

グラフ理論による動力伝達軸系の動的挙動の解析* (モータの特性, 支持台の剛性, 歯車の剛性を考慮した場合)

綿 貫 啓 一^{*1}, 大 滝 英 征^{*2}, 石 川 義 雄^{*2}

An Analysis of Dynamics Behavior for a Power Transmission Mechanism Using Linear Graph Theory (In the Case of Consideration of Motor, Support and Gear)

Keiichi WATANUKI, Hideyuki OTAKI, and Yoshio ISHIKAWA

The importance of system design in the field of mechanical engineering has been increasingly recognized recently. But suitable and useful methods for machine design are not yet established. So we must derive easy and useful designing methods for each machine element. In the previous report, we derived a new designing method by linear graph theory and analyzed the results of the dynamic behaviour of a power transmission mechanism as an example. In the report, we understand that the mechanisms which are subject to restrictions of high accuracy and high performance must be designed by considering the characteristic of each machine element. This report deals with a more general power transmission mechanism containing a motor, bearing, support and so on, and analyzes the results of dynamic behaviour. Provided that the analytical model and system graph as in this report are prepared for the mechanism, the performance of the mechanism is easily grasped by this method.

Key Words: Machine Design, Linear Graph Theory, Simulation, Power Transmission Mechanism, Vibration, Dynamic Behaviour

1. は じ め に

近年, エレクトロニクス技術の急速な発展に伴い, 機械の高精度, 高性能化および複合機能化が図られてきている。さらには, 機械の製品開発における競争の激化と製品のライフサイクルの短縮あるいは多品種少量生産などが顕著となり, 製品企画から生産までの期間短縮と仕様の多様化に柔軟に対応できる態勢も必要となってきている。そのため, 機械設計の技術も変化しつつある。

前報⁽¹⁾では, 以上のような社会的要求に的確に対処するために, 電気回路網の解析に以来から用いられてきたグラフ理論を機械系にも拡張し適用する手法を述べた。この手法によれば, システムのモデル化をもとにその運動解析に必要な構成方程式をたてて数値解析するという従来の手法に比べて, 機械システムの構成要素を付加したり, 配置を換えたりした任意の系に対しても柔軟に対応できる特徴がある。

そこで本報では, 搬送機械などの一般的な機構にま

で拡張することを目的に, ロボットの主軸系について検討した。ロボットの主軸系は, 周知のように軽量化あるいは応答性などの要求から, 機械部品の空間的配置および寸法などの制約を受ける。そのため, 軸受の取付け部および軸の剛性を低下せざるをえなかったり, 歯部のばね剛性の低いプラスチック歯車を組み込んだりすることはまれではない。しかし, 設計変更のたびに軸系全体の振動などの解析を従来の手法で行うには, 多大な労力と時間を要する。さらには, モータの駆動特性まで加味して解析するとなると, 系全体の構成方程式の誘導および解析は, 極めて困難となる。このように複雑化した機械・電気系に対しても, 本報で示したように, 解析モデルおよびシステムグラフの作成を適切に行えば, 容易に解析ができるので報告する。

本論文中使用する主な記号は次のとおりである。

T : トルク

ω : 角速度

t : 時間

i : 電流

v : 電圧

E : モータの入力電圧

L, R : モータのインダクタンス, 内部抵抗

* 昭和62年7月14日 東海支部三重地方講演会において講演, 原稿受付 昭和61年12月22日。

^{*1} 学生員, 埼玉大学大学院 (〒338 浦和市中大久保255)。
〔現在, 東京工業大学大学院〕

^{*2} 正員, 埼玉大学工学部。

K_t, K_a : モータのトルク定数, 誘起電圧定数
 J_M : モータ軸の慣性モーメント
 b_M : モータ内の軸受の粘性減衰係数
 J_{Gi} : 歯車 i の慣性モーメント
 K_{Gij}, C_{Gij} : 歯車 ij の歯面間のばね剛性, 粘性減衰係数
 r_i : 歯車 i の基礎円半径
 K_i, C_i : 軸 i のねじり剛性, 粘性減衰係数
 b : 軸受の粘性減衰係数
 K_{so}, C_{so} : 支持部のねじり剛性, 粘性減衰係数
 J_L : 負荷の慣性モーメント
 h : 計算の刻み幅
 I : 単位行列
 B : ループ行列
 D : カットセット行列
 F : ターミナル方程式の係数行列
 H : タブロー方程式の右辺ベクトル

2. グラフ理論によるシステム解析

2.1 解析手法の概要 図 1 に, グラフ理論による解析手法のフローチャートを示した。そこで, このフローチャートに沿って, 解析手法を説明する。

(1) まず, 解析を行う系について, その系の特徴を表す解析モデル (図的モデル) を作成する。次に, 解析モデルを DC モータ, 軸, 歯車などのように構成要素に分解する。さらに, DC モータは電気系および機械系に分解する。

(2) 次に, 分解した構成要素に対して, ターミナルグラフおよびターミナル方程式 (数学的モデル) を作成する。ターミナルグラフは各構成要素の端子間の接続特性を表すものであり, ターミナル方程式は各構成要素間についての入出力特性を表すものである。このターミナル方程式を差分法を用いて離散化し, さらに各構成要素のターミナル方程式をまとめて, ターミナル行列を作成する。

(3) 各構成要素のターミナルグラフおよび解析モデルの接続状況に従ってシステムグラフを作成する。

(4) システムグラフによる接続状況を考慮し, インシデンス行列を求める。これより, グラフ理論でいう木および補木を決定し, カットセット行列およびループ行列を導出する。

(5) ターミナル行列, カットセット行列およびループ行列より, 系全体の構成方程式に相当するタブロー方程式を作成する。そして, この方程式をクラウト法により数値解析を行う。

2.2 解析モデル 本報においては, 図 2 に示す

ようなロボットの主軸系について解析を行うことにする。このような軸系では, 軸, 支持部あるいは歯車の歯部などの剛性が振動の要因となり, さらに, モータの駆動特性も振動に多大な影響を持つ。それゆえ, 前報で解析した動力伝達軸の場合の解析モデルおよびシステムグラフの作成とは異なった工夫を要する。

2.3 ターミナル方程式およびターミナルグラフ

2.2 節で示した解析モデルの各構成要素についてターミナル方程式およびターミナルグラフを求める。

(1) DC ギヤードモータ 駆動源としては, DC ギヤードモータをモータ部および減速機構部に分けて検討することにする。

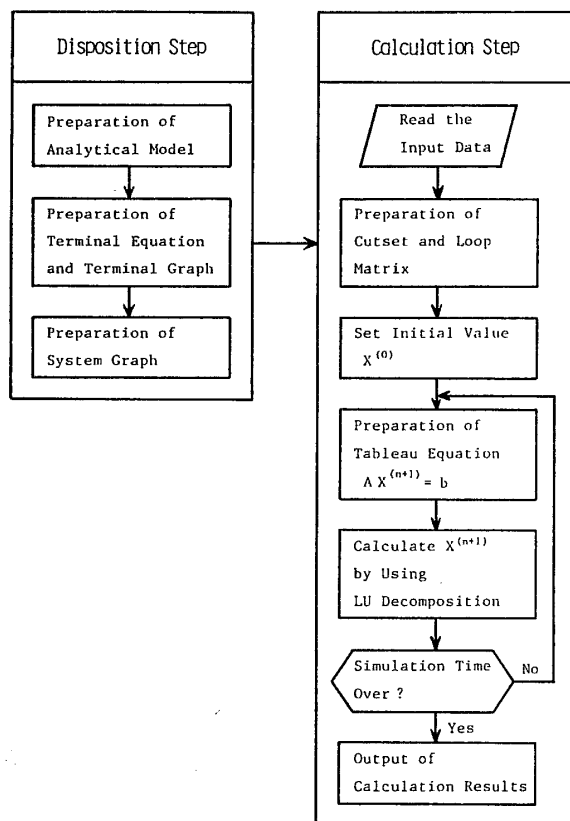


図 1 解析手法のフローチャート

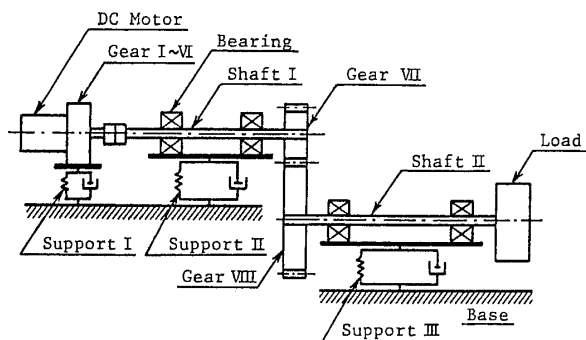


図 2 解析モデル

(i) モータ部 前報で解析した動力伝達軸系ではモータの特性を加味できなかった。そこで、本報では、モータを電気系と機械系とに分けてモデル化し対処することとした。図3(a)は解析モデルを、図3(b)はそのターミナルグラフを示したものである。ここで、それらの要素に関する特性は次式にて表されるものとする。

電気系については、

$$v = R \cdot i \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$v = L \frac{di}{dt} \quad \dots\dots\dots (2)$$

電気系-機械系の変換部については、

$$T = K_t \cdot i \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$v = K_a \cdot \omega \quad \dots\dots\dots (4)$$

機械系については、

$$T = J_M \frac{d\omega}{dt} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$T = b_M \cdot \omega \quad \dots\dots\dots (6)$$

(ii) 減速機構部 図4(a)に示した3段の平歯車減速機構部について検討する。この機構については、歯車とそれを支持する軸受について考慮することにする。歯車については、歯部の剛性をばねとダッシュポット要素に置き換えて考えた。ただし、ばね剛性は、一般的には、かみあい状況に応じて変化するが、ここでは一定として考えた。すなわち、歯車 i, j の特性方程式は、

$$J_{Gi} \frac{d^2 \omega_i}{dt^2} = \frac{dT_i}{dt} - K_{Gi}(r_i \omega_i - r_j \omega_j) r_i - C_{Gi} \left(r_i \frac{d\omega_i}{dt} - r_j \frac{d\omega_j}{dt} \right) r_i \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$J_{Gj} \frac{d^2 \omega_j}{dt^2} = -\frac{dT_j}{dt} + K_{Gj}(r_i \omega_i - r_j \omega_j) r_j + C_{Gj} \left(r_i \frac{d\omega_i}{dt} - r_j \frac{d\omega_j}{dt} \right) r_j \quad \dots\dots\dots (8)$$

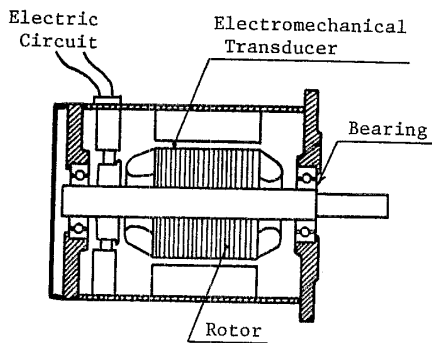
と表した。

(2) 支持台締結部 支持台については、図5に示すように、(i)軸受と支持台との締結部、(ii)支持台、(iii)支持台と本体との締結部に分けて、それぞれの剛性を考えるのが妥当であるが、ここでは解析の便宜上、それらを一括してばねとダッシュポット要素に置き換えて考えることにする。すなわち、特性方程式は、

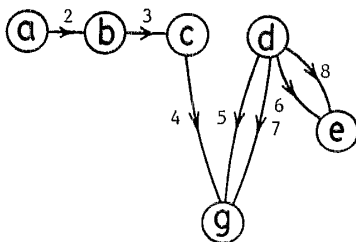
$$\frac{dT}{dt} = K_{so} \omega + C_{so} \frac{d\omega}{dt} \quad \dots\dots\dots (9)$$

とした。

(3) 軸、軸受、負荷 軸については、ねじり振動を対象としたことから、ばねとダッシュポット要素に置き換えて考えた。軸受については、粘性減衰のみを考慮した。負荷については、回転慣性のみを考慮した。すなわち、それぞれの特性方程式は、

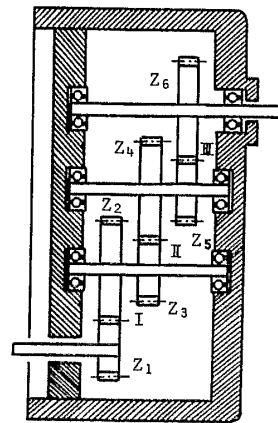


(a) 解析モデル

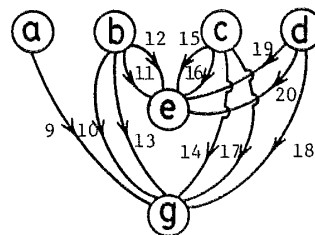


(b) ターミナルグラフ

図3 モータ部



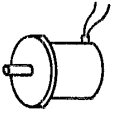
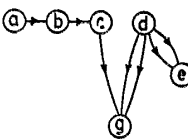
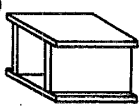
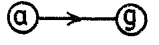
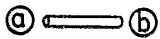
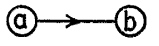

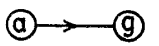
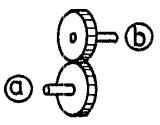
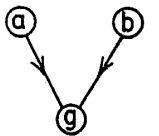
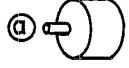
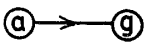
(a) 解析モデル



(b) ターミナルグラフ

図4 減速機構部

表 1 各構成要素のターミナル方程式およびターミナルグラフ

| Element | Model | Terminal Equation | Terminal Graph |
|----------|---|--|---|
| DC Motor |  | $R \dot{i}^{(n+1)} - v^{(n+1)} = 0$ $2 L \dot{i}^{(n+1)} - h v^{(n+1)} = 2 L \dot{i}^{(n)} + h v^{(n)}$ $T^{(n+1)} - K_e \dot{i}^{(n+1)} = 0 ; v^{(n+1)} - K_b \omega^{(n+1)} = 0$ $-h T^{(n+1)} + 2 J_M \omega^{(n+1)} = h T^{(n)} + 2 J_M \omega^{(n)}$ $T^{(n+1)} - b_M \omega^{(n+1)} = 0$ |  |
| Support |  | $2 T^{(n+1)} - (h K_{S0} + 2 C_{S0}) \omega^{(n+1)}$ $= 2 T^{(n)} + (h K_{S0} - 2 C_{S0}) \omega^{(n)}$ |  |
| Shaft |  | $2 T^{(n+1)} - (h K_t + 2 C_t) \omega^{(n+1)}$ $= 2 T^{(n)} + (h K_t - 2 C_t) \omega^{(n)}$ |  |
| Bearing |  | $T^{(n+1)} - b \omega^{(n+1)} = 0$ |  |
| Gear |  | $2 h T_i^{(n+1)} - \{2 J_i + h r_i^2 (h K_{\alpha ij} + 2 C_{\alpha ij})\} \omega_i^{(n+1)}$ $+ h r_i r_j (h K_{\alpha ij} + 2 C_{\alpha ij}) \omega_j^{(n+1)}$ $= 2 h T_i^{(n)} + \{-4 J_i + h r_i^2 (h K_{\alpha ij} - 2 C_{\alpha ij})\} \omega_i^{(n)}$ $- h r_i r_j (h K_{\alpha ij} - 2 C_{\alpha ij}) \omega_j^{(n)} + 2 J_i \omega_i^{(n-1)}$ |  |
| Load |  | $-h T^{(n+1)} + 2 J_L \omega^{(n+1)} = h T^{(n)} + 2 J_L \omega^{(n)}$ |  |

$$\frac{dT}{dt} = K_t \omega + C_t \frac{d\omega}{dt} \dots\dots\dots (10)$$

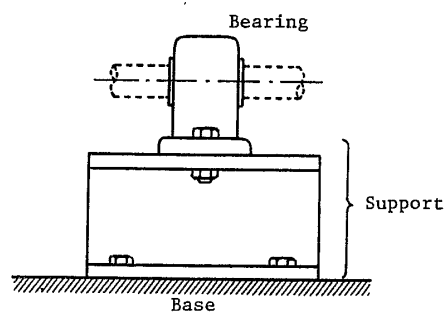
$$T = b \cdot \omega \dots\dots\dots (11)$$

$$T = J_L \frac{d\omega}{dt} \dots\dots\dots (12)$$

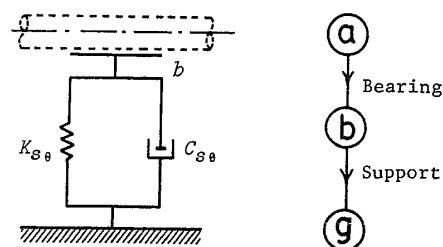
とした。

以上の特性方程式(1)～(12)を離散化して、それぞれのターミナル方程式を作成する。表1は、各構成要素のターミナル方程式およびターミナルグラフをまとめて示したものである。

2・4 タブロー方程式 システムグラフは、図3(b)、図4(b)および表1で示した各構成要素のターミナルグラフおよびそれらの接続状況により求められる。図6は、本解析モデルをシステムグラフ表示したものである。このグラフの作成に際しては、構成要素の増減があっても柔軟に対処でき、しかも、グラフという形で抽象化することにより、複雑な機構に対しても、数学的な取扱いが容易となる。このシステムグラフの枝を木および補木に分け、それによりカットセット行列およびループ行列を求める。次式は、カットセ



(a) 解析モデル



(b) モデルおよびターミナルグラフ

図 5 支持台締結部

ット行列およびループ行列を示したものである。

$$D=[I : D_L] \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

$$B=[B_T : I] \quad \cdots \cdots \cdots (14)$$

ここで、

$$B_T = -D_L^T \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

これらの式は、構成要素の接続状況を入力することにより容易に求めることができる。

以上のターミナル方程式、カットセット行列およびループ行列より、タブロー方程式を求める。次式は、本解析モデルに対するタブロー方程式である。

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & B \\ F_T & F_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ H \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

式の上半分はカットセット方程式とループ方程式を並べたものであり、下半分は各構成要素のターミナル方程式を並べたものである。このタブロー方程式は、枝の接続状況などを入力すれば一定のアルゴリズムに従って計算機内部で作成することができる。そのため、ルンゲ・クッタ法での解析のように、構成要素の増減に従って構成方程式を全面的に作成し直すような面倒さはない。なお、このタブロー方程式はクラウト法を用いて数値解析した。

3. 解 析 結 果

位置決め精度上の最大の課題である軸系の振動に対して、各種要因がいかなる影響を与えるか検討した。

表 2 解析モデルの諸元

| ELEMENT (Element Number) | SYMBOL | VALUE | ELEMENT (Element Number) | SYMBOL | VALUE |
|-------------------------------|-----------|---------------------------------------|--|-----------|--------------------------------------|
| DC Motor (1~8) | E | Fig.7,9 | Shaft I (23) | K_{G34} | $1.244 \times 10^7 \text{ N/m}$ |
| | L | $1.60 \times 10^{-3} \text{ H}$ | | K_{G56} | $1.723 \times 10^7 \text{ N/m}$ |
| | R | 1.25Ω | | C_{G12} | $1.0 \times 10^3 \text{ Ns/m}$ |
| | K_t | $3.432 \times 10^{-2} \text{ Nm/A}$ | | C_{G34} | $1.0 \times 10^3 \text{ Ns/m}$ |
| | K_b | $3.419 \times 10^{-2} \text{ Vs/rad}$ | | C_{G56} | $1.0 \times 10^3 \text{ Ns/m}$ |
| | J_M | $3.083 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$ | | K_1 | $1.263 \times 10^4 \text{ Nm/rad}$ |
| | b_M | $1.0 \times 10^{-2} \text{ Nms/rad}$ | | C_1 | $1.0 \times 10^{-2} \text{ Nms/rad}$ |
| | J_{G1} | $2.877 \times 10^{-10} \text{ kgm}^2$ | Bearing (22,24,28,30) Support (21,25,31) | b | $1.0 \times 10^{-2} \text{ Nms/rad}$ |
| Gear Transmission I (9~20) | J_{G2} | $1.438 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2$ | | K_{S0} | $1.0 \times 10^5 \text{ Nm/rad}$ |
| | J_{G3} | $1.590 \times 10^{-8} \text{ kgm}^2$ | | C_{S0} | $1.0 \times 10^{-2} \text{ Nms/rad}$ |
| | J_{G4} | $1.624 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2$ | Gear Transmission II (26,27) | J_{G7} | $1.171 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$ |
| | J_{G5} | $1.091 \times 10^{-8} \text{ kgm}^2$ | | J_{G8} | $3.306 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$ |
| | J_{G6} | $3.486 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2$ | | r_7 | $4.229 \times 10^{-2} \text{ m}$ |
| | r_1 | $2.443 \times 10^{-3} \text{ m}$ | | r_8 | $5.638 \times 10^{-2} \text{ m}$ |
| | r_2 | $1.222 \times 10^{-2} \text{ m}$ | | K_{G78} | $7.111 \times 10^7 \text{ N/m}$ |
| | r_3 | $6.766 \times 10^{-3} \text{ m}$ | | C_{G78} | $1.0 \times 10^3 \text{ Ns/m}$ |
| | r_4 | $1.353 \times 10^{-2} \text{ m}$ | Shaft II (29) | K_2 | $1.0 \times 10^2 \text{ Nm/rad}$ |
| | r_5 | $5.920 \times 10^{-3} \text{ m}$ | | C_2 | $1.0 \times 10^{-2} \text{ Nms/rad}$ |
| | r_6 | $1.480 \times 10^{-2} \text{ m}$ | | J_L | 0.002 kgm^2 |
| | K_{G12} | $1.546 \times 10^7 \text{ N/m}$ | | | |
| | | | Load (32) | | |

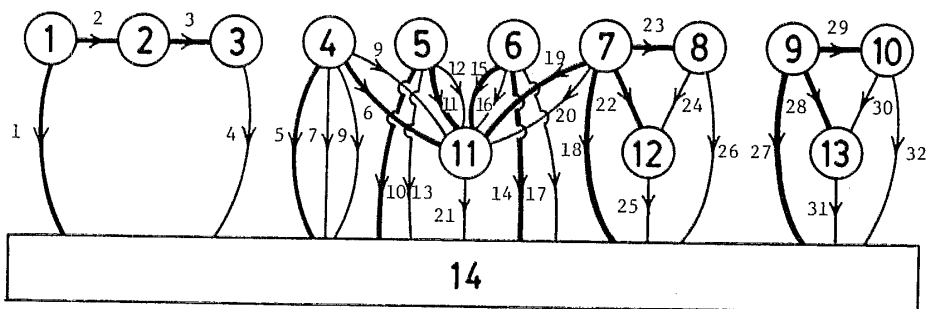


図 6 解析モデルのシステムグラフ

本解析モデルの諸元は表 2 に示したとおりである。

3・1 軸 II の剛性の差異による影響 図 8 (a) は、DC モータの入力電圧を図 7 に示すようにパルス状に与えた場合の負荷の動的挙動の一例を示したものである。この図は、軸 II の剛性を比較的大きくとした場合

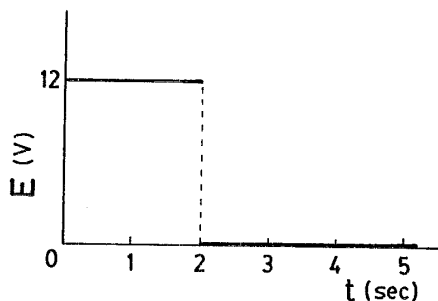
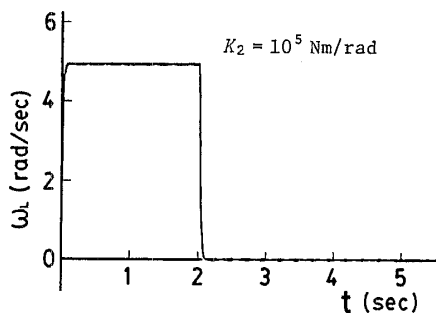
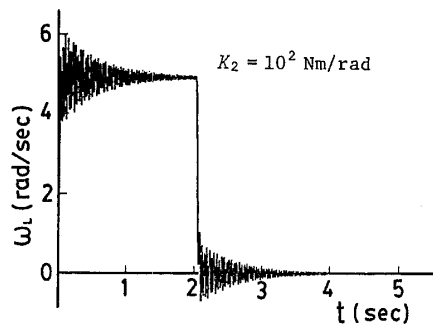


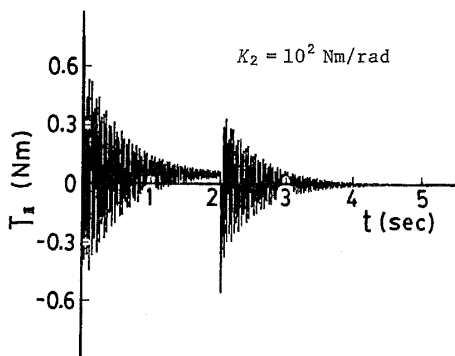
図 7 入力電圧 I



(a)



(b)



(c)

図 8 軸 II の剛性の差異による影響

($K_2=10^5 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$) である。始動時および停止時に振動はあまり生じていないものの、停止後も極めて小さな残留振動が生じていることがわかる。

図 8 (b) は、軸 II の剛性を比較的低く ($K_2=10^2 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$) した場合である。この場合には、始動時および停止時に軸のねじり剛性の影響による振動がかなり生じており、位置決め精度を要する機構に対しては、このような軸は使用できないことがわかる。

また、図 8 (c) は、軸 II の剛性が $K_2=10^2 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$ のときの軸 II にかかるトルクを示したものである。始動時および停止時には、かなりのトルクが作用する。それゆえ、軸に切欠き部を有するような場合には留意する必要性のあることがわかる。

3・2 入力電圧の差異による影響 図 7 のような入力電圧では、軸 II の剛性を $K_2=10^2 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$ の場

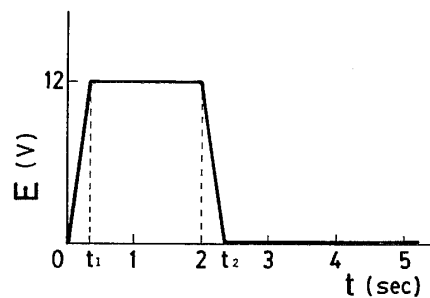
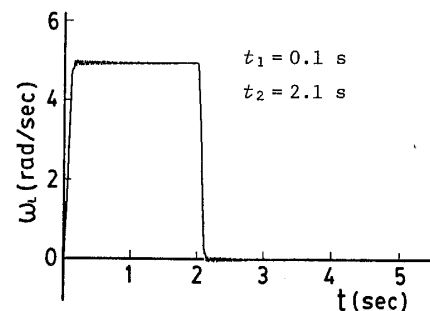
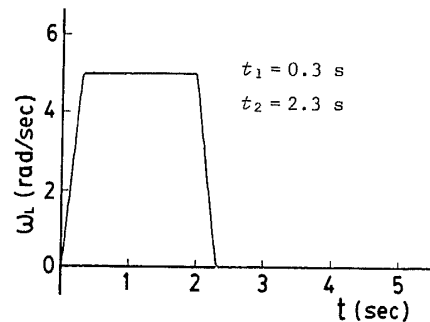


図 9 入力電圧 II



(a)



(b)

図 10 入力電圧の差異による影響

合のように低くすると、始動時および停止時にかなりの振動を生じたが、たとえば、図9のように、入力電圧を緩やかに増減させると、負荷の動的挙動もそれに伴ってかなり変化する。図10(a), (b)は、図中に示す諸元をもとに解析した結果を示したものであり、図8に比較して振動が小さくなっていることがわかる。

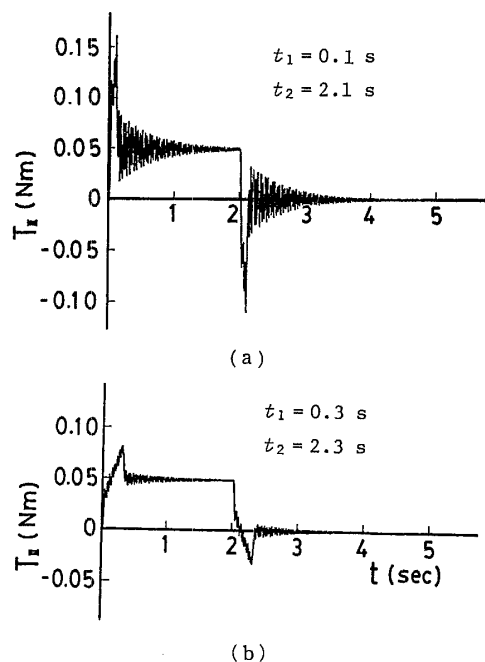


図 11 入力電圧の差異による影響

それゆえ、このような電圧の入力方法にすれば、軸の剛性がたとえ低い場合でも、比較的精度のよい位置決めが確保できる。このように、入力電圧を変化させただけでも、かなりの制振効果のあることがわかる。

同様に、図11(a), (b)は、軸IIにかかるトルクの解析結果の一例を示したものである。このように、軸トルクについても、図8(c)に比べて変動が小さくなっている。

振動を極力抑える電圧印加方法は現代制御理論によっても求めうるが、本手法によっても媒介変数を変化させ視覚的に最適な電圧入力法を導くことができる。

3・3 負荷の差異による負荷の動的挙動 図12(a)は、負荷の慣性モーメントを図8(b)に比較して大きく($J_L=0.02 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$)した場合の負荷の動的挙動を示したものである。ただし、入力電圧は、図7に従った。図12(a)において、始動時および停止時において残留振動を生じるものの、慣性モーメントがより小さい場合($J_L=0.002 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$)に比較して、早くに減衰してしまう。次に、慣性モーメントを大きく($J_L=0.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$)した場合には、図12(b)のように、残留振動をほとんど生じないものの始動時あるいは停止時に時間的な遅れを生じ、結果として、位置決めに遅れを生じってしまうこととなる。

また、これらの場合の軸Iにかかる軸トルクをそれぞれ図13(a), (b)に示す。ともに、始動時および停止時に軸に過大なトルクがかかることになるので、軸

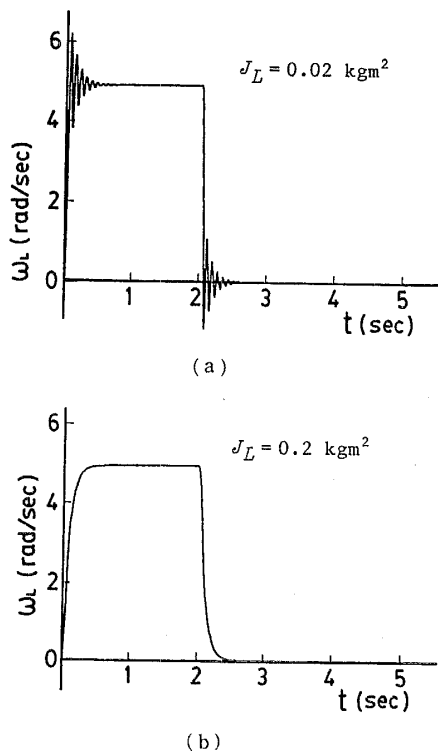


図 12 負荷の差異による負荷の動的挙動

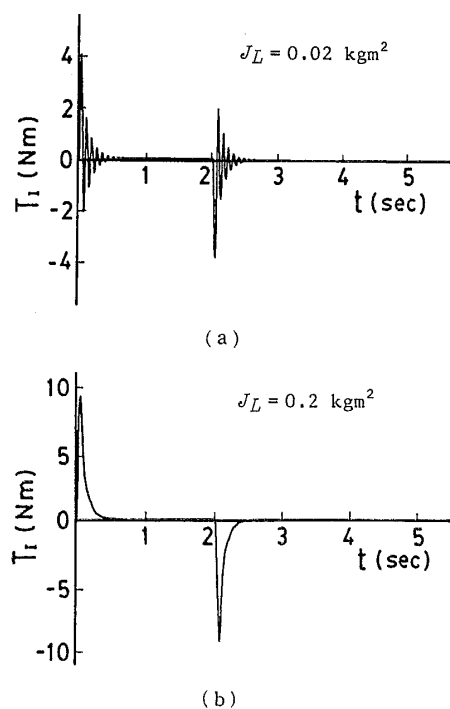


図 13 負荷の差異による負荷の動的挙動

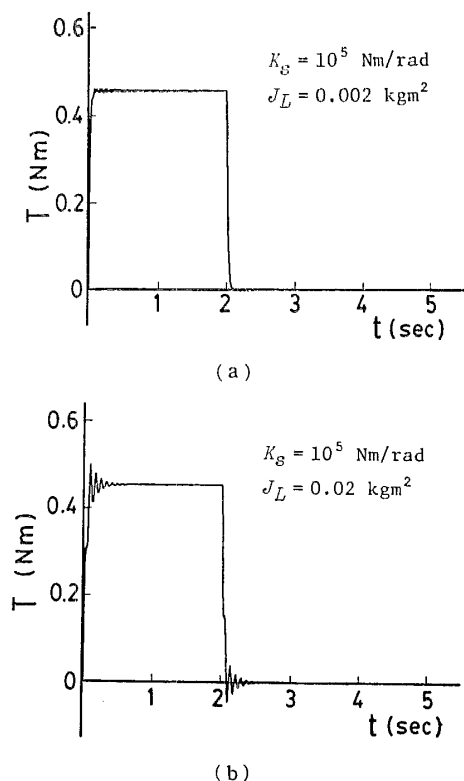


図 14 支持台に作用するトルク

の強度については十分な検討を必要とすることがわかる。

3・4 支持部に作用するトルク 支持台および締結部の剛性まで考慮に入れたシステム全体の解析については従来的な方法では極めて難しいが、本手法では、容易にその部分によるシステム全体の振動への影響度を把握できる。

図 14(a)は、支持台 I に作用するトルクの解析結果の一例を示したものである。このように、支持台に作用するトルクを的確に把握することにより、支持台および支持台との締結部の強度設計に役立てることができ。また、図 14(b)は、負荷の慣性モーメントの差異 ($J_L=0.02$ kg·m²) による支持台 I に作用するトル

クを示したものである。負荷の大きさによっては始動時および停止時に、多少のトルク変動が生じており、設計においては、締結部の強度などを検討する際の有効な資料を提供しうる。

4. ま と め

(1) 本報では、ロボット主軸系の振動に対して構成要素が及ぼす影響度合をグラフ理論を利用し解析した。その結果、従来の手法では把握し難かったモータの入力電圧の差異による影響、支持部の剛性あるいは負荷の差異による影響などを定量的に解析しえた。

(2) エレクトロニクス技術の導入により、機械の高精度、高性能あるいは軽量化が図られてきている。そのため、構成要素の剛性あるいは空間的な配置などに制約を受ける場合も生じてきている。そこで、系全体の最適設計を行うために、全構成要素の特性を考慮した解析が必要となってきた。このような、機械装置全体のシステムに対しての解析には、本報で述べたグラフ理論を適用すれば、構成要素の追加あるいは削除などの設計変更に対しても柔軟に対処でき、さらに、各構成要素の動的挙動を容易に把握でき、たとえば、モータの容量の検討、軸トルクによる軸の寸法決定などが容易に行えるので、設計の効率化につながる。

文 献

- (1) 綿貫・大滝・石川・矢野, 機論, 53-486, C (昭 62), 494.
- (2) 矢野・矢田, 機論, 50-454, C (昭 59), 1063.
- (3) 明山・歌川, 歯車の設計, (昭 44), 39, オーム社.
- (4) Chua, L. O. and Lin, P. M., *Computer-Aided Analysis of Electronics Circuit: Algorithms & Computational Techniques*, (1975), 131, Prentice-Hall.
- (5) Koenig, H. E. and Blackwell, W. A., *Electro-mechanical System Theory*, (1972), 11, McGraw-Hill.
- (6) Hachtel, G. D., ほか 2 名, *IEEE Trans.*, CT-18-1 (1971), 101.