

衝撃力の加わる場合の応力関数*

大 滝 英 征**

The Stress Function in the Case Where an Impact Force is Applied

by Hideyuki OHTAKI

Analyzing the stress distribution of an elastic body to which an impact force is applied on its boundary is one of the most interesting problems in the engineering field of machine elements strength. But owing to the absence of a useful and easy method to analyse the stress distribution of arbitrary shaped elastic body, it is hard to analyze the strength of machine elements to which an impact force is applied. So firstly we should derive an easy and useful method and then analyse the stress distribution of some machine elements. This report derives an easy method which uses the complex stress function. Using this method, it will be easier to assess the strength of machine elements.

Key Words : Elasticity, Stress Function, Impact Force Mapping Function, Stress Distribution

1. ま え が き

衝撃問題は機械要素や構造物の動作の信頼性、寿命、あるいは振動や騒音に関連した問題として重要視されてきている。しかし、機械要素の動的問題に関する研究を概観⁽¹⁾⁽²⁾してみると、円環あるいは有孔無限板に衝撃力を受ける場合についてラプラス変換を利用して衝撃応力が解析されている程度である。衝撃問題は定量的な把握が難しく、固有振動数などの観点から現象論的に説明されることが多い⁽³⁾が、現在の衝撃問題に対する要請を考慮すると、ねじ、歯車などの任意形状の機械要素に対して、応力関数を利用して簡易に衝撃応力を解析し、近似的にでも寿命とか安全性を把握することが望まれる。本報では、上記のようなことを考慮し、衝撃力の加わる場合の応力関数を導くことを試みた。用いた主な記号は、

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$: x, y 軸方向の垂直応力, せん断応力

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$: x, y 軸方向の垂直ひずみ, せん断ひずみ

$\sigma_{KK} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

V_x, V_y : x, y 軸方向変位

ρ : 弾性体の密度

E : 縦弾性係数

$\mu = E/2(1+\nu)$

$\lambda = E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)$

$C_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$

$C_2^2 = \mu/\rho$

$\square_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$\square_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

2. 基礎式の誘導

衝撃力が加わる場合、釣り合い条件式は慣性項を考慮し

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} \dots\dots\dots (1) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2) \end{array} \right.$$

で与えられる。平面歪の場合、応力とひずみには

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu\varepsilon_x = \sigma_x - \lambda/(3\lambda + 2\mu) \cdot \sigma_{KK} \\ 2\mu\varepsilon_y = \sigma_y - \lambda/(3\lambda + 2\mu) \cdot \sigma_{KK} \dots\dots\dots (3) \\ 2\mu\gamma_{xy} = \tau_{xy} \end{array} \right.$$

* 昭和61年3月14日 東海支部第35期総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年7月3日。

** 正員、埼玉大学工学部 (〒338 浦和市下大久保 255)。

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{KK} &= (3\lambda + 2\mu) / 2(\lambda + \mu) \cdot \sigma \\ \sigma &= \sigma_x + \sigma_y \end{aligned} \right\}$$

ひずみと変位には、

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_x &= \partial V_x / \partial x \dots\dots\dots(4) \\ \epsilon_y &= \partial V_y / \partial y \dots\dots\dots(5) \\ \gamma_{xy} &= (\partial V_y / \partial x + \partial V_x / \partial y) / 2 \dots\dots\dots(6) \end{aligned} \right.$$

なる関係がある。

さて、ここでまず式(1)を x にて、式(2)を y にて微分し、互いに加算し整理すると

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \dots\dots\dots(7)$$

一方、式(4)~(6)より求まるひずみの適合条件式に式(3)を代入し整理すると

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{KK} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \sigma_y - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{KK} \right\} = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots(8)$$

式(7)と式(8)より τ_{xy} の項を消去し、整理すると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma = 0 \dots\dots\dots(9)$$

同様に、式(1)を x にて、式(2)を y にて微分し、互いに減算して整理すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_x - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_y = 0 \dots\dots\dots(10)$$

また、式(1)を y にて、式(2)を x にて微分し加算して整理すると、

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tau_{xy} = 0 \dots\dots\dots(11)$$

式(9)~(11)が基礎式となる。

式(9)~(11)を満足する関数として、

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F_2 \\ \sigma_y &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F_1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F_2 \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F_3 \end{aligned} \right. \dots\dots\dots(12)$$

を選ぶ。上式は、時間項を考慮しない場合には、従来の Airy の応力関数⁽⁴⁾⁽⁵⁾と一致する。式(12)を式(9)~(11)に代入し、整理すると、

$$\left\{ \begin{aligned} \square^2 \square^2 F_1 &= 0 \\ \square^2 \square^2 F_2 &= 0 \dots\dots\dots(13) \\ \square^2 \square^2 F_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

となる。よって、上式を満足する F_1, F_2, F_3 を求めればよい。

3. 応力関数の誘導

3・1 応力関数 まず、式(13)を満足する関数を求める。衝撃力は数値解析の際、一般にフーリエ級数展開して扱われる。その際の周波数 ω_s を有する成分を考慮し、

$$F_j = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{j,nm} \alpha_1^n \cdot \alpha_2^m e^{i\omega_s t} \dots\dots\dots(14)$$

($j=1, 2, 3$)

$$\alpha_1 = \omega_s^2 / C_1^2, \alpha_2 = \omega_s^2 / C_2^2$$

として扱う。

式(14)を式(13)に代入し、展開すると

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Psi_{j,nm} \alpha_1^n \cdot \alpha_2^m + (\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_{j,nm} \times \alpha_1^n \cdot \alpha_2^m + \Psi_{j,nm} \alpha_1^{n+1} \cdot \alpha_2^{m+1} \right] e^{i\omega_s t} = 0 \dots\dots(15)$$

ここで、式(15)を $\alpha_1^n \cdot \alpha_2^m$ の項について整理し直すと、

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Psi_{j,nm} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_{j,n-1,m} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_{j,n,m-1} + \Psi_{j,n-1,m-1} \right] \alpha_1^n \times \alpha_2^m e^{i\omega_s t} = 0 \quad (j=1, 2, 3) \dots\dots\dots(16)$$

となる。上式を満足する関数を、 n, m の低次のものから順に記すと、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Psi_{j,00} = 0 \dots\dots\dots(17)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Psi_{j,10} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_{j,00} = 0 \dots\dots\dots(18)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Psi_{j,11} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_{j,01} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_{j,10} + \Psi_{j,00} = 0 \dots\dots\dots(19)$$

⋮

よって、 $\Psi_{j,00}$ を求めれば、それを利用して $\Psi_{j,10}, \Psi_{j,11}$ などが求まり、結局式(14)にて応力関数が決まる。 $\Psi_{j,00}$ は、Airy の応力関数と一致するので、既に解析されているものを準用しう。また、式(16)からもわかるように $\Psi_{j,nm}$ には、 $\Psi_{j,nm} = \Psi_{j,mn}$ の関係がある。

さて、ここで上式の適用がより容易となるよう、複素平面で表示し扱う。すなわち、変換則に従い、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad \dots\dots\dots (20)$$

であるから、まず式(17)より、周知の関数

$$\Psi_{j,00} = 2 \operatorname{Re}[\varphi_{j,000}(z) + \bar{z}\varphi_{j,001}(z)] \quad \dots\dots\dots (21)$$

が求まる。

次に、この $\Psi_{j,00}$ を式(18)に代入し、 $\Psi_{j,10}$ を求める

$$\Psi_{j,10} = 2 \operatorname{Re}[\varphi_{j,100}(z) + \bar{z}\varphi_{j,101}(z) + \bar{z}^2 \times \varphi_{j,102}(z)] \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\text{ただし、} \varphi_{j,102} = -\varphi_{j,001} / 8 = \partial/\partial z$$

$\varphi_{j,100}(z)$, $\varphi_{j,101}(z)$ などの具体的な関数形は、従来の応力関数同様、境界条件を勘案して決定される。その際、 $\varphi_{j,001}(z)$ に関する項を含むこととなるので、結局 $\Psi_{j,10}$ は $\Psi_{j,00}$ の関数を含む形で漸化的に求まることとなる。

同様にして、式(18)を順次式(19)に代入して

$$\Psi_{j,11} = 2 \operatorname{Re}[\varphi_{j,110}(z) + \bar{z}\varphi_{j,111}(z) + \bar{z}^2\varphi_{j,112}(z) + \bar{z}^3\varphi_{j,113}(z)] \quad \dots\dots\dots (23)$$

ただし、

$$32\varphi_{j,112}(z) + 8\varphi_{j,101}(z) + \varphi_{j,000}(z) = 0$$

$$96\varphi_{j,113}(z) + 16\varphi_{j,102}(z) + \varphi_{j,001}(z) = 0$$

$$\Psi_{j,20} = 2 \operatorname{Re}[\varphi_{j,200}(z) + \bar{z}\varphi_{j,201}(z) + \bar{z}^2\varphi_{j,202}(z) + \bar{z}^3\varphi_{j,203}(z) + \bar{z}^4\varphi_{j,204}(z) + \bar{z}^5\varphi_{j,205}(z)] \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし、

$$32\varphi_{j,202}(z) + 4\varphi_{j,101}(z) + \varphi_{j,110}(z) = 0$$

$$96\varphi_{j,203}(z) + 8\varphi_{j,102}(z) + \varphi_{j,111}(z) = 0$$

$$192\varphi_{j,204}(z) + \varphi_{j,112}(z) = 0$$

$$320\varphi_{j,205}(z) + \varphi_{j,113}(z) = 0$$

が求まる。

3・2 境界条件および変位に関する条件 このようにして求められた応力関数は、境界条件のほか式(3)~(6)のひずみ相互の関係式から導かれる変位に

関する条件式をも満足する必要がある。

まず境界条件式については、図1のように境界に沿って微小範囲を考えると

$$\begin{cases} dX = -\sigma_x dy + \tau_{xy} dx \\ dY = \sigma_y dx - \tau_{xy} dy \end{cases} \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(25)に式(12)を代入し整理すると、

$$P_0 = \int_I^{II} \left[id \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right\} F_1 + \frac{1}{2C_2^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} (dy - idx) - i \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (F_2 + iF_3) \times (dx - idy) \right]$$

これを z 平面にて表示すると、

$$P_0 = 2i \left[\frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}} \right]_I^{II} - \frac{i}{2C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_I^{II} F_1 dz - i \int_I^{II} \left(4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (F_2 + iF_3) d\bar{z} \quad \dots\dots\dots (26)$$

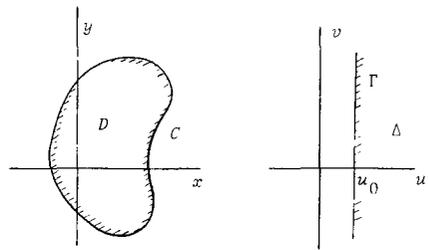
これより、I, IIを自由境界上の任意点にとると右辺は必ず零に、荷重点を挟んでとると、その区間に作用している外力の総和 P_0 に等しくなるように関数を決めなくてはならない。

次に変位に関しては、式(3)より

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_y - \sigma_x) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad \dots\dots\dots (29)$$



(a) z 平面 (b) w 平面
図2 z 平面より w 平面への変換

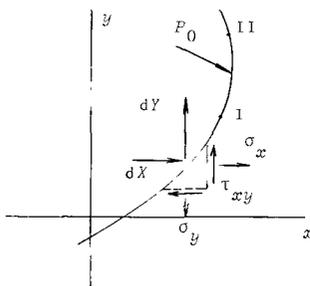


図1 境界の状態

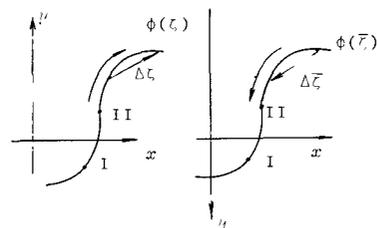


図3 z 平面, \bar{z} 平面での積分

であるから、式(28)、(29)より、式(20)を用いて整理すると、

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = -2 \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{1+\nu}{E} \left(4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (F_2 - iF_3) \dots\dots\dots (30)$$

式(27)より

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \left\{ 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} F_1 \dots\dots\dots (31)$$

となる。そこで、式(30)を積分して

$$\bar{V} = -2 \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{1+\nu}{E} \int \left(4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (F_2 - iF_3) dz + \bar{g}(\bar{z}) \dots\dots\dots (32)$$

これを式(31)に代入すると、

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int \left(4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (F_2 - iF_3) dz + \bar{g}(\bar{z}) \right] \\ = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \left\{ 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} F_1 \end{aligned} \quad (33)$$

なる関係式が得られる。上式を満足する F_1, F_2, F_3 および $\bar{g}(\bar{z})$ を求めればよいこととなる。

3・3 応力関数の誘導

ここで、 $\Psi_{j,00}$ を例にとる。任意境界形状の場合に対しても諸式の適用がより容易となるよう、図2のように z 平面より w 平面へ変換して扱う。この際の写像関数は $z(w)$ にて与えられ、 z 平面の境界 C を w 平面の境界 Γ に、領域 D を w 平面の領域 Δ に写像するものとする。

いま

$$\Psi_{1,00}(w, \bar{w}) = \varphi_{1,000}(w) + \overline{\varphi_{1,000}(\bar{w})} + \bar{z}(\bar{w}) \varphi_{1,001}(w) + z(w) \overline{\varphi_{1,001}(\bar{w})} \dots\dots (34)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{2,00}(w, \bar{w}) = \alpha \{ \varphi_{1,000}(\bar{w}) + \overline{\varphi_{1,000}(w)} \\ + \bar{z}(w) \varphi_{1,001}(2u_0 - w) \\ + z(\bar{w}) \overline{\varphi_{1,001}(2u_0 - \bar{w})} + \varphi_{2,002}(w) + \overline{\varphi_{2,002}(\bar{w})} \\ - \varphi_{2,002}(2u_0 - \bar{w}) - \overline{\varphi_{2,002}(2u_0 - w)} \} \dots (35) \end{aligned}$$

$$\Psi_{3,00}(w, \bar{w}) = i\alpha \{ \varphi_{2,002}(w) - \overline{\varphi_{2,002}(\bar{w})} + \overline{\varphi_{2,002}(2u_0 - w)} - \varphi_{2,002}(2u_0 - \bar{w}) \} \dots (36)$$

と選ぶ。まず境界条件について検討する。境界 $w = \Gamma (\Gamma = 2u_0 - \Gamma)$ にては、 $F_2 + iF_3 = (\Psi_{2,00} + i\Psi_{3,00})e^{i\omega t}$ より、

$$\begin{aligned} F_2 + iF_3 = \varphi_{1,000}(\bar{\Gamma}) + \overline{\varphi_{1,000}(\Gamma)} + \bar{z}(\Gamma) \varphi_{1,001}(\bar{\Gamma}) \\ + z(\bar{\Gamma}) \overline{\varphi_{1,001}(\Gamma)} \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

となる。図3にも示したように複素関数に関する線積分の定理 $\int_{\Gamma}^{\Pi} \phi(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma}^{\Pi} \phi(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta}$ を加味すると、

$$\int_{\Gamma}^{\Pi} (F_2 + iF_3) \bar{z}(\bar{\Gamma}) d\bar{\Gamma} = \int_{\Gamma}^{\Pi} F_1 \dot{z}(\Gamma) d\Gamma \dots (38)$$

となる。さらに $\partial^2 (F_2 + iF_3) / \partial w \partial \bar{w} |_{w=\Gamma} = 0$ であることを加味すると、式(26)が、自由境界上で常に零、荷重を挟んで I, II をとった場合には P_0 に等しくなるという条件を満足するには $\alpha = C_1^2 / 2C_2^2$ と選べばよい。すると、式(26)は

$$P_0 = 2i \left[\frac{1}{\bar{z}(\bar{w})} \frac{\partial F_1}{\partial w} \right]_{\Gamma}^{\Pi} = 2i \left[\frac{1}{\bar{z}(\bar{w})} \frac{\partial \Psi_{1,00}}{\partial w} \right]_{\Gamma}^{\Pi} e^{i\omega t} \dots\dots\dots (39)$$

となり、慣性項が含まれない場合の境界条件式と同様の式形となる。よって、 $\Psi_{1,00}$ に関しては、従来、既に導かれている応力関数を準用しうることが分かる。

変位に関しては、式(33)に式(34)~(36)を代入し、等号が成り立つようにする。係数比較をして、

$$\begin{aligned} \dot{g}(w) = 4 \frac{1+\nu}{E} \varphi_{1,000}(w) + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \\ \times \left[4 \varphi_{1,000}(w) - \frac{\dot{z}(w)}{C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{1,000}(w) \right] \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2,002}(\bar{w}) = \frac{1-2\nu}{2} \frac{C_1^2}{C_2^2} \overline{\varphi_{1,001}(2u_0 - \bar{w})} \\ \times \dot{z}(2u_0 - \bar{w}) - \frac{1}{2} \varphi_{1,001}(2u_0 - \bar{w}) \\ - \frac{1}{2} \{ \dot{z}(2u_0 - \bar{w}) \overline{\varphi_{1,001}(\bar{w})} \\ + z(2u_0 - w) \overline{\varphi_{1,001}(\bar{w})} \} \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

とすれば良いことが分かる。

以下同様にして、 $\Psi_{1,10}, \Psi_{2,10}, \Psi_{3,10}$ についても関数形が求まる。この際、留意すべきことは、応力は領域内で特異点を有してはならぬことから、各関数は領域内で一価正則である必要がある。

3・4 応力分布 最後に応力分布は、式(12)より

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y = \left\{ 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} F_1 \\ = \left\{ \frac{4}{z(w) \bar{z}(\bar{w})} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} F_1 \dots (42) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 4 \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} - 2 \left\{ 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} (F_2 - iF_3) \\ = \frac{4}{z(w)} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{\dot{z}(w)} \frac{\partial F_1}{\partial w} \right) \\ - 2 \left\{ \frac{4}{\dot{z}(w) \bar{z}(\bar{w})} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} (F_2 - iF_3) \end{aligned}$$

で与えられる。

4. む す び

文 献

機械要素などに衝撃力の加わる場合の応力分布を解析する必要性が増していることを勘案し、本報では、慣性項を考慮した場合の応力関数を導いた。具体例は次報で述べるが、導いた応力関数を利用すれば、ねじ、歯車などの応力分布も比較的簡単に把握しうるものと期待しうる。

- (1) 松本, 機論, 32-237 (昭41), 709.
 - (2) 柴原, 機論, 37-299 (昭46), 1247.
 - (3) 早坂, 音響振動論, (昭49), 455, 丸善.
 - (4) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1958), 37, Springer-Verlag.
 - (5) 森口, 二次元弾性論, (昭31), 24, 岩波書店.
-