

## 集中荷重をうける中空球の応力解析\*

笠野英秋\*\*, 中原一郎\*\*, 松本浩之\*\*, 土田栄一郎\*\*\*

## 1. 緒 言

直径に沿って対向して集中荷重をうける中実球の応力解析は、すでに若干の人たちによって行われたことがある。E. Sternberg ら<sup>(1)</sup>は表面に集中荷重をうける半無限体の解を、荷重点を極とする双極座標で表し、これに球座標で表した一般弾性解を重ね合わせることで、この問題を解析し、赤道面上の応力を明らかにしている。C. Weber<sup>(2)</sup>は表面に集中荷重をうける半無限体の解より、反転法によって集中荷重をうける中実球の解を導く方法を示している。また A. I. Luré<sup>(3)</sup>は球面上の集中荷重をルジャンドル関数で展開して同じ問題を解析しているが、一般に無限級数に展開された集中荷重は発散級数となるために、このような方法で得られた無限級数解は、球の内部では収束するが、表面では発散する。そこで Luré はこのような無限級数を、閉じた式と収束がよい無限級数に分離する方法を示している。他方、A. F. Ulitko<sup>(4)</sup>は中実球に対する Luré の解を基にして、集中荷重をうける中空球の問題を解析し、内外径比 0.9 の場合についてのみ応力分布を明らかにしている。しかし、これら従来の研究に含まれている数値結果は極めて限られたものであり、特に収束が悪い表面の応力、変形および応力分布に及ぼす肉厚の影響あるいはかく理論では求められない荷重点裏面の応力などを明らかにすることは実際にも重要であろう。本論文では表面に集中荷重をうける半無限体の解を用いて、発散級数の一部を閉じた式として分離することによって、表面および表面近くでの数値計算が可能になることを示し、中実球および内外径比が 0.1, 0.3, 0.6 および 0.9 の中空球の応力と変位を明らかにした。

## 2. 解 析 法

球座標  $R, \theta, \varphi$  方向の変位を  $u_R, v_\theta, w_\varphi$  とす

れば、ねじりなし軸対称問題では Boussinesq の応力関数  $\varphi_0$  および  $\varphi_3$  より導かれる変位は次のようになる。

$$2Gu_R = \frac{\partial \varphi_0}{\partial R}, \quad 2Gw_\varphi = \frac{\partial \varphi_0}{R \partial \varphi} \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_R &= R \cos \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial R} - (3-4\nu) \varphi_3 \cos \varphi, \\ 2Gw_\varphi &= \cos \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi} + (3-4\nu) \varphi_3 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

ここで、 $\varphi_0$  および  $\varphi_3$  は調和関数、そして  $G$  は横弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。図 1 のような中空球を対象とする場合には、応力関数を、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= (P/\pi a^2) \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n' - B_{n-1}' \\ &\quad \times (2n-4+4\nu)\} R^{2n} P_{2n}'(\mu) \\ \varphi_3 &= (P/\pi a^2) \sum_{n=0}^{\infty} B_n' (4n+3) R^{2n+1} P_{2n+1}(\mu) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= (P/\pi a^2) \sum_{n=0}^{\infty} \{C_n' + D_{n+1}' \\ &\quad \times (2n+5-4\nu)\} \{P_{2n}(\mu)/R^{2n+1}\} \\ \varphi_3 &= (P/\pi a^2) \sum_{n=1}^{\infty} -D_n' (4n-1) \{P_{2n-1}(\mu)/R^{2n}\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

とにおいて得られる結果を重ね合わせれば、

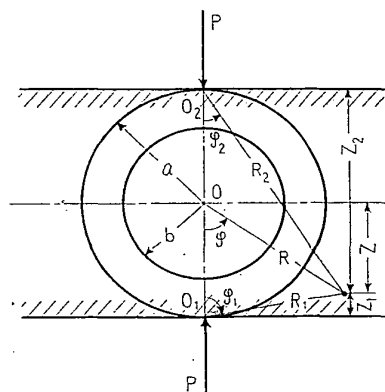


図 1

\* 昭和 48 年 10 月 31 日 第 23 回応用力学連合講演会において講演、原稿受付 昭和 49 年 11 月 20 日。

\*\* 正員、東京工業大学 (東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

\*\*\* 正員、埼玉大学理工学部。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi a^2}{P}(\sigma_R)_{R=a} &= 2(1+\nu)B_0 - C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \{2nA_n \\ &+ (2n+1)(4n^2-2n-2-2\nu)B_n \\ &+ (2n+1)C_n - 2n(4n^2+6n-2\nu)D_n\}P_{2n}(\mu) \\ -\frac{\pi a^2}{P} \frac{(\tau_{R\varphi})_{R=a}}{\sin \varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n + (4n^2+4n-1 \\ &+ 2\nu)B_n - C_n + (4n^2-2+2\nu)D_n\}P_{2n}'(\mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi a^2}{P}(\sigma_R)_{R=b} &= 2(1+\nu)B_0 - C_0\rho_0^{-3} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \{2n\rho_0^{2n-2}A_n + (2n+1)(4n^2 \\ &- 2n-2-2\nu)\rho_0^{2n}B_n + (2n+1)\rho_0^{-(2n+3)}C_n \\ &- 2n(4n^2+6n-2\nu)\rho_0^{-(2n+1)}D_n\}P_{2n}(\mu) \\ -\frac{\pi a^2}{P} \frac{(\tau_{R\varphi})_{R=b}}{\sin \varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{\rho_0^{2n-2}A_n + (4n^2 \\ &+ 4n-1+2\nu)\rho_0^{2n}B_n - \rho_0^{-(2n+3)}C_n \\ &+ (4n^2-2+2\nu)\rho_0^{-(2n+1)}D_n\}P_{2n}'(\mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで,  $\{A_n, B_n, C_n, D_n\} = \{(2n-1)a^{2n-2}A_n', a^{2n}B_n', (2n+2)a^{-(2n+3)}C_n', a^{-(2n+1)}D_n'\}$  であり,  $P_n(\mu)$  は第1種ルジャンドル関数, そして  $\mu = \cos \varphi$ ,  $P_n'(\mu) = dP_n(\mu)/d\mu$ ,  $\rho_0 = b/a$  である. そこで, 表面力を  $P_n(\mu)$  あるいは  $P_n'(\mu)$  で展開すれば, 係数  $A_n, B_n, C_n, D_n$  が決まる. ところが,  $P_n(\mu)$  で展開された集中荷重は発散級数となるために, この方法で得られた解は内部では収束するが, 表面では発散する<sup>(1)(3)</sup>. そのために本研究では図1のように  $O_2$  に集中荷重  $P$  をうける半無限体の応力状態と,  $O_1$  に集中荷重  $P$  をうける半無限体の応力状態を重ね合わせて,  $O$  を中心とする球面上の  $\sigma_R, \tau_{R\varphi}$  を求め, これらが式(5), (6)と逆符号の値をもつように式(5), (6)の各係数を定めた. このようにして得られる解は, 荷重点で特異性をもつ閉じた解と, 収束がよい無限級数の和として表される.

さて  $O_1, O_2$  を原点とする解を  $O$  を原点とする解に書き直すためには, 解を円柱座標で表しておくほうが便利である. そこで式(1), (2)を円柱座標  $(r, \theta, z)$  で表せば,  $r, z$  方向変位  $u_r, w_z$  は次のようになる.

$$2Gu_r = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}, \quad 2Gw_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \dots\dots\dots (7)$$

$$2Gu_r = z \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, \quad 2Gw_z = z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3-4\nu)\varphi_3 \dots\dots\dots (8)$$

まず図1において,  $O_2$  に集中荷重  $P$  をうける半無限体 ( $z_2 > 0$ ) に対する解は, 式(7), (8)で  $z$  を  $z_2$  に変えて,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= (1-2\nu)A \log(R_2+z_2), \\ \varphi_3 &= A/R_2, \quad A = -P/2\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

を代入すれば得られる. この  $O_2$  座標系で表された式(7), (8)に  $z_2 = z+a$  を代入すれば, 式(8)は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= (z+a) \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, \\ 2Gw_z &= (z+a) \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3-4\nu)\varphi_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

式(7), (8・a)に式(9)を代入した結果を重ね合わせれば,  $O_2$  に集中荷重をうける半無限体の解が  $O$  を原点とする座標系で表され, 変位については次のように表される.

$$\begin{aligned} \frac{2G}{A}u_r &= (1-2\nu) \frac{r}{R_2(R_2+z_2)} - \frac{rz_2}{R_2^3}, \\ \frac{2G}{A}w_z &= -2(1-\nu) \frac{1}{R_2} - \frac{z_2^2}{R_2^3} \end{aligned}$$

同様に  $O_1$  に集中荷重  $P$  をうける半無限体 ( $z_1 > 0$ ) に対する解については, 式(7), (8)で  $z$  を  $z_1$  に書き直して,  $z_1 = a-z$  を代入し,  $w_z$  と  $\tau_{rz}$  の符号を変えれば, 式(8)は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= (a-z) \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, \\ 2Gw_z &= (a-z) \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + (3-4\nu)\varphi_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

式(7), (8・b)に,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= (1-2\nu)A \log(R_1+z_1), \\ \varphi_3 &= A/R_1, \quad A = -P/2\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

を代入した結果を重ね合わせれば,  $O_1$  に集中荷重をうける半無限体の解が  $O$  を原点とする座標で表され, 変位については次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{2G}{A}u_r &= (1-2\nu) \frac{r}{R_1(R_1+z_1)} - \frac{rz_1}{R_1^3}, \\ \frac{2G}{A}w_z &= 2(1-\nu) \frac{1}{R_1} + \frac{z_1^2}{R_1^3} \end{aligned}$$

そこで両結果を重ね合わせて球座標で表せば, 変位および応力は次のように表される.

$$\left. \begin{aligned} -\frac{2G\pi R}{P}u_R &= \frac{1-2\nu}{2} \left( 2 - \frac{z_1}{R_1} - \frac{z_2}{R_2} \right) \\ &- \frac{r^2}{2} \left( \frac{z_1}{R_1^3} + \frac{z_2}{R_2^3} \right) + (1-\nu)z \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ &+ \frac{z}{2} \left( \frac{z_1^2}{R_1^3} - \frac{z_2^2}{R_2^3} \right) \\ -\frac{2G\pi R}{P}w_\varphi &= \frac{1-2\nu}{2} \frac{z}{r} \left( 2 - \frac{z_1}{R_1} - \frac{z_2}{R_2} \right) \\ &- \frac{rz}{2} \left( \frac{z_1}{R_1^3} + \frac{z_2}{R_2^3} \right) - (1-\nu)r \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ &- \frac{r}{2} \left( \frac{z_1^2}{R_1^3} - \frac{z_2^2}{R_2^3} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi R^2}{P} \sigma_R = -\frac{1-2\nu}{2} \left( 2 - \frac{z_1}{R_1} - \frac{z_2}{R_2} \right) \\
& + \frac{3r^4}{2} \left( \frac{z_1}{R_1^5} + \frac{z_2}{R_2^5} \right) + \frac{3z^2}{2} \left( \frac{z_1^3}{R_1^5} \right. \\
& \left. + \frac{z_2^3}{R_2^5} \right) - 3r^2 z \left( \frac{z_1^2}{R_1^5} - \frac{z_2^2}{R_2^5} \right) \\
& -\frac{\pi R^2}{P} \sigma_\varphi = -\frac{1-2\nu}{2} \frac{z^2}{r^2} \left( 2 - \frac{z_1}{R_1} - \frac{z_2}{R_2} \right) \\
& + \frac{3r^2 z^2}{2} \left( \frac{z_1}{R_1^5} + \frac{z_2}{R_2^5} \right) + \frac{3r^2}{2} \left( \frac{z_1^3}{R_1^5} \right. \\
& \left. + \frac{z_2^3}{R_2^5} \right) + 3r^2 z \left( \frac{z_1^2}{R_1^5} - \frac{z_2^2}{R_2^5} \right) \\
& -\frac{\pi R^2}{P} \sigma_\theta = \frac{1-2\nu}{2} R^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \left( 2 - \frac{z_1}{R_1} - \frac{z_2}{R_2} \right) \right. \\
& \left. - \left( \frac{z_1}{R_1^3} + \frac{z_2}{R_2^3} \right) \right\} \\
& -\frac{\pi R^2}{P} \tau_{R\varphi} = -\frac{1-2\nu}{2} \frac{z}{r} \left( 2 - \frac{z_1}{R_1} - \frac{z_2}{R_2} \right) \\
& + \frac{3r^3 z}{2} \left( \frac{z_1}{R_1^5} + \frac{z_2}{R_2^5} \right) - \frac{3rz}{2} \left( \frac{z_1^3}{R_1^5} + \frac{z_2^3}{R_2^5} \right) \\
& - \frac{3r}{2} (z^2 - r^2) \left( \frac{z_1^2}{R_1^5} - \frac{z_2^2}{R_2^5} \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで,  $z = R \cos \varphi$ ,  $r = R \sin \varphi$ ,  $z_1 = a - R \cos \varphi$ ,  $z_2 = a + R \cos \varphi$ ,  $R_1^2 = R^2 - 2aR \cos \varphi + a^2$ ,  $R_2^2 = R^2 + 2aR \cos \varphi + a^2$  である. この場合, 半径  $a$  の球面に生じている応力は次のとおりである.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi a^2}{P} (\sigma_R)_{R=a} = -(1-2\nu) \\
& + \frac{7-8\nu}{8\sqrt{2}} (\sqrt{1+\mu} + \sqrt{1-\mu}) \\
& -\frac{\pi a^2}{P} \frac{(\tau_{R\varphi})_{R=a}}{\sin \varphi} = \frac{5-4\nu}{8\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} \right) - \frac{1-2\nu}{2} \left( \frac{1}{1-\mu} - \frac{1}{1+\mu} \right) \\
& + \frac{1-2\nu}{4\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{1+\mu}}{1-\mu} - \frac{\sqrt{1-\mu}}{1+\mu} \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

式 (12) の右辺は数学公式を直接適用して, 次のように  $P_n$ ,  $P_n'$  で展開できる.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi a^2}{P} (\sigma_R)_{R=a} = \frac{1+4\nu}{6} \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7-8\nu}{2(4n-1)(4n+3)} P_{2n}(\mu) \\
& -\frac{\pi a^2}{P} \frac{(\tau_{R\varphi})_{R=a}}{\sin \varphi} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{7-8\nu}{(4n-1)(4n+3)} - \frac{1-2\nu}{2n} \right\} P_{2n}'(\mu)
\end{aligned} \tag{13}$$

しかし, 半径  $b$  の球面上の応力を直接展開することは

困難であるから, 次のような方法を用いる. すなわち,

$$\begin{aligned}
& \log(1-t\mu + \sqrt{1-2t\mu + t^2}) \\
& = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{t^n}{n} P_n(\mu),
\end{aligned}$$

$$(1-2t\mu + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(\mu) \quad (0 < t < 1)$$

を用いて, 式 (9) および (10) を次のように書き直す.

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2\nu)A}{na^n} (-1)^n R^n P_n(\mu), \\
\varphi_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{a^{n+1}} (-1)^n R^n P_n(\mu)
\end{aligned} \tag{9}'$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2\nu)A}{na^n} R^n P_n(\mu), \\
\varphi_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{a^{n+1}} R^n P_n(\mu)
\end{aligned} \tag{10}'$$

これらを用いれば, 半径  $b$  の球面上の応力は次のように表される.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi a^2}{P} (\sigma_R)_{R=b} = \frac{2}{3} (1+\nu) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{2n} \rho_0^{2n-2} + \beta_{2n} \rho_0^{2n}) P_{2n}(\mu) \\
& -\frac{\pi a^2}{P} \frac{(\tau_{R\varphi})_{R=b}}{\sin \varphi} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{2n} \rho_0^{2n-2} + \delta_{2n} \rho_0^{2n}) P_{2n}'(\mu)
\end{aligned} \tag{14}$$

ここで,  $\alpha_{2n} = (2n-1)(4n^2+2n+1-2\nu)/(4n-1)$ ,  $\beta_{2n} = -(2n+1)(4n^2-2n-2-2\nu)/(4n+3)$ ,  $\gamma_{2n} = -\alpha_{2n}/2n$ ,  $\delta_{2n} = (4n^2+4n-1+2\nu)/(4n+3)$  である. ここで, 式 (5) と (13), および式 (6) と (14) を各々加えて零に等置すれば, 次のような 4 元一次方程式が得られる.

$n=0$  に対しては,

$$\begin{aligned}
2(1+\nu)B_0 - C_0 &= -(1+4\nu)/6 \\
2(1+\nu)B_0 - C_0 \rho_0^{-3} &= -2(1+\nu)/3
\end{aligned} \tag{15}$$

$n \geq 1$  に対しては,

$$\begin{aligned}
& 2nA_n + (2n+1)(4n^2-2n-2-2\nu)B_n \\
& + (2n+1)C_n - 2n(4n^2+6n-2\nu)D_n \\
& = -(7-8\nu)/2(4n-1)(4n+3), \\
& A_n + (4n^2+4n-1+2\nu)B_n - C_n \\
& + (4n^2-2+2\nu)D_n \\
& = (1-2\nu)/2n - (7-8\nu)/(4n-1)(4n+3), \\
& 2n\rho_0^{2n-2}A_n + (2n+1)(4n^2-2n-2-2\nu)\rho_0^{2n}B_n \\
& + (2n+1)\rho_0^{-(2n+3)}C_n \\
& - 2n(4n^2+6n-2\nu)\rho_0^{-(2n+1)}D_n = \alpha_{2n}\rho_0^{2n-2} \\
& + \beta_{2n}\rho_0^{2n}, \\
& \rho_0^{2n-2}A_n + (4n^2+4n-1+2\nu)\rho_0^{2n}B_n \\
& - \rho_0^{-(2n+3)}C_n + (4n^2-2+2\nu)\rho_0^{-(2n+1)}D_n \\
& = -\gamma_{2n}\rho_0^{2n-2} - \delta_{2n}\rho_0^{2n}
\end{aligned} \tag{16}$$

これを解けば,  $A_n, B_n, C_n, D_n$  が決まる.  $\rho_0=0$  とおけば, 中実球に対する結果が得られる. このように解の一部を閉じた形の式 (11) として分離したために, 残りの無限級数は収束するけれども, なお表面では級数の収束は緩やかで, 正確な値を求めにくい. そこで, さらに無限級数を次のように変形して数値計算を行った. たとえば, 変位  $u_R$  の無限級数解の部分は,  $\rho=R/a$  として式 (3), (4) より次のようになる.

$$\frac{2G\pi a}{P} u_R = - \frac{(1-2\nu)\{4(1+\nu)\rho_0^3 - (1+4\nu)\}\rho}{6(1+\nu)(1-\rho_0^3)} - \frac{\rho_0^3}{4(1-\rho_0^3)\rho^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n}{2n-1} \rho^{2n-1} A_n + (2n+1)(2n-2+4\nu)\rho^{2n+1} B_n - \frac{2n+1}{(2n+2)\rho^{2n+2}} C_n + \frac{2n(2n+3-4\nu)}{\rho^{2n}} D_n \right\} P_{2n}(\mu) \quad \dots\dots\dots(17)$$

これに式 (16) を解いて求めた各係数を代入すれば, 級数の各項は  $\rho_0$  を含む項と含まない項に分離され,  $n$  が増大するにつれて前者は後者にくらべて非常になくなる. そこで,  $m$  を十分大きな整数として,  $n > m$  では  $\rho_0$  を含む項を無視することができるから, Lur (3) の方法によって級数の収束を速めることができる.

### 3. 数 値 結 果

實際上重要と思われる内外面, 対称軸上, 赤道面上の周方向応力  $\sigma_\theta$ , および子午線方向応力  $\sigma_\varphi$  と, 内外面の半径方向変位  $u_R$  を, ポアソン比  $\nu=0.3$ , 内外径比  $\rho_0=0.1, 0.3, 0.6, 0.9$  の場合について数値計算した. その際,  $m=10\sim50$  と選べば,  $n > m$  においては  $\rho_0$  を含む項を無視することができた.

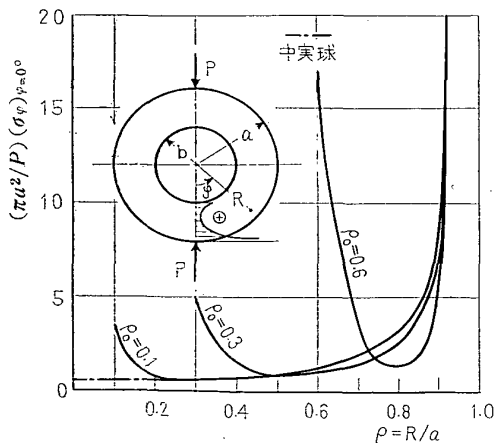


図 2 対称軸上の応力

図 2 は対称軸上の応力分布を示したもので, 荷重点裏側に大きな引張応力が生じ, 内部に入るにつれて急激に減少し, 荷重点に向かうにつれて再び増大する. 図中の一点鎖線は, 中実球の応力であり, 内面近傍を除けば  $\rho_0=0.1$  の場合とほとんど一致する.

図 3 は外面上の応力分布であり, 子午線方向応力  $\sigma_\varphi$  は荷重点から遠ざかるにつれて引張応力から圧縮応力に変わり, 最大圧縮応力を生ずる位置は厚肉になるほど荷重点から遠ざかる. 周方向応力  $\sigma_\theta$  は荷重点から遠ざかるにつれて, 圧縮応力から引張応力に変わる. そして荷重点では  $\sigma_\varphi$  は引張応力に,  $\sigma_\theta$  は圧縮応力になり, その絶対値はいずれも無限に大きくなる. それゆえに, 荷重点における  $\sigma_\theta$  の特異性は, 半無限体表面に集中荷重をうける場合と同じように, 荷重点近くの内部では引張応力に, 表面では圧縮応力になる.

図 4 は内面上の応力分布を示したもので,  $\sigma_\theta$  は常に引張応力であるが,  $\sigma_\varphi$  は赤道面に向かうにつれて,

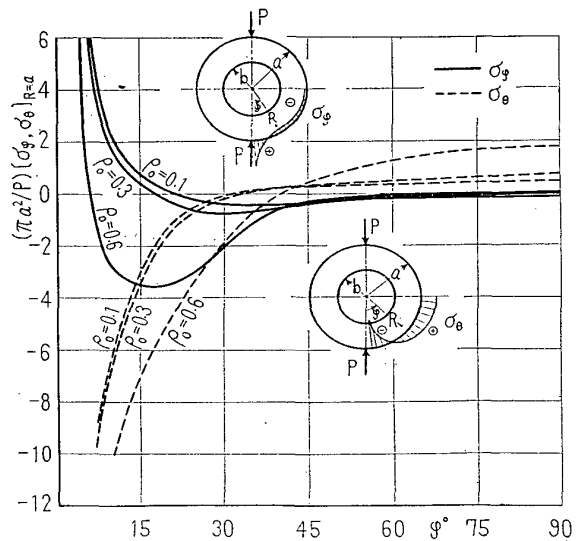


図 3 外面上の応力

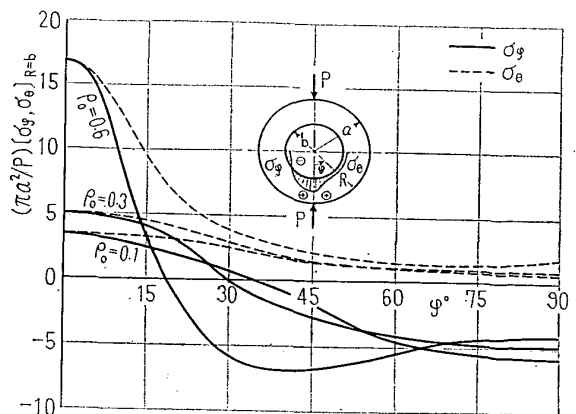


図 4 内面上の応力

引張応力から圧縮応力に変化し、 $\rho_0=0.6$  の場合、 $\varphi=40^\circ$  付近で圧縮応力が最大となる。

図5は赤道面上の応力分布であり、 $\sigma_\theta$  は引張応力で、内面から離れるにつれて緩やかに変化し内面近傍で最大になる。 $\sigma_\varphi$  は圧縮応力で内面で最大になり、内面を離れるにつれて急激に減少して、外面では小さな圧縮応力を生ずる。その際、内面の最大圧縮応力は非常に薄肉でなければ厚肉になるほど大きくなる。中空球の  $\sigma_\varphi$  は、Sternberg らの結果と一致する。

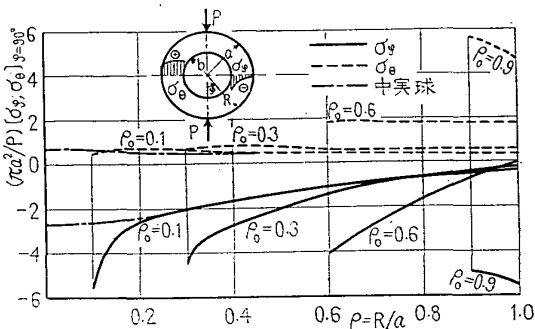


図5 赤道面上の応力

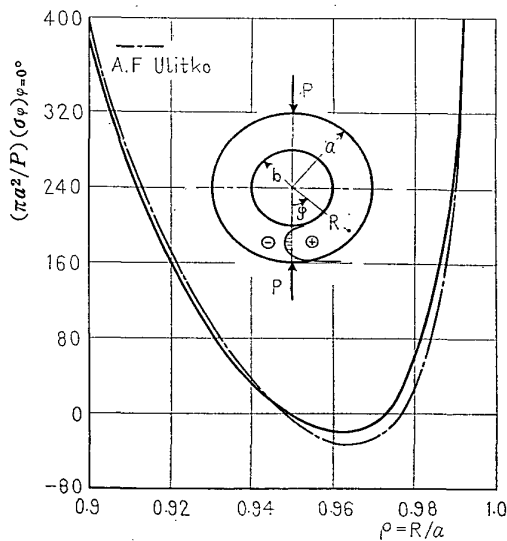


図6 対称軸上の応力 ( $\rho_0=0.9$ )

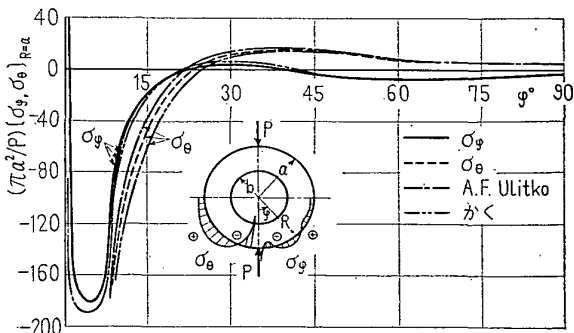


図7 外面上の応力 ( $\rho_0=0.9$ )

図6~8は  $\rho_0=0.9$  の場合を示したもので、比較のために、図中に A.F. Ulitko の結果 ( $\nu=1/3$ ) および浅い球面かくの理論によって得られる結果<sup>(5)(6)</sup>が示してある。これらの結果はほとんど一致しているが、かく理論による解は、荷重点を含んで  $\varphi < 10^\circ$  の近傍では適用できない。

図9および10は内外面の変位を示したもので、かく理論では荷重点の応力および変位は求められないが、本解では荷重点裏面の応力は有限値として求められ、変位はかく理論による値よりも約20%大きくなる。

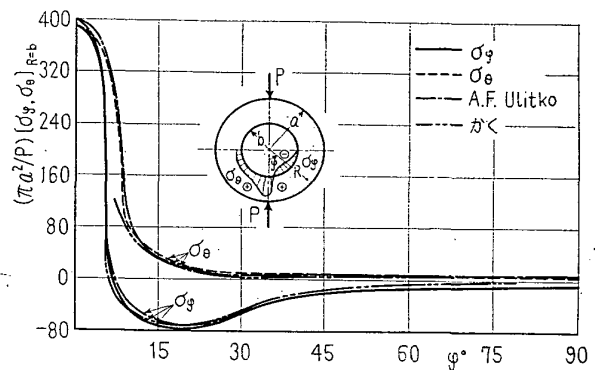


図8 内面上の応力 ( $\rho_0=0.9$ )

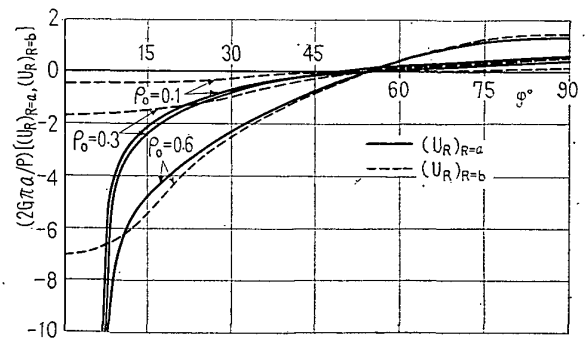


図9 内外面上の変位

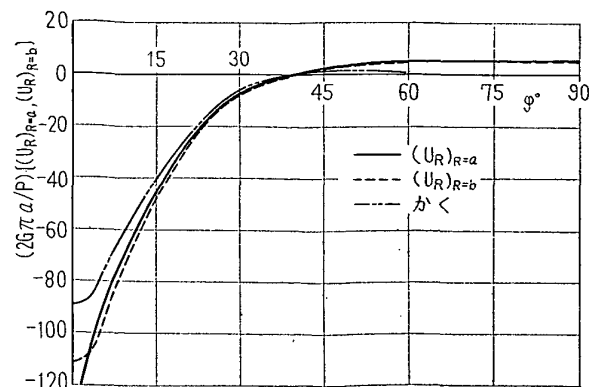


図10 内外面上の変位 ( $\rho_0=0.9$ )

#### 4. 結 論

集中荷重をうける半無限体の解を用いて, 集中荷重をうける中空球の解を, 閉じた式と速やかに収束する無限級数の和として求め, 中実球および内外径比が 0.1, 0.3, 0.6, 0.9 の場合について数値計算を行い, 次のことが明らかになった.

(1) 対称軸上では  $\sigma_\varphi$  は引張応力になり, 内面に著しい応力集中を生ずる.

(2) 赤道面上では  $\sigma_\varphi$  は圧縮応力となり, 内面で急激に増大するが, 薄肉になるにつれて外面で増大するようになる. これに対して  $\sigma_\theta$  は引張応力となり, 内外面間でほとんど変化しない.

(3) 外面上では荷重点近傍を除いて,  $\varphi_\varphi$  は圧縮応力,  $\sigma_\theta$  は引張応力となる.

(4) 内面上では  $\sigma_\theta$  は引張応力であるが,  $\sigma_\varphi$  は荷重点裏面から離れるにつれて引張応力から圧縮応力

に変化する.

(5) 半径方向変位  $u_r$  は荷重点で無限大になるが, 荷重点裏面では有限値として求められる.

(6) 内外半径比が 0.9 の場合について, 浅い球面かく理論によって得られる結果と比較し, 荷重点近く ( $\varphi < 10^\circ$ ) を除けば, かく理論によって得られる結果は, 本理論結果とほとんど一致する.

#### 文 献

- (1) Sternberg, E. and Rosenthal, F., *J. Appl. Mech.*, 19-4 (1952), 413.
- (2) Weber, C., *Z. AMM*, 32-6 (1952), 186.
- (3) Lur , A.I., *Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity*, (1964), 325, Interscience.
- (4) Ulitko, A.F., *Prikladnaya Mekhanika*, 4-5 (1968), 38.
- (5) Timoshenko, S.P., *Theory of Plates and Shells*, (1959), 561, McGraw-Hill.
- (6) Fl gge, W., *Stresses in Shells*, (1960), 353, Springer-Verlag.