既に定まっていることに対して、推論は推論すべき物事（ゴール）があらかじめ定まっていないことにある。

1995 年に **Cheng** 博士によって強相関論理に基づく帰結演算を用いた自動定理発見の理論的基礎と方法が提案された [Cheng, Entailment Calculus as the Logical Basis of Automated Theorem Finding in Scientific Discovery, 1995]。Cheng 博士のアプローチの特徴は、推論の妥当性を基礎付ける論理体系とそれぞれの分野の定義や公理、定理、また、それら二つを入力として受け取り入力された論理体系に従いそれぞれの分野の公理や定理から新たな定理の導出を行う前向き演繹プログラムを明確に分離した点にある。Cheng 博士は、前向き演繹の妥当性を基礎付ける論理体系として強相関論理を、また、前向き演繹の方法として前向き帰結演算を選んだが、一般的には、定理発見を行いたい分野や演繹の妥当性、何の関係（条件関係、連言関係など）に着目して前向き演繹を行うかは定理発見の実行者によって異なると考えられる。

本研究では、実行者が妥当と思う論理体系と定理発見を行いたい分野の公理や定理、また、何の関係に着目して演繹を行うかを表した推論規則を入力として自由に与えられる前向き演繹プログラムを用意し、汎用的にかつ、統一的な手法により自動定理発見を行うツールを開発する。

### 2 研究内容と成果

平成20年度は、平成19年度で開発した論理式を構成する語彙、論理式の構成規則、公理、そして、推論規則を入力として自由に与えられるようにすることで任意の論理体系や形式理論を扱う汎用前向き推論システム **FreeEnCal** の処理の高速化と汎用化を試みた。

自動定理発見ツールを実現するためには、**FreeEnCal** はできる限り短い時間で多くの結論を導出しなければならない。そこで、開発した **FreeEnCal** の処理アルゴリズムを見直し処理の高速化を試みた。**FreeEnCal** の処理時間の大半は導出された結論が既に導出済みであるかどうかを調べる重複検査処理に費やされていた。そこで、**FreeEnCal** の処理対象である論理式の構造に着目し、重複検査を論理式単位ではなく、論理式を構成する要素単位で行い、無駄な処理を削減することによって処理の高速化を行った。この結果、従来の重複検査アルゴリズムに比べて大幅な速度向上を達成することができた [発表雑誌論文 1]。

また、従来のFreeEnCalは論理体系や形式理論を表現する形式システムとしてヒルベルト流の公理システムしか用いることができなかった。一方、論理体系や形式理論を表現するための形式システムとしてはゲンツェンの自然演繹システムとシーケント計算システムもよく利用されている。汎用的な自動定理発見ツールを実現するためには、FreeEnCalはヒルベルト流の公理システムだけでなく、ゲンツェンの自然演繹システムとシーケント計算システムにも対応しなければならない。そこで、論理体系を表現するための代表的な形式システムであるヒルベルト形式の公理的システム、ゲンツェンの自然演繹システム、そして、ゲンツェンのシーケント計算システムをFreeEnCalで扱えるように拡張を行った [発表雑誌論文2]。

### 3 今後の課題

今後の課題は、大きく分けて FreeEnCal の汎用性の改善、処理速度の向上、そして FreeEnCal を用いた自動定理発見の事例研究の3つに分けられる。現在の FreeEnCal は、演繹推論、単純帰納推論、そして単純仮説生成推論を行うことができる。しかし、自動定理発見においては、単純帰納推論や単純仮説生成推論だけでは不十分な可能性がある。そこで、FreeEnCal を用いて帰納推論や仮説生成推論を行う方法およびシステムを構築する必要がある。また、多くの数学の分野においては命題の定義に数学的帰納法が利用されている。数学的帰納法で定義された命題を論理式で表現するためには二階レベルの述語が扱えなければならない。現在の FreeEnCal は一階述語までにしか対応していないため二階レベルの述語を扱えるように拡張しなければならない。

現在までに、FreeEnCal の処理アルゴリズムを見直すことで処理速度の向上を図った。今年度の成果により、逐次処理における処理アルゴリズムは十分に改良できたと思われる。そこで、更なる処理速度の向上のためには、並列処理による処理の高速化が必要である。

また、FreeEnCal を用いた自動定理発見の事例研究として公理的集合論の一種である Von Neumann-Bernays-Gödel 集合論 (NBG 集合論) において定理の発見を試みる予定であるが、このためにすでに証明済みの定理の収集とデータベース化、FreeEnCal を用いた定理発見プロセスの考案とその(部分)自動化を行う必要がある。

### 4 公表論文

1. Takahiro Koh, Yuichi Goto, and Jingde Cheng: A Fast Duplication Checking Algorithm for Forward Reasoning Engines, in I. Lovrek, R. J. Howlett, and L. C. Jain (Eds.), "Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems, 12th International Conference, KES 2008, Zagreb, Croatia, September 3-5, 2008, Proceedings," Lecture Notes in Artificial Intelligence (Subseries of Lecture Notes in Computer Science), Vol. 5178, pp. 499-507, Springer-Verlag, September 2008.
2. Yuichi Goto, Takahiro Koh, and Jingde Cheng: A General Forward Reasoning Algorithm for Various Logic Systems with Different Formalizations, in I. Lovrek, R. J. Howlett, and L. C. Jain (Eds.), "Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems, 12th International Conference, KES 2008, Zagreb, Croatia, September 3-5, 2008, Proceedings," Lecture Notes in Artificial Intelligence (Subseries of Lecture Notes in Computer Science), Vol. 5178, pp. 526-535, Springer-Verlag, September 2008.