

539.4.013 : 539.382

半球ピットを有する厚板の二軸一様引張り*

藤田輝昭**, 定保 隆***, 土田栄一郎†, 中原一郎††

1. 緒 言

金属表面には, ブローホールやスラグあるいは酸化物などの脱落によって生じた穴や, 腐食ピットなどの欠陥が存在する場合が少なくない. これらは応力集中による強度低下の原因となるために, それらによる応力集中現象を明らかにすることは強度設計上重要である.

ところが弾性体内部に存在する欠陥による応力集中に関する研究に比べれば, 表面欠陥を対象とする研究は少ない. 表面に半球ピットを有する半無限体については, 1954 年 R. A. Eubanks⁽¹⁾ が二軸一様引張荷重を受ける場合を解析したのが最初であり, その後一軸引張荷重を受ける場合⁽²⁾および半球ピット面に軸対称圧力を受ける問題⁽³⁾が解析された.

以上の研究は弾性体を半無限体として考えたものであるが, 実際に用いられる板材は有限の厚さを有しており, そのために板厚が集中応力におよぼす影響を明らかにしておくことは重要であると考えられる. 本研究は, 片面に 1 個の半球ピットを有する厚板が, 無限遠方において, 二軸一様引張荷重を受ける軸対称問題を Boussinesq の応力関数を用いて厳密に解析したものである.

解析においては, ピットの存在する上面で応力自由となる 4 組の解を組合わせて下面でも応力自由となる 2 組の解を導き, これらに無限遠方の条件を満足する解を加えてピット面の境界条件を満足させた.

理論解に基づいてピット半径と板厚との比を変えてピット近傍の応力を計算し, 応力分布におよぼす板厚の影響を明らかにした.

2. 解 析 法

図 1 のように板厚を 1 とし, これを基準にしてすべての長さを表すものとする. そして O 点を座標原点と

し円柱座標 (r, θ, z) , 球座標 (R, θ, φ) をとれば, 板厚上下面は $z=0, 1$, ピット面は $R=a$ で表される.

まず軸対称問題における Boussinesq の応力関数 φ_0, φ_3 を用いて円柱座標における (r, θ, z) 方向の変位 u_r, v_θ, w_z を表せば次のようになる.

$$2Gu_r = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}, \quad v_\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$2Gw_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3-4\nu)\varphi_3$$

ここで

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_3 = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

であり, ν はポアソン比, G は横弾性係数である.

半球ピットを有する厚板が無限遠方で単位面積当たり p の二軸一様引張荷重を受けるとき, 満足すべき境界条件は次のとおりである.

(i) 無限遠方で

$$(\sigma_x)_{r \rightarrow \infty} = (\sigma_y)_{r \rightarrow \infty} = p, \quad \text{その他の応力} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(ii) 厚板の上面 $z=0$ で

$$(\sigma_z)_{z=0} = (\tau_{rz})_{z=0} = 0 \quad (r \geq a) \quad \dots\dots\dots (3)$$

(iii) 厚板の下面 $z=1$ で

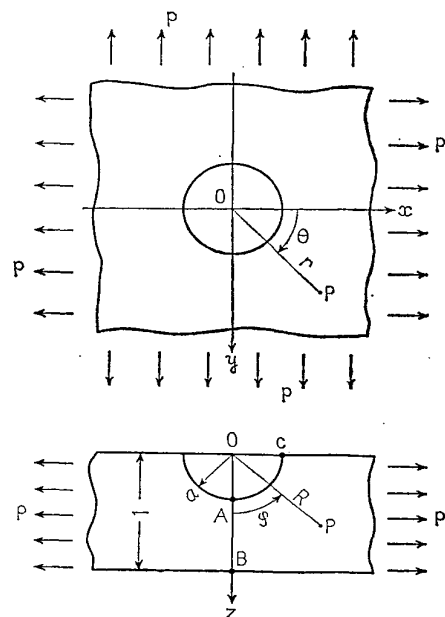


図 1 座標系

* 昭和 50 年 10 月 7 日 北陸信越支部諏訪地方講演会において講演, 原稿受付 昭和 51 年 9 月 17 日.

** 正員, 防衛大学校 (横須賀市走水 1-10-20).

*** 東京ガス会社.

† 正員, 埼玉大学工学部.

†† 正員, 東京工業大学.

$$(\sigma_z)_{z=1} = (\tau_{rz})_{z=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

(iv) 半球ピット面 $R=a$ で

$$(\sigma_R)_{R=a} = (\tau_{R\varphi})_{R=a} = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2) \quad \dots\dots (5)$$

これらの境界条件を満足する解を導くために応力関数 φ_0, φ_3 に以下のような調和関数を与える.

$$[I] \quad \begin{cases} \varphi_0 = -\frac{1-\nu}{1+\nu} p R^2 P_2(\mu) \\ \varphi_3 = -\frac{1}{1+\nu} p R P_1(\mu) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$[II] \quad \begin{cases} \varphi_0 = -2(1-\nu) p \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{P_{2m}(\mu)}{R^{2m+1}} \\ \varphi_3 = p \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) A_m \frac{P_{2m+1}(\mu)}{R^{2m+2}} \end{cases} \quad \dots\dots (7)$$

$$[III] \quad \begin{cases} \varphi_0 = -(1-2\nu) p \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{P_{2m+1}(\mu)}{R^{2m+2}} \\ \varphi_3 = p \sum_{m=0}^{\infty} (2m+2) B_m \frac{P_{2m+2}(\mu)}{R^{2m+3}} \end{cases} \quad \dots (8)$$

$$[IV] \quad \begin{cases} \varphi_0 = 2(1-\nu) p \int_0^{\infty} \phi_1(\lambda) \cosh \lambda z J_0(\lambda r) d\lambda \\ \varphi_3 = p \int_0^{\infty} \lambda \phi_1(\lambda) \sinh \lambda z J_0(\lambda r) d\lambda \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$[V] \quad \begin{cases} \varphi_0 = (1-2\nu) p \int_0^{\infty} \phi_2(\lambda) \sinh \lambda z J_0(\lambda r) d\lambda \\ \varphi_3 = p \int_0^{\infty} \lambda \phi_2(\lambda) \cosh \lambda z J_0(\lambda r) d\lambda \end{cases} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで $J_n(\lambda r)$ は n 次の第1種ベッセル関数, $P_n(\mu)$ は n 次の第1種ルジャンドル関数, $\mu = \cos \varphi$ であり, A_m, B_m および $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$ はそれぞれ境界条件より決まる未定係数ならびに未知関数である.

応力関数 [I] からは無限遠方で二軸一様引張荷重を受け, 厚板上下面で応力自由となる解が導かれる. また応力関数 [II], [III] からはピット中心 $R=0$ を除いて厚板上面で, [IV], [V] からは厚板上面で応力自由となり, 無限遠方で応力が消失するような解が得られる. それゆえ [I]~[V] から導かれる解を一次結合したものは境界条件 (i), (ii) を満足する.

次に厚板下面の境界条件を満足させるために, 球座標で表された応力関数 [II], [III] を次の数学公式

$$\frac{P_n(\mu)}{R^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} \lambda^n d\lambda \quad (z > 0) \quad \dots (11)$$

を用いて円柱調和関数で表せば,

$$[II]^* \quad \begin{cases} \varphi_0 = -2(1-\nu) p \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\lambda^{2m}}{(2m)!} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \\ \varphi_3 = p \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\lambda^{2m+1}}{(2m)!} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \end{cases} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$[III]^* \quad \begin{cases} \varphi_0 = -(1-2\nu) p \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{\lambda^{2m+1}}{(2m+1)!} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \\ \varphi_3 = p \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{\lambda^{2m+2}}{(2m+2)!} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \end{cases} \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる. 応力関数 [II]*, [III]*, [IV], [V] より応力成分を求めて厚板下面の境界条件式 (4) に代入すると次のようになる.

$$\left(\frac{\sigma_z}{p}\right)_{z=1} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \left[\phi_1(\lambda) \lambda \sinh \lambda + \phi_2(\lambda) (\lambda \cosh \lambda - \sinh \lambda) + e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda^{2m+1}}{(2m)!} A_m + \frac{\lambda^{2m+1}(\lambda+1)}{(2m+1)!} B_m \right\} J_0(\lambda r) \right] d\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$-\left(\frac{\tau_{rz}}{p}\right)_{z=1} = \int_0^{\infty} \lambda^2 \left[\phi_1(\lambda) (\lambda \cosh \lambda + \sinh \lambda) + \phi_2(\lambda) \lambda \sinh \lambda + e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda^{2m}(\lambda-1)}{(2m)!} A_m + \frac{\lambda^{2m+2}}{(2m+1)!} B_m \right\} J_1(\lambda r) \right] d\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

式 (14), (15) より $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$ を求めると,

$$\phi_1(\lambda) = -\sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{A_m}{(2m)!} \frac{\lambda^{2m}(\lambda^2 - \lambda + e^{-\lambda} \sinh \lambda)}{\sinh^2 \lambda - \lambda^2} + \frac{B_m}{(2m+1)!} \frac{\lambda^{2m+3}}{\sinh^2 \lambda - \lambda^2} \right] \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\phi_2(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{A_m}{(2m)!} \frac{\lambda^{2m+2}}{\sinh^2 \lambda - \lambda^2} + \frac{B_m}{(2m+1)!} \frac{\lambda^{2m+1}(\lambda^2 + \lambda + e^{-\lambda} \sinh \lambda)}{\sinh^2 \lambda - \lambda^2} \right] \quad \dots\dots\dots (17)$$

したがって式 (16), (17) の関係が成立すれば A_m, B_m に無関係に厚板下面の境界条件が満足されることになる.

次に半球ピット面の境界条件を満足させるために数学公式

$$J_0(\lambda r) \cosh \lambda z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda R)^{2n}}{(2n)!} P_{2n}(\mu), \quad J_0(\lambda r) \sinh \lambda z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda R)^{2n+1}}{(2n+1)!} P_{2n+1}(\mu) \quad \dots\dots\dots (18)$$

を用い, 応力関数 [IV], [V] を球調和関数で展開すれば次のようになる.

$$[IV]^* \begin{cases} \varphi_0 = 2(1-\nu)p \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n R^{2n+2} P_{2n+2}(\mu) \\ \varphi_3 = p \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) \alpha_n R^{2n+1} P_{2n+1}(\mu) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$[V]^* \begin{cases} \varphi_0 = (1-2\nu)p \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n R^{2n+1} P_{2n+1}(\mu) \\ \varphi_3 = p \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \beta_n R^{2n} P_{2n}(\mu) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで,

$$\alpha_n = \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^{\infty} \phi_1(\lambda) \lambda^{2n+2} d\lambda, \quad \beta_n = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} \phi_2(\lambda) \lambda^{2n+1} d\lambda \quad \dots\dots\dots (21)$$

であり, 式 (16), (17) を式 (21) に代入すれば α_n, β_n は次のように表される.

$$\alpha_n = - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(2m+2n+2)!}{(2m)!(2n+2)!} \{ (2m+2n+3) I_{2m+2n+3} - I_{2m+2n+2} + M_{2m+2n+2} \} A_m \right. \\ \left. + \frac{(2m+2n+4)!}{(2m+1)!(2n+2)!} I_{2m+2n+4} B_m \right] \quad (n=0, 1, \dots) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\beta_n = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(2m+2n+2)!}{(2m)!(2n+1)!} I_{2m+2n+2} A_m + \frac{(2m+2n+2)!}{(2m+1)!(2n+1)!} \{ (2m+2n+3) I_{2m+2n+3} \right. \\ \left. + I_{2m+2n+2} + M_{2m+2n+2} \} B_m \right] \quad (n=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ただし

$$I_k = \frac{2^k}{k!} \left[\int_0^{\infty} \frac{\lambda^k d\lambda}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} - \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k d\lambda}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} \right] \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$M_k = \frac{2^k}{k!} \left[\int_0^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-2\lambda} d\lambda}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} + \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-2\lambda} d\lambda}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} \right] \quad \dots\dots\dots (25)$$

定積分 I_k, M_k は Howland の積分⁽⁴⁾ と呼ばれている.

応力関数 $[I], [II], [III], [IV]^*, [V]^*$ より応力成分を求め半球ピット面の境界条件式 (5) を満足させると次のようになる.

$$\left(\frac{\sigma_R}{p} \right)_{R=a} = \frac{2}{3} \{ P_0(\mu) - P_2(\mu) \} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A_n}{a^{2n+3}} \frac{(2n+1)(2n+2)\{(2n+1)^2 - 2(1-\nu)\}}{4n+3} \right. \\ \left. + \frac{A_{n-1}}{a^{2n+1}} \frac{(2n-1)2n\{2n(2n+3) - 2\nu\}}{4n-1} \right] P_{2n}(\mu) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{2n+4}} \frac{(2n+2)(2n+3)}{4n+5} [\{ (2n+3)^2 - 2(1-\nu) \} P_{2n+1}(\mu) \\ + \{ (2n+3)(2n+6) - 2\nu \} P_{2n+3}(\mu)] + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n a^{2n} \frac{(2n+1)(2n+2)\{(2n-2)(2n+1) - 2\nu\}}{4n+3} \right. \\ \left. + \alpha_{n-1} a^{2n-2} \frac{(2n-1)2n\{4n^2 - 2(1-\nu)\}}{4n-1} \right] P_{2n}(\mu) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+1} a^{2n+1} \frac{(2n+2)(2n+3)}{4n+5} [\{ (2n-1)(2n+2) - 2\nu \} P_{2n+1}(\mu) \\ + \{ (2n+2)^2 - 2(1-\nu) \} P_{2n+3}(\mu)] = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p \sin \varphi} \right)_{R=a} = \frac{1}{3} P_2'(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n}{a^{2n+3}} \frac{(2n+2)\{(2n+1)^2 - 2(1-\nu)\}}{4n+3} \right. \\ \left. + \frac{A_{n-1}}{a^{2n+1}} \frac{(2n-1)\{4n^2 - 2(1-\nu)\}}{4n-1} \right] P_{2n}'(\mu) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{2n+4}} \frac{(2n+3)^2 - 2(1-\nu)}{4n+5} \{ (2n+3) P_{2n+1}'(\mu) + (2n+2) P_{2n+3}'(\mu) \} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n a^{2n} \frac{(2n+2)\{(2n+1)^2 - 2(1-\nu)\}}{4n+3} + \alpha_{n-1} a^{2n-2} \frac{(2n-1)\{4n^2 - 2(1-\nu)\}}{4n-1} \right] P_{2n}'(\mu) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+1} a^{2n+1} \frac{(2n+2)^2 - 2(1-\nu)}{4n+5} \{ (2n+3) P_{2n+1}'(\mu) + (2n+2) P_{2n+3}'(\mu) \} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで区間 $0 \leq \mu \leq 1$ において, 展開式

$$\left. \begin{aligned} P_{2n+1}(\mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^{(n)} P_{2k}(\mu), & P_{2n+1}'(\mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^{(n)} P_{2k}'(\mu) \\ \omega_k^{(n)} &= \frac{(2n+1)(4k+1)}{(2n+1-2k)(2n+2+2k)} P_{2k}(0) P_{2n}(0) \quad (0 \leq \mu \leq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

を用いて奇数次のルジャンドル関数を偶数次のルジャンドル関数で展開し, $P_{2n}(\mu)$, $P_{2n}'(\mu)$ の係数を等置すれば, 以下の A_n , B_n に関する無限連立一次方程式を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{A_n}{a^{2n+3}} \frac{(2n+1)(2n+2)\{(2n+1)^2-2(1-\nu)\}}{4n+3} + \frac{A_{n-1}}{a^{2n+1}} \frac{(2n-1)2n\{2n(2n+3)-2\nu\}}{4n-1} \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{a^{2k+4}} \frac{(2k+2)(2k+5)}{4k+5} \left[\{(2k+3)^2-2(1-\nu)\} \omega_k^{(n)} + \{(2k+3)(2k+6)-2\nu\} \omega_{k+1}^{(n)} \right] \\ & + \alpha_n a^{2n} \frac{(2n+1)(2n+2)\{(2n-2)(2n+1)-2\nu\}}{4n+3} + \alpha_{n-1} a^{2n-2} \frac{(2n-1)2n\{4n^2-2(1-\nu)\}}{4n-1} \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k+1} a^{2k+1} \frac{(2k+2)(2k+3)}{4k+5} \left[\{(2k-1)(2k-2)-2\nu\} \omega_k^{(n)} + \{(2k+2)^2-2(1-\nu)\} \omega_{k+1}^{(n)} \right] \\ & = -\frac{2}{3} \{\delta_0^{(n)} - \delta_1^{(n)}\} \quad (n=0, 1, \dots) \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_n}{a^{2n+3}} \frac{(2n+2)\{(2n+1)^2-2(1-\nu)\}}{4n+3} + \frac{A_{n-1}}{a^{2n+1}} \frac{(2n-1)\{4n^2-2(1-\nu)\}}{4n-1} \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{a^{2k+4}} \frac{(2k+3)^2-2(1-\nu)}{4k+5} \{ (2k+3) \omega_k^{(n)} + (2k+2) \omega_{k+1}^{(n)} \} \\ & - \alpha_n a^{2n} \frac{(2n+2)\{(2n+1)^2-2(1-\nu)\}}{4n+3} - \alpha_{n-1} a^{2n-2} \frac{(2n-1)\{4n^2-2(1-\nu)\}}{4n-1} \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k+1} a^{2k+1} \frac{(2k+1)^2-2(1-\nu)}{4k+5} \{ (2k+3) \omega_k^{(n)} + (2k+2) \omega_{k+1}^{(n)} \} = -\frac{1}{3} \delta_1^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

ただし, $\delta_m^{(n)}$ はクロネッカーのデルタである. 式 (29), (30) を A_n , B_n について解けば本問題の解は完全に決まる. 全体の変位および応力は応力関数 [I]~[V] から導かれるものの重ね合せによって得られる.

3. 数 値 計 算

ポアソン比 ν を 0.3 とし, ピット半径 $a=0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ の場合について数値計算を行った. ここで $a=0.0$ は半球ピットを有する半無限体の場合に相当する.

まず未定係数 A_n , B_n に関する無限連立一次方程式 (29), (30) を解くにあたって, ピット面上の残余の応力 $(\sigma_R/p)_{R=a}$, $(\tau_{R\varphi}/p)_{R=a}$ が 10^{-3} 以下になる項数で無限級数を打ち切ることとして, $a=0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ に対し $n=14, 14, 14, 12$ とした.

以下 $P_n(\mu)$, $P_n'(\mu)$ をそれぞれ P_n , P_n' で表すものとすれば, ピット面上の応力 σ_φ は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\varphi}{p} \right)_{R=a} = \mu^2 \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{a^{2n+3}} \left[\frac{(2n+1)(2n+2)}{4n+3} \left[\{(2n+1)^2-2(1-\nu)\} P_{2n} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \{2n(2n+1)+1-2\nu\} P_{2n+2} \right] - (2n-1+2\nu) P_{2n+1}' \right] \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{2n+4}} \left[\frac{(2n+2)(2n+3)}{4n+5} \left[\{(2n+3)^2-2(1-\nu)\} P_{2n+1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \{(2n+1)(2n+2)+1-2\nu\} P_{2n+3} \right] - (2n+1+2\nu) P_{2n+2}' \right] \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^{2n} \left[\frac{(2n+1)(2n+2)}{4n+3} \left[\{(2n+2)(2n+3)+1-2\nu\} P_{2n} + \{(2n+2)^2-2(1-\nu)\} P_{2n+2} \right] \right. \\ & \quad \left. - (2n+4-2\nu) P_{2n+1}' \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n a^{2n-1} \left[\frac{2n(2n+1)}{4n+1} \left[\{(2n+1)(2n+2)+1-2\nu\} P_{2n-1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \{4n^2-2(1-\nu)\} P_{2n+1} \right] - (2n+2-2\nu) P_{2n}' \right] \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

で表され、図2にその分布を示した。 σ_φ はピット底 $\varphi=0^\circ$ で最大になり、 φ の増加とともに減少してピット縁近傍では圧縮応力となる。ピット半径があまり大きくなければ、ピット底を除いては応力分布はほとんど一致する。ピット底の最大引張応力はピット半径の増大とともに大きくなる。

またピット面上における応力 σ_θ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\theta}{p}\right)_{R=a} = & 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{a^{2n+3}} [(1-2\nu)(2n+1)(2n+2)P_{2n+2} + (2n-1+2\nu)P_{2n+1}'] \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{2n+4}} [(1-2\nu)(2n+2)(2n+3)P_{2n+3} + (2n+1+2\nu)P_{2n+2}'] \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^{2n} [(1-2\nu)(2n+1)(2n+2)P_{2n} - (2n+4-2\nu)P_{2n+1}'] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n a^{2n-1} [(1-2\nu)2n(2n+1)P_{2n-1} - (2n+2-2\nu)P_{2n}'] \quad \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

図3にピット面上の応力 σ_θ の分布を示した。 σ_θ はピット底 $\varphi=0^\circ$ で最大になり、 φ の増大とともに減少するが $\varphi=60^\circ \sim 80^\circ$ で極小になる。ピット縁における値はピット底の値より 20~30% 小さい。

z 軸上の応力 σ_φ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\varphi}{p}\right)_{\varphi=0} = & 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z^{2n+3}} \frac{1}{2} (2n+1)(2n+2)(2n+1-2\nu) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{2n+4}} \frac{1}{2} (2n+2)(2n+3)(2n+3-2\nu) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{2n} \frac{1}{2} (2n+1)(2n+2)(2n+2+2\nu) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{2n-1} \frac{1}{2} 2n(2n+1)(2n+2\nu) \quad \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

図4に z 軸上の応力 σ_φ の分布を示した。 σ_φ はピット底 $z=a$ で最大になり、 z の増大とともに減少して、下面 $z=1$ で最小になる。またピット半径が大きいかほど下面の引張応力は小さくなる。

以上の結果をまとめて主要な位置の応力集中係数を図5に示した。ただし

$$\sigma_A = (\sigma_\varphi)_{R=a, \varphi=0^\circ}, \quad \sigma_B = (\sigma_\varphi)_{R=1, \varphi=0^\circ},$$

$$\sigma_C = (\sigma_\theta)_{R=a, \varphi=90^\circ}$$

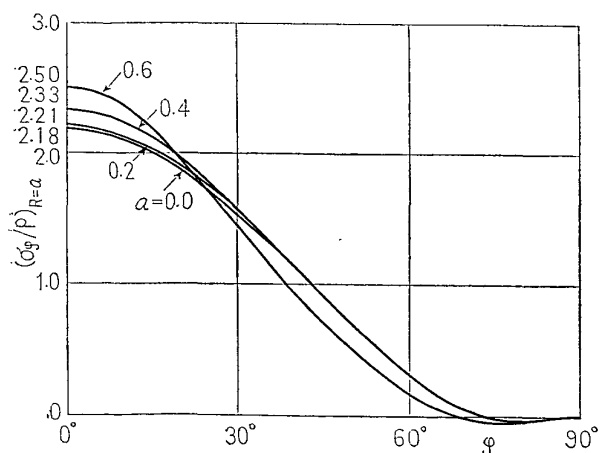


図2 ピット面上の σ_φ の分布

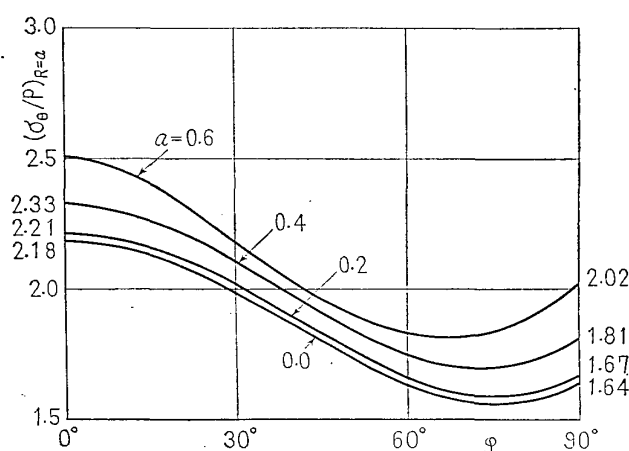


図3 ピット面上の σ_θ の分布

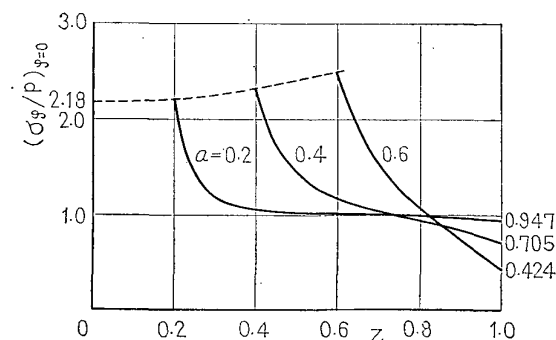


図4 z 軸上の σ_φ の分布

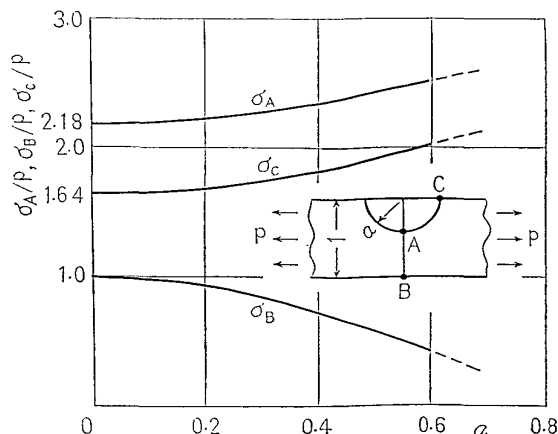


図5 ピット半径による応力集中係数の変化

である。最大の応力はピット底に生じ、この値は $a=0.0$ すなわち半無限体の場合には $\sigma_A=2.18p$ となり、ピット半径の増大とともに大きくなる。ピット縁の応力 σ_c も同様にピット半径が大きくなるにつれて増大する。これに対し、板の下面の応力 σ_B は $\sigma_B=p$ より単調に減少する。

ここで $a=0.0$ の場合に、ピット底の最大引張応力 σ_A は Eubanks の計算値 $\sigma_A=2.23p$ ($\nu=0.25$) より小さくなった。そこであらためて半径ピットをもつ半無限体の場合について、Eubanks の方法で再計算を行ったところ $\sigma_A=2.086p$ ($\nu=0.25$)、 $\sigma_A=2.181p$ ($\nu=0.3$) のような結果が得られた⁽⁵⁾⁽⁶⁾。これは本論文の結果と完全に一致し、Eubanks の計算値に誤差があるものと思われる。

4. 結 言

片側に1個の半球ピットを有する厚板が、無限遠方で二軸一様引張荷重を受ける場合を三次元弾性論に基

づいて厳密に解析する方法を示し、理論解に基づいてピット近傍の応力を計算し、板厚が最大引張応力におよぼす影響を明らかにした。結果を要約すれば次のようになる。

- (1) 最大引張応力はピット底A点に生じ、その値はピット半径が増加するにつれて増大する。
- (2) ピットの存在しない下面B点に生ずる引張応力は、ピット半径の増加とともに減少する。
- (3) ピット縁に生ずる引張応力はピット半径が増加するにつれて増大し、その値はピット底における最大引張応力より 20~30% 低い。

文 献

- (1) Eubanks, R.A., *J. Appl. Mech.*, **21**-1 (1954-3), 57.
- (2) 齊藤・中原, 機論, **33**-247 (昭 42-3), 343.
- (3) 土田・中原, 機論, **33**-249 (昭 42-5), 696.
- (4) Nelson, W., *Math. Comp.*, **15** (1961), 12.
- (5) 藤田・ほか 2 名, 防衛大学校理工学研究報告, **13**-4 (昭 50-12), 599.
- (6) 渥美・伊藤, 機講論, No.761-1 (昭 51-6), 13.