



# 球状欠陥による応力集中

—応力集中係数の設計資料—

土田 栄一郎\*  
Eiichiro TSUCHIDA

空か、介在物、切欠きなどの欠陥による応力集中現象を明らかにすることは強度設計上重要であり、従来より多くの研究者により解析され、それらの成果は文献(1)～(5)などにまとめられている。なかでも二次元弾性問題に関する理論解析ならびに実験の結果は多く求められているが、三次元問題に関しては一般的であるにもかかわらず解析が困難なため得られた結果は少ない。ここでは最近著者らが三次元弾性理論に基づいて解析した結果を中心として球状欠陥による応力集中現象を資料としてまとめた。内容は球状欠陥による応力集中の全貌を明らかにするには資料が少ないが、少しでも設計に役立たせていただければ幸いである。

## 1. 球状欠陥を有する無限体の応力集中

### 1.1 2個の球かを有する無限体の一軸引張り<sup>(6)</sup>

$z$  軸上に並んだ同径の2個の球かを有する弾性体が  $x$  軸方向に一様引張力  $p$  を受ける場合(図1)，最大引張応力  $\sigma_{\max}$  は図2に示す球かの縁に生ずる  $(\sigma_\theta)_{R=a}$  であり応力集中係数を  $\alpha = \sigma_{\max}/p$  として表1に示した。 $\alpha$  は  $a/b$  が大きくなるにつれて増大する。そして  $a/b$  によって最大応力の生ずる位置が変わるが、A点とB点に生ずる引張応力  $(\sigma_\theta)_{R=a, \varphi=0, \theta=\pi/2}$ ,  $(\sigma_\theta)_{R=a, \varphi=\pi, \theta=\pi/2}$

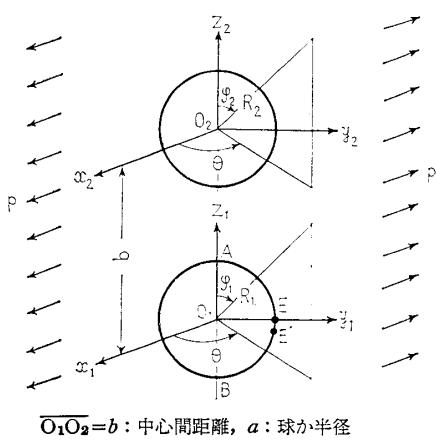


図1 2球かを有する無限体

\* 正員、埼玉大学工学部(338 浦和市下大久保255)。

$\theta=\pi/2$  のいずれかの値がこの最大値に近似できることに注目し、これらの値  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  と  $a/b$  の関係を示したのが図3および表1である。A点の応力は  $a/b$  が小さい範囲では無限体中に1個の球かが存在する場合の  $2.045p(\nu=0.3)$  より減少して応力緩和の現象を生ずるが  $a/b$  が0.3以上になると球か同志の干渉により急激に増加する。同図に示した二軸一様引張りを受ける場合の応力値は一軸引張りの場合よりも大きくなる。また  $z$  軸方向に一軸引張りを受ける場合<sup>(7)</sup>を図4に示す。最大応力はE点よりややB点に近いE'の  $\sigma_\phi$  であり、球か半径が増大するにつれ応力集中が緩和される。

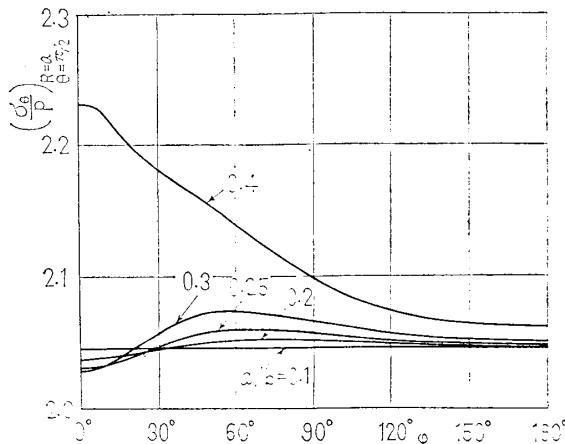


図2 球か面における  $\sigma_\theta$  の分布 ( $\theta=\pi/2$ )

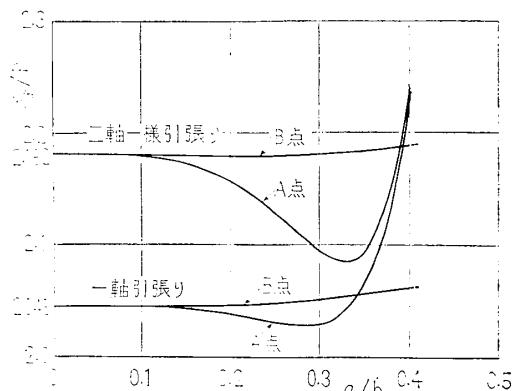


図3 球か半径によるA, B点の応力の変化

1・2 3個の球かを有する無限体の一軸引張り<sup>(9)</sup>

$z$  軸上に等間隔に並んだ3個の球かを有する無限体が  $z$  軸方向に一軸引張りを受ける場合を考える(図5)。同径3球かの場合最大応力  $\sigma_{\max}$  は中央球かの縁に生ずる  $\sigma_\theta$  であり、  $\sigma_{\max}$  は  $a/b$  が大きくなるにつれて増

表 1 応力集中係数 ( $\nu=0.3$ ,  $\alpha=\sigma_{\max}/p$ ,  $\alpha_A=\sigma_A/p$ ,  $\alpha_B=\sigma_B/p$ )

$a/b$	$\sigma_{\max}$ の生ずる $\varphi$	$\alpha$	$\alpha_A$	$\alpha_B$
0	0°	2.045	2.045	2.045
0.05	90°	2.046	2.045	2.045
0.1	80°	2.046	2.045	2.045
0.15	75°	2.048	2.043	2.046
0.2	70°	2.052	2.038	2.046
0.25	65°	2.060	2.031	2.048
0.3	60°	2.074	2.029	2.051
0.4	0°	2.230	2.230	2.062

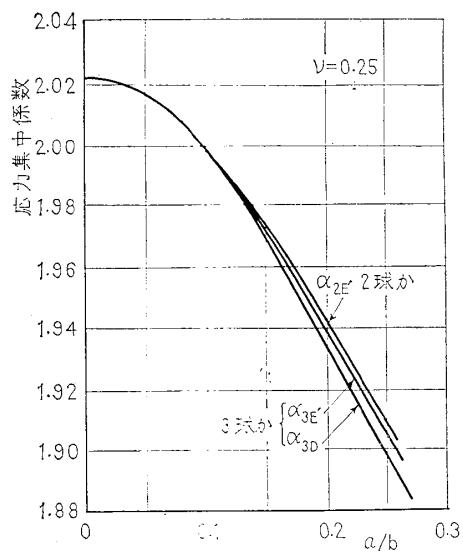


図 4 2個および3個の同径球かを有する無限体の応力集中<sup>(4)(10)</sup> ( $z$  軸方向引張り)

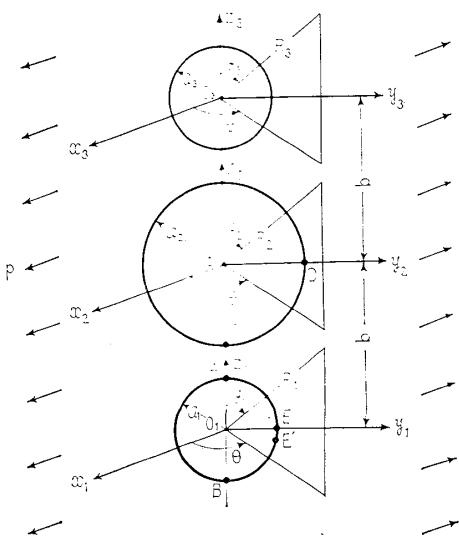


図 5 3球かを有する無限体

加する。この場合も  $\sigma_{\max}$  の生ずる位置が  $a/b$  によって変化するので  $\sigma_{\max}$  の替わりとして前節と同様、A, B, C 点に生じる引張応力  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$ ,  $\sigma_C$  と球か半径の関係を図6に示す。A, C 点の応力は  $a/b$  が小さいときは応力軽減作用を示すが  $a/b$  が 0.3 を超えると急激に増大する。中央球か面のC点の応力値は外側球か面のA点の応力値よりもわずかに大きい。図7は外側2球かの半径  $a_1/b=a_3/b=a/b=0.2$  とし中央の球か半径  $a_2/b$  を変化させた場合であり、 $a_2/b$  が大きくなると外側の小さい球か面A点の応力が急激に増加する。また同径3球かを有する無限体が  $z$  軸方向に一軸引張りを受ける場合<sup>(10)</sup>外側の球かについては2球かの場合と同様E'点の  $\sigma_\theta$ 、中央球かについてはD点の  $\sigma_\theta$  が最大応力であり、後者の値は外側球かの最大値より小さい。図4はこれらの最大応力と  $a/b$  の関係を示したものでいずれの応力も球か半径が増大するにつれ減少する。

1・3 2個の球状介在物を有する無限体の一軸引張り<sup>(11)</sup> 2個の同径球状介在物の中心を結ぶ  $z$  軸方向に直角に一軸引張りを受ける場合の応力集中が求められている(図8)。中心間距離  $\overline{O_1O_2}=b$  とし、介在物に関する量には“—”を付ける。母材および介在物のせん断弾性係数を  $G$ ,  $\bar{G}$  とし  $\bar{G}/G=\Gamma$  を用いれば

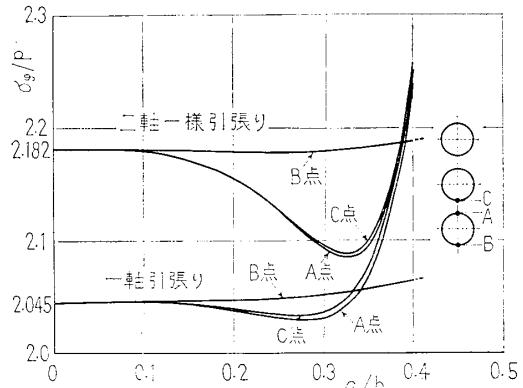


図 6 球か半径によるA, B, C点の応力の変化(同径3球かの場合)

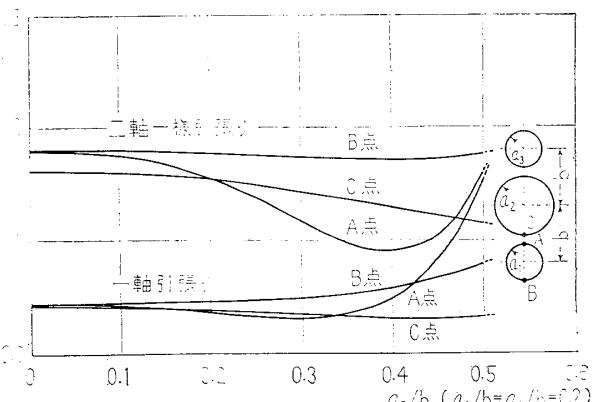


図 7 中央球か半径  $a_2/b$  によるA, B, C点の応力の変化( $a_1/b=a_3/b=0.2$  の場合)

$\Gamma=0$  は球か,  $\Gamma \rightarrow \infty$  は球状剛介在物を表す. 母材と介在物は完全密着しているものとする. 図9はA点における母材および介在物の引張応力  $\sigma_A$ ,  $\bar{\sigma}_A$  の介在物半径に対する変化を示したものである.  $\Gamma=1$  を境として介在物がやわらかい場合 ( $\Gamma < 1$ ) は母材に応力集中を生じ, 介在物が硬い場合 ( $\Gamma > 1$ ) には介在物に応力集中が生じる. そして母材と介在物で  $\Gamma$  と  $1/\Gamma$  に

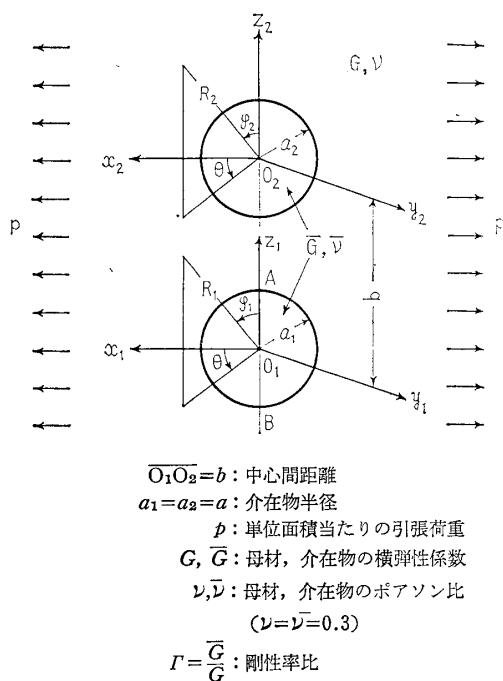
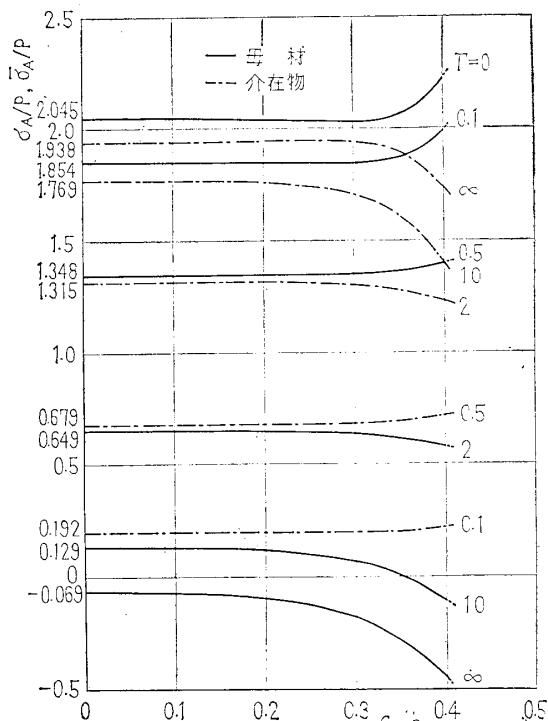


図 8 2 球状介在物を有する無限体

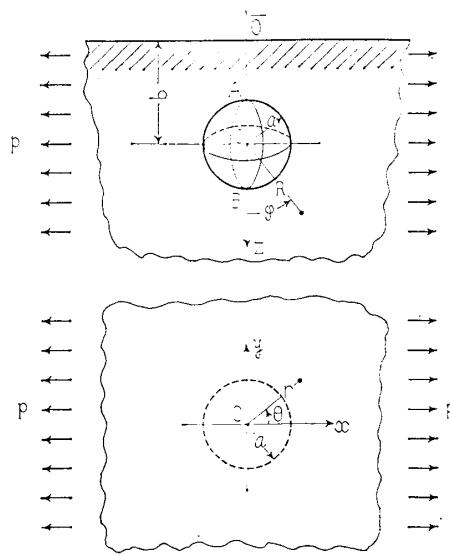
図 9 A点における  $\sigma_A$ ,  $\bar{\sigma}_A$  と介在物半径の関係

対する曲線が  $a/b < 0.3$  で対応している.

## 2. 球状欠陥を有する半無限体の応力集中

**2.1 球かを有する半無限体の一軸引張り**<sup>(12)</sup> 表面から深さ  $b$  の位置に半径  $a$  の球かを有する半無限体が表面に平行な  $x$  軸方向に一軸一様引張荷重  $p$  を受ける場合の応力集中係数がポアソン比  $\nu=0.25$  として求められている(図10).

この場合の最大引張応力は平面境界に最も近い球かの縁A点に生じる. 図11は応力集中係数  $\alpha=\sigma_{\max}/p$  と  $a/b$  の関係である.



$\overline{O_1O_2} = b$ : 基準長さ  
 $a$ : 球か半径  
 $p$ : 単位面積当たりの引張荷重  
 $\nu$ : ポアソン比 0.25

図 10 球かを有する半無限体

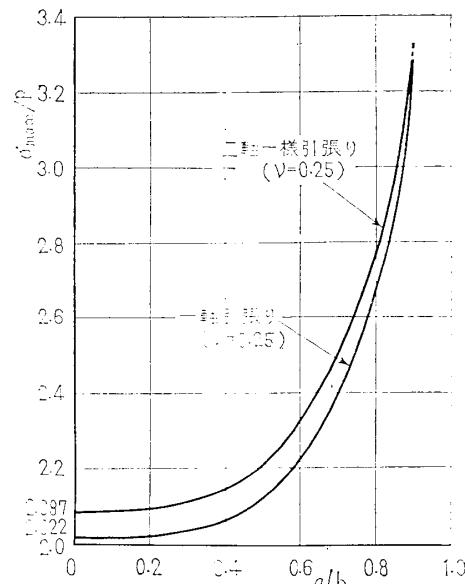
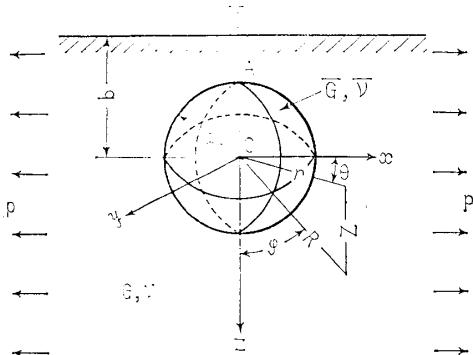


図 11 球か半径による最大引張応力の変化

二軸一様引張荷重を受ける場合<sup>(13)</sup>も求められており同図に示した。 $\sigma_{\max}$  の値は二軸一様引張りのほうが一軸引張りよりも高く、 $a/b$  が大きくなるにつれ、いずれの場合も無限大に近づく。

**2.2 球状介在物を有する半無限体の二軸一様引張り**<sup>(16)</sup> 半無限体と介在物の剛性率比  $\gamma = G/\bar{G}$  (1・3節の  $I'$  の逆数) とボアソン比を変えて詳細に計算がなされている(図12)。介在物に関する量には“—”をつける。図13は最大主応力の最大値と介在物半径の関係を示したもので、介在物がやわらかく球かの状態に近づくほど母材の応力集中は高く、自由表面の影響が大きくなる。また介在物が硬く剛介在物に近くなるほど半無限体の応力集中は高くなるが自由表面の影響は少ない。しかし介在物の応力集中は自由表面の影響を大きく受ける。



$G, \bar{G}$ : 母材、介在物のせん断弾性係数  
 $\nu, \bar{\nu}$ : 母材、介在物のボアソン比  
 $\gamma = \frac{G}{\bar{G}}$ : 刚性率比

図 12 球状介在物を有する半無限体<sup>(16)</sup>

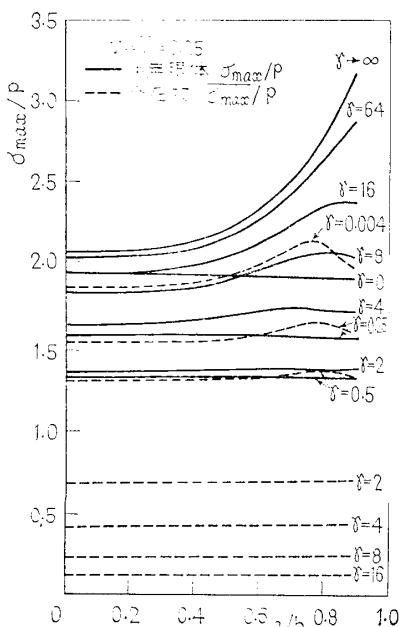


図 13 最大主応力の最大値と介在物半径の関係<sup>(16)</sup>

### 3. 球状欠陥を有する無限に広い厚板の応力集中

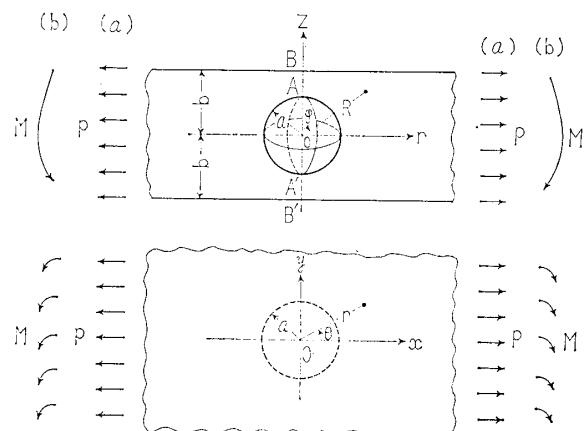
#### 3.1 球かを有する厚板の引張り<sup>(21)</sup>および曲げ<sup>(22)</sup>

図14のように板厚の1/2を基準長さ  $b$  とする。

**3.1.1 一軸および二軸引張り** [図14における荷重(a)の場合] 一軸引張りの場合には最大引張応力は球か縁 A, A' 点に生じる。応力集中係数

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{p} = \left( \frac{\sigma_{\varphi}}{p} \right)_{R=a, \varphi=0, \theta=0}$$

と球か半径の関係を図15に示す。 $a/b$  が零に近づけば球かを有する無限体の場合に一致し  $\sigma_{\max} = 2.045 p$  ( $\nu = 0.3$ ) となり、球か面が厚板両面に接近するにつれ  $\sigma_{\max}$  は無限大に近づく。二軸一様引張りの場合も同様の傾向を示すが全体に応力値は高くなる。



$b$ : 板厚の1/2(基準長さ)  
 $a$ : 球か半径  
 $\nu$ : ボアソン比0.3  
 $p$ : 単位面積当たりの引張荷重  
 $M$ : 単位幅当たりの曲げモーメント

図 14 球かを有する厚板

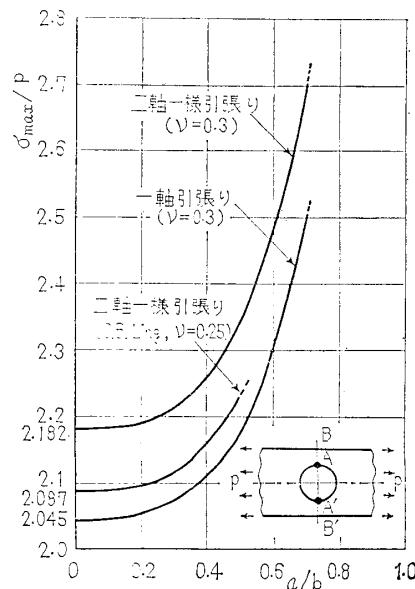


図 15 球か半径による最大引張応力の変化

3・1・2  $y$  軸回りの面外曲げ〔図 14 における荷重(b)の場合〕 基準応力  $k$  として球かのない厚板が曲げを受けるときの最大引張応力

$$k = \frac{3}{2} \frac{M}{b^2}$$

を用いる。

図 16 は最大引張応力の生ずる A, B 点の応力  $\sigma_A$  と  $a/b$  の関係を示したものである。A 点の応力は  $a/b$  が大きくなるにつれ増大し、B 点の応力は逆に減少し、球か直径が板厚の  $1/2$  において両者はほぼ等しい。

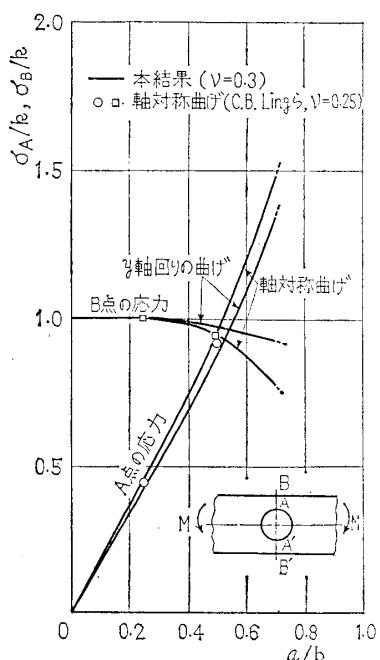


図 16 球か半径による最大引張応力の変化

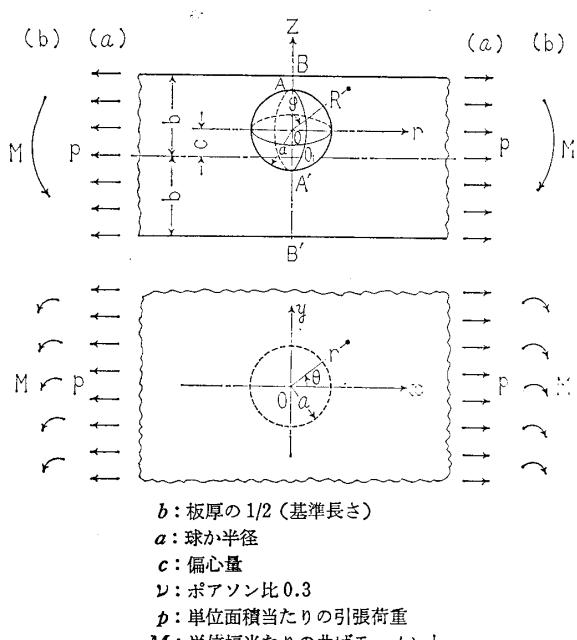


図 17 偏心球かを有する厚板

### 3・2 偏心球かを有する無限に広い厚板の引張り<sup>(28)</sup>

および曲げ<sup>(29)</sup> 板厚の  $1/2$  を基準長さ  $b$  とし、球か半径を  $a$ 、球かの板中央面からの偏心量を  $c$  とする。

3・2・1 一軸および二軸引張り〔図 17 における荷重(a)の場合〕 最大引張応力は図 18 に示すように平面境界が最も近い側の球か面の頂点 A に生じ、球か半径が増加するにつれて急激に増大するが、これと反対側の頂点 A' に生ずる引張応力はわずかに増大する。また偏心量が増せばこれらの応力は増大する。

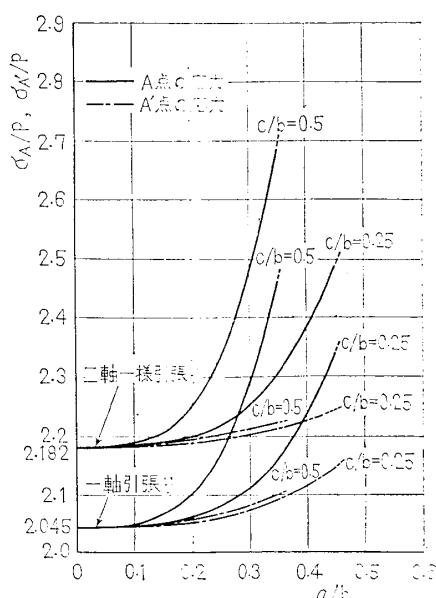


図 18 球か半径による最大引張応力の変化

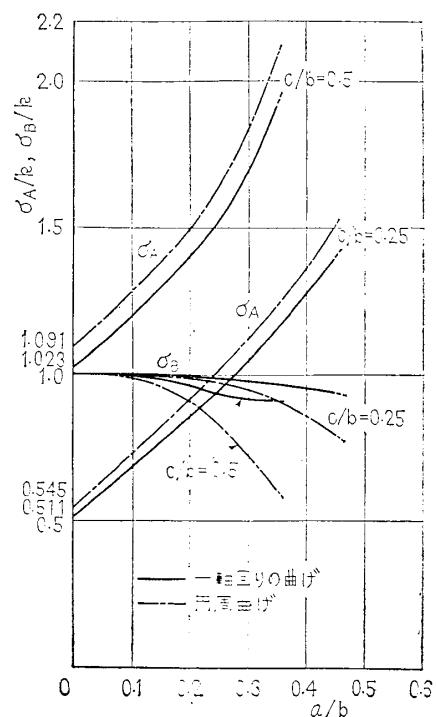


図 19 球か半径による最大引張応力の変化

**3・2・2  $y$  軸回りの面外曲げ〔図 17 における荷重(b)の場合〕 基準応力は前項と同様**

$$k = \frac{3}{2} \frac{M}{b^2}$$

である。最大引張応力は球か面の頂点 A から板表面の B 点に生じ、これらの応力  $\sigma_A, \sigma_B$  と  $a/b$  の関係は図 19 のようになる。球か縁に生ずる引張応力の最大値は偏心量および球か半径が大きくなるにつれて増大し、厚板上面に生ずる引張応力は逆に減少する。なお、一点鎖線は板の周囲を一様に曲げた円周曲げの結果である。

以上簡単であるが球状欠陥による応力集中現象の一端を解説した。紙面の都合上載せられなかつたが、球状欠陥が無限体<sup>(6)~(11)</sup>、半無限体<sup>(12)~(20)</sup>、厚板<sup>(21)~(32)</sup>、円柱<sup>(33)~(38)</sup>に存在する場合の応力集中については文献を参照されたい。本稿は欠陥がさまざまな形状を有する弾性体内に存在し、種々の荷重を受けるときの応力集中を推定する上に少しでも役立つことを意図したものであるが、文献 (1)~(5) などに記載されている結果と重複を避けるため著者らが行った研究を中心となり片寄ったきらいがあるのでぜひこれらの書物といっしょに活用されることを望みます。さらに異方性材料の分野でも球状欠陥の問題が解明されており、これらを割愛したこと、その他に重要な文献の見落としも多いと思われるがこれらの点をお許し願いたい。

終わりに研究においてご指導をいただき、まとめにあたって助言と援助を賜わった中原一郎、中沢一、小玉正雄の諸教授、東京工業大学、埼玉大学の材料力学研究室の諸賢に深く謝意を表します。

(原稿受付 昭和 51 年 3 月 23 日)

**文 献**

(1) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1937), Springer.

- (2) Peterson, R.E., *Stress Concentration Design Factors*, (1962), John Wiley & Sons.
- (3) Savin, G.N., *Stress Concentration around Holes*, (1961), Pergamon Press.
- (4) 西田、応力集中、(昭 42), 森北書店。
- (5) 宮本、3 次元弾性論、(昭 42), 裳華房。
- (6) 土田・ほか 2 名、機論、42-353 (昭 51-1), 46.
- (7) 宮本、機論、23-131 (昭 32-7), 431.
- (8) Sternberg, E. and Sadowsky, M.A., *J. Appl. Mech.*, 19-1 (1952-3), 19.
- (9) 土田・ほか 3 名、機講論、No. 750-2 (昭 50-4), 93.
- (10) Miyamoto, H., *Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1956), 27.
- (11) 土田・ほか 2 名、機講論、No. 760-1 (昭 51-4), 143.
- (12) 土田・中原、機論、40-330 (昭 49-2), 285.
- (13) 土田・中原、機論、35-276 (昭 44-8), 1607.
- (14) 土田・中原、機論、37-297 (昭 46-5), 843.
- (15) Tsuchida, E., ほか 2 名, *Proc. 23rd Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1973), 531.
- (16) 筒井・ほか 2 名、機論、40-337 (昭 49-9), 2485.
- (17) Eubanks, R.A., *J. Appl. Mech.*, 21 (1954), 57.
- (18) 藤田・ほか 2 名、防大理工学研究報告、13-4 (昭 50-12), 599.
- (19) 斎藤・中原、機論、33-247 (昭 42-3), 243.
- (20) 土田・中原、機論、33-249 (昭 42-5), 696.
- (21) 土田・中原、機論、42-354 (昭 51-2), 377.
- (22) 土田・ほか 2 名、機論、41-352 (昭 50-12), 3379.
- (23) Ling, C.B., *Trans. ASME, Ser. E*, 26-2 (1959-6), 235.
- (24) Ling, C.B. and Tsai, C.P., *Trans. ASME, Ser. E*, 27-2 (1960-6), 278.
- (25) Fox, N., *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 13 (1960), 228.
- (26) 斎藤・中原、機論、32-236 (昭 41-4), 584.
- (27) Saito, K. and Nakahara, I., *Proc. 15th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1965), 5.
- (28) 土田・ほか 3 名、機論、41-352 (昭 50-12), 3366.
- (29) 土田・ほか 3 名、機講論、No. 750-11 (昭 50-10), 21.
- (30) Ling, C.B. and Tsai, C.P., *Acta Mechanica*, 7-2/3 (1969), 169; 7-4 (1969), 262.
- (31) 藤田・ほか 3 名、機講論、No. 757-2 (昭 50-10), 25.
- (32) 藤田・ほか 3 名、第 25 回応用力学連合講演会抄録集、(昭 50-10), 431.
- (33) 土田・ほか 2 名、機論、41-345 (昭 50-5), 1337.
- (34) Ling, C.B., *Quart. Appl. Math.*, 10-2 (1952), 149.
- (35) Ling, C.B., *Quart. Appl. Math.*, 13-4 (1956), 381.
- (36) Kawashima, K., ほか 2 名, *Proc. 24th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1974), 357.
- (37) 川島・ほか 2 名、機講論、No. 750-2 (昭 50-4), 109.
- (38) 川島・ほか 2 名、機講論、No. 750-11 (昭 50-10), 33.