

539.4.013 : 539.382

数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題*

(第2報, 3球かを有する弾性体)

土田栄一郎**, 内山直人***, 中原一郎****, 小玉正雄**

1. 緒 言

著者らは前報⁽¹⁾において2球かを有する弾性体が球かを結ぶ中心線に垂直に一軸引張荷重を受ける場合を解析し, 二つの球かの干渉による応力集中現象を明らかにした. 球かの数が3個以上になると回転双極座標による方法が適用できなくなるため解析された例は少ない. 1956年宮本⁽²⁾によって始めて球座標を用いて3個の球かを有する弾性体が中心線方向に一様引張荷重を受ける問題が解析された. さらに渥美により無限に並んだ球かを有する円柱の引張り問題⁽³⁾および3球かを有する弾性体の定常熱流による熱応力の解析⁽⁴⁾が行われている. これらはいずれも球かの中心を結ぶ軸に対して応力状態が軸対称な場合であり, 非軸対称問題に対する解析はなされていない. 本論文は前報⁽¹⁾に続いて多数の球かの干渉による応力集中を明らかにするために, 3球かを有する弾性体が球かの中心線に対し垂直に一軸引張荷重を受ける非軸対称問題を三次元弾性論に基づいて解析したものである. 理論解に基づいて(i)同径3球かの場合, および(ii)外側2球かの半径を一定とし中央の球か半径を変化させた場合について数値計算を行い, 球か近傍の応力分布を明らかにするとともに二軸一様引張荷重を受ける場合および2球かの場合と比較検討した.

2. 解 析 法

2.1 応力関数と境界条件 図1に示すように一直線上に並んだ3個の球かを有する無限体が無限遠方で x 軸方向に単位面積当たり p の一様引張荷重を受ける場合を考える. 一般には各球かの中心間距離および半径を任意にとる必要がありその解析も可能であるが, ここでは便宜上中心間距離を等しくし, かつ外側2球かが同径の場合を考える. このようにすれば応力状態

は中央球かの中心 O_2 を含み z 軸に垂直な面に対し対称となる. そして各球かの中心間距離を $\overline{O_1O_2}=\overline{O_2O_3}=1$ として, これをすべての長さの基準にとることにし, 3球かの半径を $a_i (i=1\sim3)$ とおく. 三つの球かの中心 $O_i (i=1\sim3)$ を原点とし中心線を z 軸とする三つの直角座標 (x_i, y_i, z_i) および球座標 (R_i, θ, φ_i) ($i=1\sim3$)をとれば三つの直角座標と球座標の関係は

$$\begin{aligned} x_i &= R_i \sin \varphi_i \cos \theta, & y_i &= R_i \sin \varphi_i \sin \theta, \\ z_i &= R_i \cos \varphi_i & (i=1\sim3) \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられ, 三つの直角座標の間の関係は

$$x_1=x_2=x_3, \quad y_1=y_2=y_3, \quad z_1=z_2+1=z_3+2 \quad (2)$$

である.

さて3球かの場合, 各球か中心を原点として表した変位ベクトルを $u_i (i=1\sim3)$ とおけば全体の変位ベクトル u は

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \quad (3)$$

で与えられる. しかるに Neuber⁽⁵⁾によれば変位ベクトル u_i は調和応力関数 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ を用いて次のように書ける.

$$\begin{aligned} 2Gu_i &= \text{grad} (\varphi_{0i} + x_i \varphi_{1i} + y_i \varphi_{2i} + z_i \varphi_{3i}) \\ &- 4(1-\nu) [\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{3i}] \quad (i=1\sim3) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $\varphi_{0i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{3i}$ の後添字 i は O_i を原点とする座標で表したことを意味する. また G は横弾性係

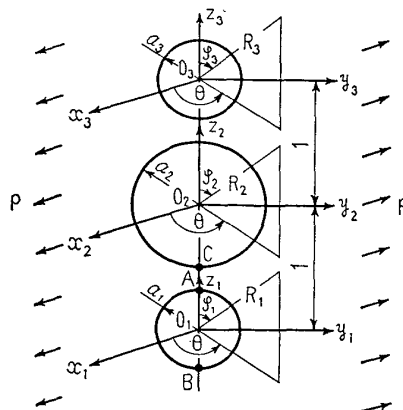


図1 座 標 系

* 昭和52年10月9日 創立80周年記念講演会(東京)において論文講演として講演, 原稿受付 昭和52年5月16日.

** 正員, 埼玉大学工学部(浦和市下大久保255).

*** 正員, 日本原子力発電会社.

**** 正員, 東京工業大学.

数, ν はポアソン比である.

球面 $S_1(R_1=a_1)$ の境界条件を満足させるためには, 式 (3) を O_1 を原点とした座標 (x_1, y_1, z_1) , (R_1, θ, φ_1) で表す必要がある. 式 (4) における $\varphi_{0i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{3i}$ ($i=2, 3$) を O_1 を原点とする座標で表し, さらに式 (2) を考慮して式 (3) を変形すれば,

$$2Gu = \text{grad} [(\varphi_{01} + \varphi_{02} + \varphi_{03} - \varphi_{32} - 2\varphi_{33}) + x_1(\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13}) + y_1(\varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23}) + z_1(\varphi_{31} + \varphi_{32} + \varphi_{33})] - 4(1-\nu)[\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13}, \varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23}, \varphi_{31} + \varphi_{32} + \varphi_{33}] \dots\dots\dots (5)$$

となる. 同様に球面 $S_2(R_2=a_2)$, $S_3(R_3=a_3)$ の境界条件を満足させるためには, 式 (3) をそれぞれ O_2, O_3 を原点とした座標で表し座標間の関係式 (2) を用いればよい. 式 (3) を O_2, O_3 を原点とした座標で表せばそれぞれ以下ようになる.

$$2Gu = \text{grad} [(\varphi_{01} + \varphi_{02} + \varphi_{03} + \varphi_{31} - \varphi_{33}) + x_2(\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13}) + y_2(\varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23}) + z_2(\varphi_{31} + \varphi_{32} + \varphi_{33})] - 4(1-\nu)[\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13}, \varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23}, \varphi_{31} + \varphi_{32} + \varphi_{33}] \dots\dots\dots (6)$$

$$2Gu = \text{grad} [(\varphi_{01} + \varphi_{02} + \varphi_{03} + 2\varphi_{31} + \varphi_{32}) + x_3(\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13}) + y_3(\varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23}) + z_3(\varphi_{31} + \varphi_{32} + \varphi_{33})] - 4(1-\nu)[\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13}, \varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23}, \varphi_{31} + \varphi_{32} + \varphi_{33}] \dots\dots\dots (7)$$

まず O_1 を原点として $\varphi_{01}, \varphi_{31}$ に次のような球調和関数を与える.

$$[I] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{01} &= -\frac{p}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} R_1^2 P_2(\mu_1) + \frac{p}{12} R_1^2 P_2^2(\mu_1) \cos 2\theta, & \varphi_{31} &= -\frac{p}{2} \frac{1}{1+\nu} R_1 P_1(\mu_1) \dots\dots\dots (8) \end{aligned} \right.$$

ここで $P_n(\mu)$ および $P_n^m(\mu)$ はそれぞれ n 次のルジャンドル関数ならびにルジャンドル陪関数であり $\mu = \cos \varphi$ である.

式 (8) は球かのない無限体を x 軸方向に単位面積当たり p の荷重で一様に引張った場合の解⁽¹⁾である. 式 (8) より応力成分を求めると球面 $S_i(R_i=a_i)$ ($i=1\sim 3$) において次のような応力を生じている.

$$\left(\frac{\sigma_R}{p} \right)_{R_i=a_i} = \frac{1}{3} \{P_0(\mu_i) - P_2(\mu_i)\} + \frac{P_2^2(\mu_i)}{6} \cos 2\theta, \\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p} \right)_{R_i=a_i} = \frac{P_2'(\mu_i)}{6} \sin \varphi_i - \frac{P_2^{2'}(\mu_i)}{12} \sin \varphi_i \cos 2\theta, \quad \left(\frac{\tau_{R\theta}}{p} \right)_{R_i=a_i} = -\frac{P_2^2(\mu_i) \sin 2\theta}{6 \sin \varphi_i} \quad (i=1\sim 3)$$

それゆえ 3 球かを有する無限体が x 軸方向に一様な引張荷重を受ける場合の解は応力関数 [I] に以下の境界条件を満足する解を重ね合わせて得られる.

境界条件;

(i) 球か面 $R_i=a_i$ で

$$\left(\frac{\sigma_R}{p} \right)_{R_i=a_i} = -\frac{1}{3} \{P_0(\mu_i) - P_2(\mu_i)\} - \frac{P_2^2(\mu_i)}{6} \cos 2\theta, \\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p} \right)_{R_i=a_i} = -\frac{P_2'(\mu_i)}{6} \sin \varphi_i + \frac{P_2^{2'}(\mu_i)}{12} \sin \varphi_i \cos 2\theta, \quad \left(\frac{\tau_{R\theta}}{p} \right)_{R_i=a_i} = \frac{P_2^2(\mu_i)}{6} \frac{\sin 2\theta}{\sin \varphi_i} \quad (i=1\sim 3) \dots\dots\dots (9)$$

(ii) $R_i > a_i$ ($i=1\sim 3$) の無限遠方ですべての変位, 応力成分が消失する.

この境界条件は θ に無関係な軸対称部分と θ に関する非軸対称部分に分離できるから, それぞれの境界条件を満足する解を軸対称解ならびに非軸対称解として別々に求めた後重ね合わせれば本問題の解が得られる.

2.2 軸対称解 軸対称解に対する応力関数として, 各球かの中心に原点を有する球調和関数を用いて次のように表す.

$$[II] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{0i} &= p \sum_{n=0}^{\infty} A_n^i \frac{P_n(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \\ \varphi_{3i} &= p \sum_{n=0}^{\infty} B_n^i \frac{P_n(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \end{aligned} \right. \quad (i=1, 3) \dots\dots\dots (10)$$

$$[III] \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{02} &= p \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \frac{P_{2n}(\mu_2)}{R_2^{2n+1}} \\ \varphi_{32} &= p \sum_{n=0}^{\infty} B_n^2 \frac{P_{2n+1}(\mu_2)}{R_2^{2n+2}} \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (11)$$

ここで A_n^i, B_n^i ($i=1\sim 3$) は境界条件より決定される未定係数である. 応力関数 [III] は $z_2=0$ の面に対する対称性を考慮して与えた.

さて各球か面の境界条件を満足させるために, 球調和関数の間に次の関係式⁽⁶⁾があることを利用する.

$$\begin{aligned} \frac{P_n^m(\mu_2)}{R_2^{n+1}} \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta} &= \sum_{s=m}^{\infty} {}_m d_{n,s}' \frac{R_1^s P_s^m(\mu_1)}{c^{n+s+1}} \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta}, \\ \frac{P_n^m(\mu_1)}{R_1^{n+1}} \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta} &= \sum_{s=m}^{\infty} {}_m d_{n,s}'' \frac{R_2^s P_s^m(\mu_2)}{c^{n+s+1}} \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta}, \\ {}_m d_{n,s}' &= (-1)^{n-m} {}_m d_{n,s}, \quad {}_m d_{n,s}'' = (-1)^{s-m} {}_m d_{n,s}, \quad {}_m d_{n,s} = \frac{(n+s)!}{(n-m)!(s+m)!} \quad 0 < R_1, R_2 < c \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ただし, c は中心間距離である. また $m=0$ のときは添字を省くものとする [文献(1)の図3参照].

まず外側球か面 $S_1(R_1=a_1)$, $S_3(R_3=a_3)$ の境界条件を考えるとこれは前報の2球かと同様に扱うことができる. ただし中心間距離が異なること, 応力関数 [Ⅲ] があるため式(12)を用いて式(5), (7)に従って各球かの条件を満足させる必要がある. すなわち外側2球かが同径で O_2 を含む z 面に対して対称な応力状態の場合には対称性を考慮して球面 S_1, S_3 の境界条件の一方を満足させれば他方は自然に満足される.

したがって

$$a_1=a_3=a, \quad A_n^1=(-1)^n A_n^3=A_n, \quad B_n^1=(-1)^{n+1} B_n^3=B_n \quad \dots\dots\dots(13)$$

とにおいて S_1, S_3 の境界条件を満足させれば以下の関係式が得られる.

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2) \frac{A_n}{a^{n+3}} + \frac{n\{n(n+3)-2\nu\}}{2n-1} \frac{B_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{B_{n+1}}{a^{n+3}} \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \left[(A_s+2B_s) d_{s,n} n(n-1) \frac{a^{n-2}}{2^{n+s+1}} + (A_s^2 d_{2s,n} + B_s^2 d_{2s+1,n}) n(n-1) a^{n-2} \right. \\ \left. - B_s \left\{ d_{s,n+1} (n+1) \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} \frac{a^n}{2^{n+s+2}} + d_{s,n-1} \frac{(n-1)n(n-4+4\nu)}{2n-1} \frac{a^{n-2}}{2^{n+s}} \right\} \right. \\ \left. - B_s^2 \left\{ d_{2s+1,n+1} (n+1) \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} a^n + d_{2s+1,n-1} \frac{(n-1)n(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-2} \right\} \right] \\ = -\frac{1}{3} (\delta_n^{(0)} - \delta_n^{(2)}) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n+2) \frac{A_n}{a^{n+3}} + \frac{(n^2-2+2\nu)}{2n-1} \frac{B_{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{(n+2)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{B_{n+1}}{a^{n+3}} \\ - \sum_{s=0}^{\infty} \left[(A_s+2B_s) d_{s,n} (n-1) \frac{a^{n-2}}{2^{n+s+1}} + (A_s^2 d_{2s,n} + B_s^2 d_{2s+1,n}) (n-1) a^{n-2} \right. \\ \left. - B_s \left\{ d_{s,n+1} \frac{(n^2+2n-1+2\nu)}{2n+3} \frac{a^n}{2^{n+s+2}} + d_{s,n-1} \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} \frac{a^{n-2}}{2^{n+s}} \right\} \right. \\ \left. - B_s^2 \left\{ d_{2s+1,n+1} \frac{(n^2+2n-1+2\nu)}{2n+3} a^n + d_{2s+1,n-1} \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-2} \right\} \right] = -\frac{1}{6} \delta_n^{(2)} \\ (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

ただし $\delta_n^{(m)}$ はクロネッカーのデルタであり $\delta_n^{(m)}=1$ ($n=m$), $\delta_n^{(m)}=0$ ($n \neq m$) を表す. 式(14), (15)で $n=1$ とおいた関係より $B_0=0$ となることがわかる.

また, 中央の球か面 $S_2(R_2=a_2)$ についても, 式(13)を考慮し式(6), (12)を用いて応力成分を求め境界条件を満足させれば以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} (2n+1)(2n+2) \frac{A_n^2}{a_2^{2n+3}} + 2n \frac{\{(2n)(2n+3)-2\nu\}}{4n+3} \frac{B_{n-1}^2}{a_2^{2n+1}} + \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+5-4\nu)}{4n+3} \frac{B_n^2}{a_2^{2n+3}} \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \left[2(A_s+B_s) d_{s,2n} (2n)(2n-1) a_2^{2n-2} - 2B_s \left\{ d_{s,2n+1} (2n+1) \frac{\{(2n-2)(2n+1)-2\nu\}}{4n+3} a_2^{2n} \right. \right. \\ \left. \left. + d_{s,2n-1} \frac{(2n-1)(2n)(2n-4+4\nu)}{4n-1} a_2^{2n-2} \right\} \right] = -\frac{1}{3} (\delta_n^{(0)} - \delta_n^{(1)}) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots(16) \\ (2n+2) \frac{A_n^2}{a_2^{2n+3}} + \frac{4n^2-2(1-\nu)}{4n-1} \frac{B_{n-1}^2}{a_2^{2n+1}} + \frac{(2n+2)(2n+5-4\nu)}{4n+3} \frac{B_n^2}{a_2^{2n+3}} \\ - \sum_{s=0}^{\infty} \left[2(A_s+B_s) d_{s,2n} (2n-1) a_2^{2n-2} - 2B_s \left\{ d_{s,2n+1} \frac{(4n^2+4n-1+2\nu)}{4n+3} a_2^{2n} \right. \right. \end{aligned}$$

$$+d_{s,2n-1} \frac{(2n-1)(2n-4+4\nu)}{4n-1} a_2^{2n-2} \Big] = -\frac{1}{6} \delta_n^{(1)} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

式 (14)~(17) を解けば軸対称解は完全に決まる。

2・3 非軸対称解 非軸対称解に対する応力関数として、各球かの中心を原点とする球調和関数を用いて次のように表す。

$$[IV] \quad \begin{cases} \varphi_{0i} = p \sum_{n=2}^{\infty} C_n^i \frac{P_n^2(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \cos 2\theta, & \varphi_{1i} = p \sum_{n=1}^{\infty} D_n^i \frac{P_n^1(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \cos \theta \\ \varphi_{2i} = -p \sum_{n=1}^{\infty} D_n^i \frac{P_n^1(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \sin \theta, & \varphi_{3i} = p \sum_{n=2}^{\infty} E_n^i \frac{P_n^2(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \cos 2\theta \end{cases} \quad (i=1, 3) \quad (18)$$

$$[V] \quad \begin{cases} \varphi_{02} = p \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \frac{P_{2n}^2(\mu_2)}{R_2^{2n+1}} \cos 2\theta, & \varphi_{12} = p \sum_{n=0}^{\infty} D_n^2 \frac{P_{2n+1}^1(\mu_2)}{R_2^{2n+2}} \cos \theta \\ \varphi_{22} = -p \sum_{n=0}^{\infty} D_n^2 \frac{P_{2n+1}^1(\mu_2)}{R_2^{2n+2}} \sin \theta, & \varphi_{32} = p \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 \frac{P_{2n+1}^2(\mu_2)}{R_2^{2n+2}} \cos 2\theta \end{cases} \quad (19)$$

ここで C_n^i, D_n^i, E_n^i ($i=1\sim 3$) は境界条件より決定される未定係数である。応力関数 [V] は 2・2 節と同様 $z_2=0$ 面に対する対称性を考慮して与えた。

まず、外側 2 球かの面 $S_1(R_1=a_1)$, $S_3(R_3=a_3)$ の境界条件を満足させるためには第 1 報と同様な方法により式 (12) を用い式 (5), (7) に従って応力関数 [IV], [V] をそれぞれ O_1, O_3 を原点とする座標で表し応力成分を求める。この場合も第 1 報と同様に外側 2 球かが同径で $z_2=0$ 面に対称であるから対称性を考慮して球面 S_1, S_3 の境界条件の一方を満足させれば他方は自然に満足される。

すなわち

$$a_1=a_3=a, \quad C_n^1=(-1)^{n-2}C_n^3=C_n, \quad D_n^1=(-1)^{n-1}D_n^3=D_n, \quad E_n^1=(-1)^{n-1}E_n^3=E_n \quad (20)$$

とにおいて S_1, S_3 の条件を満足させれば第 1 報の式 (30)~(32) に相当する関係式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} & (n+1)(n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} + \frac{(n(n+3)-2\nu)}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} - \frac{(n+2)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} + (n-2) \frac{(n(n+3)-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} \\ & + \frac{(n+2)(n+3)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} + \sum_{s=1}^{\infty} (C_s^2 d_{2s,n} + E_s^2 d_{2s+1,n}) n(n-1) a^{n-2} \\ & + \sum_{s=2}^{\infty} (C_s + 2E_s) d_{s,n} n(n-1) \frac{a^{n-2}}{2^{n+s+1}} + \sum_{s=0}^{\infty} D_s^2 \left\{ {}_1d_{2s+1,n-1} \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-2} \right. \\ & \left. - {}_1d_{2s+1,n+1} \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} a^n \right\} + \sum_{s=1}^{\infty} D_s \left\{ {}_1d_{s,n-1} \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} \frac{a^{n-2}}{2^{n+s}} \right. \\ & \left. - {}_1d_{s,n+1} \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} \frac{a^n}{2^{n+s+2}} \right\} - \sum_{s=1}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{2s+1,n-1} \frac{(n-1)(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-2} \right. \\ & \left. + {}_2d_{2s+1,n+1} \frac{(n+3)}{2n+3} \{(n-2)(n+1)-2\nu\} a^n \right\} - \sum_{s=2}^{\infty} E_s \left\{ {}_2d_{s,n-1} \frac{(n-1)(n-2)(n-4+4\nu)}{2n-1} \frac{a^{n-2}}{2^{n+s}} \right. \\ & \left. + {}_2d_{s,n+1}(n+3) \frac{\{(n-2)(n+1)-2\nu\}}{2n+3} \frac{a^n}{2^{n+s+2}} \right\} = -\frac{1}{6} \delta_n^{(2)} \quad (n=2, 3, \dots) \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} - \frac{\{1+\nu(n+1)\}}{2n+3} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} + \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} \\ & + \frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} - \sum_{s=1}^{\infty} (C_s^2 d_{2s,n} + E_s^2 d_{2s+1,n}) (n-1) a^{n-2} \\ & - \sum_{s=2}^{\infty} (C_s + 2E_s) d_{s,n} n(n-1) \frac{a^{n-2}}{2^{n+s+2}} + \sum_{s=0}^{\infty} D_s^2 \left\{ {}_1d_{2s+1,n-1} \frac{(1-\nu)n}{2n-1} a^{n-2} \right. \\ & \left. - {}_1d_{2s+1,n+1} \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} a^n \right\} + \sum_{s=1}^{\infty} D_s \left\{ {}_1d_{s,n-1} \frac{(1-\nu)n}{2n-1} \frac{a^{n-2}}{2^{n+s}} - {}_1d_{s,n+1} \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} \frac{a^n}{2^{n+s+2}} \right\} \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{2s+1,n-1} \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} a^{n-2} + {}_2d_{2s+1,n+1} \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} a^n \right\} \\ & + \sum_{s=2}^{\infty} E_s \left\{ {}_2d_{s,n-1} \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} \frac{a^{n-2}}{2^{n+s}} + {}_2d_{s,n+1} \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} \frac{a^n}{2^{n+s+2}} \right\} = \frac{1}{12} \delta_n^{(2)} \\ & \quad (n=2, 3, \dots) \quad (22) \end{aligned}$$

$$(n+2) \frac{D_n}{a^{n+2}} - 2(n+2) \frac{E_n}{a^{n+2}} - \sum_{s=0}^{\infty} D_s {}_1d_{2s+1,n} (n-1) a^{n-1} - \sum_{s=1}^{\infty} D_s {}_1d_{s,n} (n-1) \frac{a^{n-1}}{2^{n+s+1}} \\ - 2 \sum_{s=1}^{\infty} E_s {}_2d_{2s+1,n} (n-1) a^{n-1} - 2 \sum_{s=2}^{\infty} E_s {}_2d_{s,n} (n-1) \frac{a^{n-1}}{2^{n+s+1}} = 0 \quad (n=2, 3, \dots) \quad (23)$$

さらに球面 $S_2(R_2=a_2)$ についても式 (20) を考慮し, 式 (6), (13) を用いて応力成分を求め境界条件を満足させると以下の式が得られる.

$$(2n+1) \frac{C_n^2}{a_2^{2n+3}} + \frac{\{2n(2n+3)-2\nu\}}{4n-1} \frac{D_{n-1}^2}{a_2^{2n+1}} - \frac{(2n+2)(2n+5-4\nu)}{4n+3} \frac{D_n^2}{a_2^{2n+3}} \\ + (2n-2) \frac{\{2n(2n+3)-2\nu\}}{4n-1} \frac{E_{n-1}^2}{a_2^{2n+1}} + \frac{(2n+2)(2n+3)(2n+5-4\nu)}{4n+3} \frac{E_n^2}{a_2^{2n+3}} \\ + \sum_{s=2}^{\infty} 2(C_s+E_s) {}_2d_{s,2n} 2n(2n-1) a_2^{2n-2} + \sum_{s=1}^{\infty} 2D_s \left\{ {}_1d_{s,2n-1} \frac{(2n-1)(2n-4+4\nu)}{4n-1} a_2^{2n-2} \right. \\ \left. - {}_1d_{s,2n+1} \frac{\{(2n-2)(2n+1)-2\nu\}}{4n+3} a_2^{2n} \right\} - \sum_{s=2}^{\infty} 2E_s \left\{ {}_2d_{s,2n-1} \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-4+4\nu)}{4n-1} a_2^{2n-2} \right. \\ \left. + {}_2d_{s,2n+1} (2n+3) \frac{\{(2n-2)(2n+1)-2\nu\}}{4n+3} a_2^{2n} \right\} = -\frac{1}{6} \delta_n^{(1)} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (24)$$

$$(2n+2) \frac{C_n^2}{a_2^{2n+3}} + \frac{\{1+\nu(2n-1)\}}{4n-1} \frac{D_{n-1}^2}{a_2^{2n+1}} - \frac{\{1+\nu(2n+1)\}}{4n+3} \frac{D_n^2}{a_2^{2n+3}} + \frac{(2n-2)(2n+2-2\nu)}{4n-1} \frac{E_{n-1}^2}{a_2^{2n+1}} \\ + \frac{(2n+3)(2n+4-2\nu)}{4n+3} \frac{E_n^2}{a_2^{2n+3}} - \sum_{s=2}^{\infty} 2(C_s+E_s) {}_2d_{s,2n} (2n-1) a_2^{2n-2} \\ + \sum_{s=1}^{\infty} 2D_s \left\{ {}_1d_{s,2n-1} \frac{(1-2\nu n)}{4n-1} a_2^{2n-2} - {}_1d_{s,2n+1} \frac{\{1-\nu(2n+2)\}}{4n+3} a_2^{2n} \right\} \\ + \sum_{s=2}^{\infty} 2E_s \left\{ {}_2d_{s,2n-1} \frac{(2n-2)(2n-3+2\nu)}{4n-1} a_2^{2n-2} + {}_2d_{s,2n+1} \frac{(2n+3)(2n-1+2\nu)}{4n+3} a_2^{2n} \right\} = \frac{1}{12} \delta_n^{(1)} \\ (n=1, 2, 3, \dots) \quad (25)$$

$$(2n+3) \frac{D_n^2}{a_2^{2n+3}} - 2(2n+3) \frac{E_n^2}{a_2^{2n+3}} - 4 \sum_{s=1}^{\infty} D_s {}_1d_{s,2n+1} n a_2^{2n} + 8 \sum_{s=1}^{\infty} E_s {}_2d_{s,2n+1} n a_2^{2n} = 0 \\ (n=1, 2, 3, \dots) \quad (26)$$

式 (21)~(26) の無限連立一次方程式を解けば未定係数 $C_n, D_n, E_n, C_n^2, D_n^2, E_n^2$ は完全に決まる. そして全体の変位および応力は応力関数 [I]~[V] を重ね合わせて得られる.

3. 数 値 計 算

以上の理論解析にしたがい, ポアソン比 $\nu=0.3$ として (i) 同径3球かの場合, (ii) 外側2球かの半径を $a=0.2$ と固定し中央球か半径 a_2 を変化させた場合について, それぞれ $a=0.1 \sim 0.4$, $a_2=0.05 \sim 0.5$ と変えて数値計算を行った. 係数方程式 (14)~(17) および (21)~(26) より未定係数 $A_n \sim E_n, A_n^2 \sim E_n^2$ を求める際, 最終的に得られる応力値が有効数字3けた以上になるように各々 10~30 項で打ち切って連立一次方程式を解いた.

3.1 同径3球かの場合 図2は $\theta=0$ における外側球か面の応力 σ_φ の分布を示したもので, σ_φ は $\varphi=0^\circ, 180^\circ$ で引張応力の極大値をとり $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$ で球かどうしの干渉現象がみられるが, φ が 60° を越えるとほとんど干渉はみられない. 図3は $\theta=\pi/2$ に

おける外側球か面の σ_θ の分布である. σ_θ は引張応力であり, その分布形状は2球かの場合と似ていて球か半径 a の大きさにより大きく影響を受ける. 引張応力の極大値は $a=0.4$ の場合には $\varphi=0^\circ$ に生ずるが a が 0.3 よりも小さい場合には $\varphi=60^\circ$ 近傍に生ずる. 図4は $\theta=0$ の場合の中央球か面の σ_φ の分布で

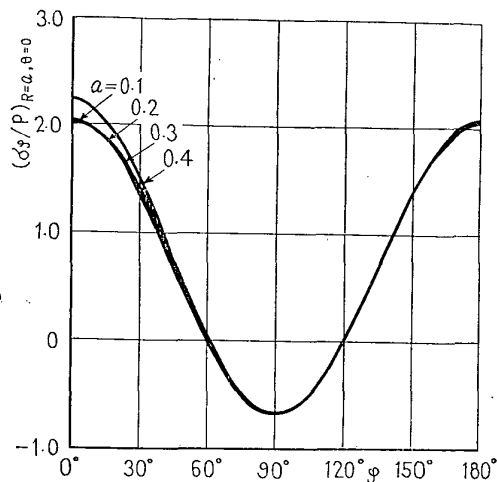


図2 外側球か面の σ_φ の分布 ($\theta=0$)

ある. この場合応力分布は $\varphi_2=90^\circ$ に関し対称であり, $\varphi_2=0^\circ, 180^\circ$ 近傍において球かの干渉現象が顕著にみられる. 図 5 は $\theta=\pi/2$ における中央球か面の σ_θ の分布である. σ_θ の分布は球かの大きさの影響を大きく受けており $a=0.1\sim 0.3$ では $\varphi_2=90^\circ$ 近傍で引張応力の極大値をとるが $a=0.4$ では $\varphi_2=0^\circ, 180^\circ$ でとる. 図 6 は O_2 から O_8 までの z 軸上の応力 $(\sigma_r)_{r=0, \theta=0}=(\sigma_\varphi)_{\varphi_2=0, \theta=0}$ の分布を示したものである. 応力 σ_r は

引張応力であり球か面上で最大で球かから離れると急速に減少するが, a が大きくなるとその度合も緩慢になり干渉現象が顕著に見られる. 以上の結果から, 外側, 中央球か面の最大引張応力は各球か面上のある角度の φ, φ_2 の値における $(\sigma_\theta)_{R=a, \theta=\pi/2}, (\sigma_\theta)_{R_2=a, \theta=\pi/2}$ であることがわかる. これらの値をそれぞれ $\sigma_{\max 1}, \sigma_{\max 2}$ として球か半径 a に対しそれらが生ずる位置と値を表 1 に示した. 弾性体全体としての最大引張応力は中央球か面の $\sigma_{\max 2}$ であり, a が増すにつれ単調に増加する.

ところで $\sigma_{\max 1}, \sigma_{\max 2}$ の生ずる位置は球か半径が異なると変化するので扱いにくい. そこで表 1 に示すようにこれらの値が A, B, C 点に生ずる $(\sigma_\theta)_{\theta=\pi/2}$ [z 軸上では $(\sigma_\varphi)_{\theta=0}$ と等しい] の値のいずれかに近

表 1 応力集中係数 ($a_1=a_2=a_3=a$ の場合)

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_{\max 1}}{p}, \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_{\max 2}}{p}, \quad \alpha_A = \frac{\sigma_A}{p},$$

$$\alpha_B = \frac{\sigma_B}{p}, \quad \alpha_C = \frac{\sigma_C}{p}$$

a	$\sigma_{\max 1}$ の生ずる φ	$\sigma_{\max 2}$ の生ずる φ_2	α_1	α_2	α_A	α_B	α_C
0	$0^\circ \sim 180^\circ$	$0^\circ \sim 180^\circ$	2.045	2.045	2.045	2.045	2.045
0.1	80°	90°	2.046	2.047	2.045	2.045	2.045
0.2	75°	90°	2.053	2.057	2.038	2.046	2.039
0.3	60°	$75^\circ, 105^\circ$	2.077	2.087	2.031	2.052	2.036
0.4	0°	$0^\circ, 180^\circ$	2.241	2.251	2.241	2.065	2.251

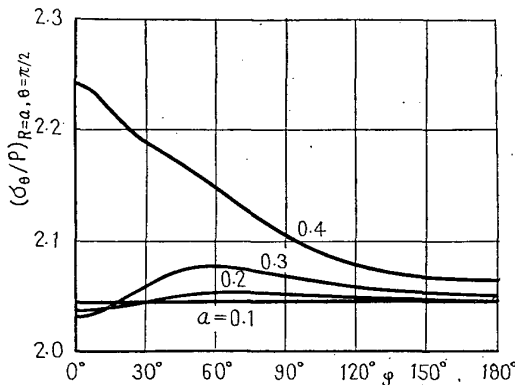


図 3 外側球か面の σ_θ の分布 ($\theta=\pi/2$)

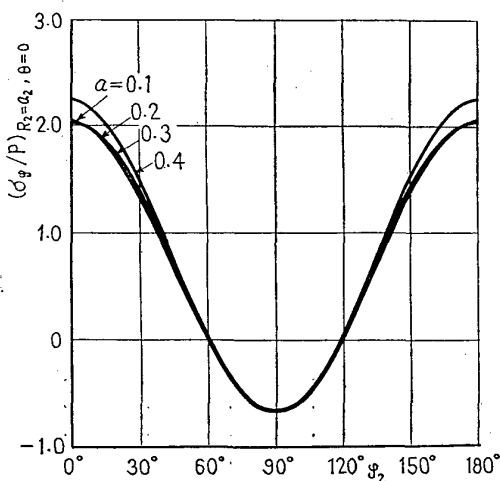


図 4 中央球か面の σ_φ の分布 ($\theta=0$)

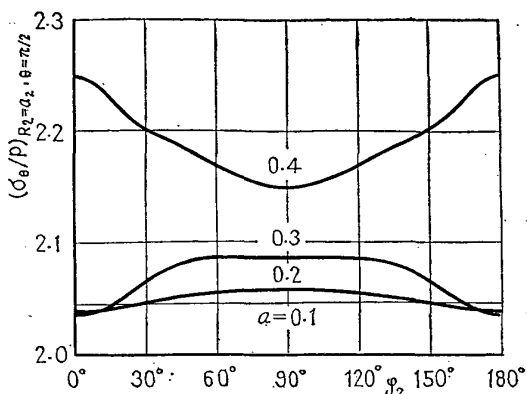


図 5 中央球か面の σ_θ の分布 ($\theta=\pi/2$)

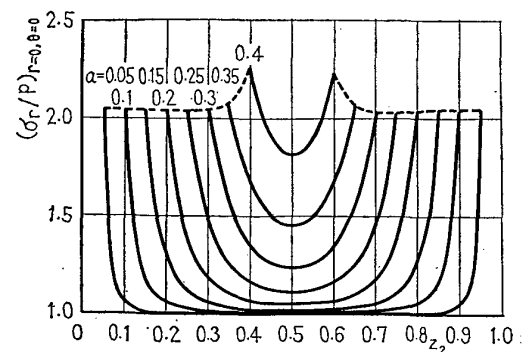


図 6 z_2 軸上の σ_r の分布 ($\theta=0$)

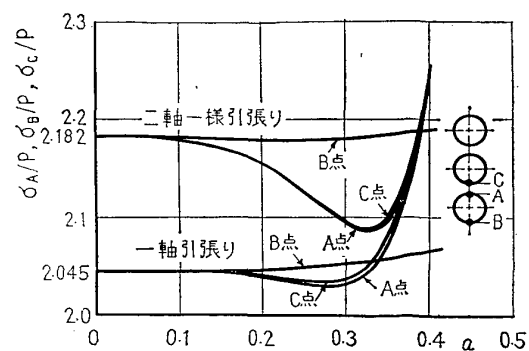


図 7 球か半径による $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ の変化

似されることから、これらの点に生ずる引張応力を $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ として a に対する変化を求めたのが図7である。B点の応力 σ_B は a の増加に伴い、1球かを有する無限体の結果 $2.045p$ でより漸増するのに対し、 σ_A, σ_C は $a=0.3$ まで応力緩和現象を示しさらに a が増すとこれらの値は急増する。図に2・2節より得られた二軸一様引張りの結果を併せ示したが対応する応力の分布は似ており、応力値は一軸引張りよりも大きくなっている。前報⁽¹⁾の2球かの場合と比較すると、総じて外側球か面上の応力は、分布および値がほぼ同じであるが中央球か面に関しては応力分布はかなり異なる。

3・2 外側2球かの半径を $\alpha=0.2$ と固定した場合

図8,9はそれぞれ外側および中央球か面上の応力 σ_θ の $\theta=\pi/2$ の場合の分布を示したものである。図8では σ_θ は引張応力であり中央球か半径 a_2 が小さいときはほぼ一定であるが、 a_2 が0.2以上になると $\varphi=60^\circ$ 近傍で極大値をとる。図9においては σ_θ は $a_2=0.3$ 以下では $\varphi=90^\circ$ で極大値をとるが、 a_2 がさらに大きくなると $\varphi=50^\circ, 130^\circ$ 近傍で極大値をとる。(i)の場合と同様、外側、中央球か面に生ずる最大引張応力をそれぞれ $\sigma_{\max 1}, \sigma_{\max 2}$ として a_2 に対し

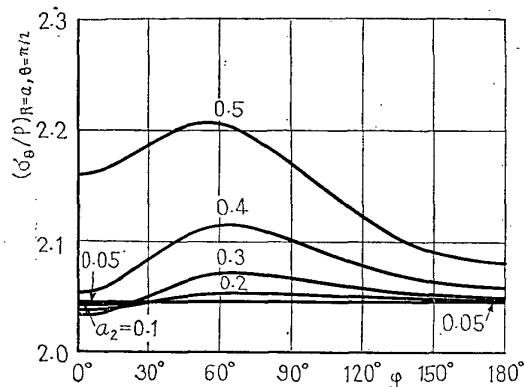


図8 外側球か面の σ_θ の分布 ($\theta=\pi/2$)

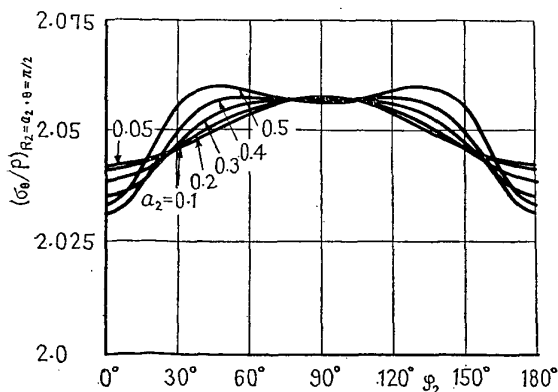


図9 中央球か面の σ_θ の分布 ($\theta=\pi/2$)

その生ずる位置と値の変化を表2に示した。表2より a_2 が0.24より小さいときは $\sigma_{\max 2}$ が弾性体の最大引張応力であるが a_2 が0.24を越えると $\sigma_{\max 1}$ が最大となる。すなわち最大引張応力は小さいほうの球か面上に生ずる。さらに $\sigma_{\max 1}, \sigma_{\max 2}$ がA, B, C点の $(\sigma_\theta)_{\theta=\pi/2}$ の値のいずれかに近似されるからこれらの引張応力 $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ と a_2 の関係を示したのが図10である。

σ_B は a_2 の増加に伴い漸増するが σ_A, σ_C はそれぞれ $a_2=0.3$ および0.4まで応力緩和現象を呈し、さらに a_2 が増すと σ_A は急増し、 σ_C もわずかながら増加する。同図に二軸一様引張りの結果を示したが(i)の場合と同様対応する点の応力値は一軸引張りよりも大きい。

4. 結 言

二つ以上の球かを有する弾性体の非軸対称問題として、前報に引き続いて3球かを有する無限体が球かの中心線に対して垂直な面に一軸一様引張荷重を受ける場合を三次元弾性論に基づいて厳密に解析した。本研究で得られた主な結果は次のとおりである。

(i) 同径3球かの場合

(1) 最大引張応力は中央球か面に生ずる σ_θ であり、球か半径が大きくなると、球かどうしの相互干渉によりその生ずる位置が変化するとともに値も増加する。

表2 応力集中係数 ($\alpha_1=\alpha_3=0.2$ の場合)

a_2	$\sigma_{\max 1}$ の生ずる φ	$\sigma_{\max 2}$ の生ずる φ_2	α_1	α_2	α_A	α_B	α_C
0.05	80°	90°	2.046	2.058	2.045	2.045	2.042
0.1	80°	90°	2.047	2.057	2.044	2.046	2.041
0.2	75°	90°	2.053	2.057	2.038	2.046	2.039
0.3	70°	90°	2.071	2.057	2.032	2.050	2.035
0.4	60°	60°, 120°	2.114	2.057	2.053	2.059	2.031
0.5	50°	50°, 130°	2.206	2.060	2.160	2.081	2.033

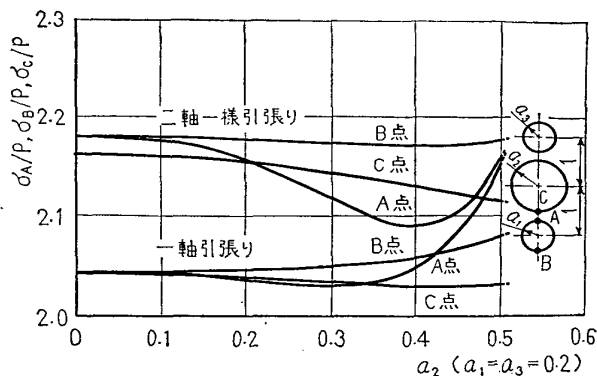


図10 球か半径 a_2 による $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ の変化 ($\alpha_1=\alpha_3=0.2$)

(2) 最大引張応力は A, B, C 点のいずれかの応力 $(\sigma_\theta)_{\theta=\pi/2}$ で近似される. A, C 点の引張応力 σ_A, σ_C は, 球か半径が小さいときは 1 個の球かの場合より単調に減少し応力軽減作用を示すが, 球か半径がさらに大きくなると急激に増加する.

(3) 同径 2 球かの場合と比べると, 外側 2 球か面の各応力の分布および値はほぼ同じだが, 中央球か面におけるものは外側 2 球かの影響を大きく受け, 異なっている.

(4) 二軸一様引張荷重を受ける場合の $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ の a に対する分布は一軸引張りの場合と似ているが応力値は高い.

(ii) 外側 2 球かの半径を $a=0.2$ と固定した場合

(1) 最大引張応力は小さいほうの球か面に生ずる σ_θ である. すなわち中央球か半径 a_2 が a よりも小さ

いときは最大引張応力は中央球か面に生じ, a_2 が a よりも大きくなると外側球か面に生じ急激に増加する.

(2) 最大引張応力は, A, B, C 点のいずれかの $(\sigma_\theta)_{\theta=\pi/2}$ で近似される. C 点の引張応力 σ_C は (i) の場合と異なり, 応力軽減作用を示した後は急激な増加現象はみられない. σ_A, σ_B は (i) の場合と同様である.

文 献

- (1) 土田・ほか 2 名, 機論, **42**-353 (昭 51-1), 46.
- (2) Miyamoto, H., *Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1956), 27.
- (3) Atsumi, A., *Trans. ASME, Ser. E*, **27**-1 (1960-3), 87.
- (4) 渥美, 機論, **30**-209 (昭 39-1), 111.
- (5) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1958), 24, Springer-Verlag.
- (6) Robin, L., *Fonctions Spheriques de Legendre et Fonctions Spheroidales*, Tome 1 (1957), 164, Gauthier-Villars.