平成22年度総合研究機構研究プロジェクト研究成果報告書

# 平面曲線族における高次ワイエルシュトラス点の計算と幾何

## (Computation and geometry of higher order Weierstrass points on a family of plane curves)

**所属・職名**　**大学院理工学研究科・教授**

**(Graduate School of Science and Engineering/Professor)**

**代表者**　**酒井文雄**

**(Fumio SAKAI)**

## 研究成果

射影代数曲線（コンパクト・リーマン面）上のワイエルシュトラス点は曲線の特別な点であり，重要な不変量である．ワイエルシュトラス点の概念は高次ワイエルシュトラス点に拡張され，興味深い研究対象である．本学位論文のテーマは種数2の平面曲線の3-ワイエルシュトラス点である．種数2の曲線は超楕円曲線の構造を持つことはよく知られている．本研究の主結果は超楕円対合以外に余分な対合を持つ種数2の平面曲線

$$C_{a,b}:\ y^2 = x^6 + ax^4 + bx^2 + 1; \quad (\Delta(a,b) \neq 0).$$

における3-ワイエルシュトラス点の分類と幾何学的な研究である．ここで，右辺の判別式を $\Delta(a,b)$ とした．本研究は博士後期課程の大学院生であった M.Farahat 氏との共同研究である．

超楕円曲線のワイエルシュトラス点の集合 $W_1(C)$ は $\mathbf{P}^1$ 上の2重被覆写像の分岐点の集合に他ならない．さらに，$q \geq 2$ に対し，$q$-ワイエルシュトラス点の集合を $W_q(C)$ で表すとき，$W_1(C) \subset W_q(C)$ が成立する．点 $P \in C$ について，$w^{(q)}(P)$ で $P$ の $q$-ウエイトとする．

種数2の曲線 $C$ については，等式 $W_1(C) = W_2(C)$ が成立している．さて，$W_3(C)_k$ で，$w^{(3)}(P) = k$ となる3-ワイエルシュトラス点の集合とするとき，$W_3(C)_3 = W_1(C)$ であり，$W_3(C) = W_3(C)_1 \cup W_3(C)_2 \cup W_1(C)$ と分割される．ここで，$N_1 = \#\{W_3(C)_1\}$　$N_2 = \#\{W_3(C)_2\}$ とおくと，等式 $N_1 + 2N_2 = 32$ が成立する．

さて，Shaska と Völklein 両氏は曲線 $C_{a,b}$ の自己同型群を分類する研究において，不変量 $u = ab$，および $v = a^3 + b^3$ を導入した．この不変量を用いると，

$$\Delta(a,b) = -64\,\delta(u,v)^2 \quad (\delta(u,v) = 27 + 4v - 18u - u^2)$$

と計算される．そこで，$\Lambda:\delta(u,v)=0$ とすると，補集合 $\mathbf{C}^2\setminus\Lambda$ は $C_{a,b}$ の概モジュライ空間になる．同じ $(u,v)$ を持つ曲線 $C_{a,b}$ は同型であるので，組 $(N_1,N_2)$ も等しい．

ここで，$(u,v)$-平面における次の曲線を定義する．

$$
\begin{aligned}
S:s(u,v)&=-1125+4v+110u-u^2=0,\\
T:t(u,v)&=v^2-4u^3=0,\\
M:m(u,v)&=4v-u(u+16)=0,\\
G:g(u,v)&=20796875-13942500u-571350u^2-98324u^3-3645u^4\\
&\quad+3429000v-235440uv+1512u^2v+52272v^2=0.
\end{aligned}
$$

さて，3-ワイエルシュトラス点とその種類は3重微分形式の基底により定義されるロンスキアン形式 $\Omega$ の零点とその重複度によって計算することができる．分類結果の記述を簡潔にするため，パラメータ $(a,b)$ ではなく，パラメータ $(u,v)$ を用いた．

主結果は次のようにまとめられる．

**定理.** 種数2の平面曲線 $C_{a,b}$ 上の3-ワイエルシュトラス点は下記のように分類される．

| $N_1$ | $N_2$ | $(u,v)$ | Geometry | $\mathrm{Aut}(C_{a,b})$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 16 | $(25,-250)$ | $S\cap G\cap T$ | $GL_2(3)$ |
| 12 | 10 | $A$ | $M\cap S\cap G$ | $D_{12}$ |
| 16 | 8 | $B_\pm$ | $G\cap T$ | $D_8$ |
| | | $Q$ | the node of $G$ | $V_4$ |
| 20 | 6 | $E_\pm$ | $M\cap G$ | $V_4$ |
| 24 | 4 | $(0,0)$ | $M\cap T$ | $\mathbb{Z}_3\rtimes D_8$ |
| | | $(16,128)$ | $M\cap T$ | $D_8$ |
| | | $S$ の一般的な点 | | $D_{12}$ |
| | | $G$ の一般的な点 | | $V_4$ |
| 28 | 2 | $M$ の一般的な点 | | $V_4$ |
| 32 | 0 | その他の場合 | | $V_4$ |

ここで，点 $A,Q,B_\pm,E_\pm$ の座標は下記で与えられる．

$$
\begin{aligned}
A&=\left(\frac{125}{14},\frac{43625}{784}\right),\quad Q=\left(-\frac{25}{2},-\frac{11125}{176}\right),\\
B_\pm&=\left(\frac{1025}{729}\pm\frac{5200}{729}\sqrt{-2},\ -\frac{698750}{19683}\pm\frac{758000}{19683}\sqrt{-2}\right),\\
E_\pm&=\left(-\frac{647}{256}\pm\frac{3519}{3328}\sqrt{-39},\ -\frac{33079811}{1703936}\pm\frac{4930119}{1703936}\sqrt{-39}\right).
\end{aligned}
$$