

## 複数回転機械の危険速度通過振動\*

長嶺拓夫<sup>\*1</sup>, 佐藤勇一<sup>\*2</sup>, 河瀬紘介<sup>\*3</sup>Vibration Induced by Unbalanced Rigid Rotors  
Running Through a Critical SpeedTakuo NAGAMINE<sup>\*4</sup>, Yuichi SATO and Kouke KAWASE<sup>\*4</sup> Department of Mechanical Engineering, Saitama University,  
255 Shimo-Okubo, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

Vibration characteristics of a structure on which unbalanced rigid rotors are operated are investigated experimentally and analytically. Rotor speeds cannot exceed a critical speed when drive power to each rotor is not enough. Further running speeds of rotors are entrained into a single speed just below the critical speed and phases of rotor unbalance are locked so as to excite the structure violently. On the other hand, two or three rotors operated by sufficient power supplies can run above the critical speed and unbalance forces cancel each other, that is, vibration is very small. When four rotors are operated with enough power supplies, the phases of rotor unbalance are not locked for speeds above a critical speed.

**Key Words:** Rotating Machinery, Passing Through Critical Speed, Unbalance, Limited Power Supply, Transient Vibration, Synchronization

## 1. はじめに

回転機械の高速化に伴い危険速度の通過が問題となり, F.M. Lewis<sup>(1)</sup>, 下山ら<sup>(2)</sup>, 山田ら<sup>(3)</sup>, 矢鍋ら<sup>(4)~(8)</sup>, 松浦<sup>(9)~(12)</sup>, 石田ら<sup>(13)</sup>により弾性ロータの危険速度通過に関する研究が行われ, 運動特性について多くのことが明らかにされている. 川井ら<sup>(14) (15)</sup>は非対称な回転軸が有限の駆動力をもつ場合について, 危険速度を通過する際のエネルギー源とロータの相互作用について明らかにしている. 太田ら<sup>(16)</sup>は偏平軸の中央に円板を取付けた回転軸系を用いて, 一定角加速度で通過するときの過渡振動を実験的に明らかにしている.

A. Dornig<sup>(17)</sup>, F. Ellyin ら<sup>(18)</sup>, M. F. Dimentberg ら<sup>(19)</sup>は支持系と剛性ロータからなる系の危険速度通過時の過渡振動について明らかにしている.

長屋ら<sup>(20) (21)</sup>, 山川ら<sup>(22)</sup>, 野波ら<sup>(23)</sup>は危険速度通過方法について報告を行っている. これらの多くの研究はロータ 1 台を対象としている. このため, 複数のロータが危険速度通過する場合については明らかでない.

系に非線形性がある場合には, さらにさまざまな現象が現れる. その一つとして, 不釣り合いの大きい遠心分離機などでは, 運転状況により複数の回転機械の回転数が一致し大きな振動が起る同期現象がある.

I.I. Blekhman<sup>(24) (25)</sup>, 井上ら<sup>(26) ~ (28)</sup>, M. Paz ら<sup>(29)</sup>は回転機械の同期化について研究を行い, その同期条件や特性を明らかにしている. これらの一連の研究は, 振動利用の目的で研究されているため, 定常振動について平均法などで同期条件を明らかにしているが, 過渡振動については検討されていない.

著者らは回転機械と支持系が連成することにより大きな振動が起ることを防止する目的で研究を行っている. 本論文では, 剛性ロータが支持系の危険速度通過時の相互作用について検討を行い, 振動が大きくなる条件および危険速度近傍におけるロータの挙動について明らかにしたので報告する.

\* 原稿受付 2004 年 12 月 24 日.

<sup>\*1</sup> 正員, 埼玉大学工学部 (〒338-8570 さいたま市桜区下大久保 255).<sup>\*2</sup> 正員, フェロー, 埼玉大学工学部.<sup>\*3</sup> 学生員, 埼玉大学大学院理工学研究科.

E-mail: nagamine@mech.saitama-u.ac.jp

## 2. 主な記号

$M$ :系(ロータの偏心質量を除く)の全質量

$m_i e_i$ :ロータ  $i$  に付加された不釣り合い量( $i=1\sim 4$ )

$J_i$ :ロータ  $i$  の極慣性モーメント( $i=1\sim 4$ )

$m_i$ :ロータ  $i$  の偏心質量( $i=1\sim 4$ )

$n_{i0} = \omega_i / \omega_p$ :ロータ  $i$  の設定回転速度(台固定)

$n_{i1} = \omega_i / \omega_p$ :ロータ  $i$  の回転速度(台振動可能)

$T_i = Trq / (\Omega_{i0}^2 m_i e_i g)$ :無次元トルク

$Trq$ :モータ駆動トルク

$x$ :台の変位  $X = x / e_0$

$\Omega_{i0} = \omega_{ni} / \omega_p$

$\Omega_{i1} = \omega_{ni} / \sqrt{g / e_0}$

$\Omega_{i2} = \left( M + \sum_{i=1}^n m_i \right) e_0^2 / (m_i e^2 + J_i)$

$\phi$ :ロータの角変位

$\gamma_i = \frac{m_i}{M + \sum_{i=1}^n m_i}$

$\eta_i = e_i / e_0$ , ( $e_0 = 0.024 \text{ m}$ )

$\theta$ :ロータ間の位相差

$\zeta_i$ :ロータ  $i$  の減衰比

$\zeta_p$ :台の減衰比

$\tau$ :無次元時間( $\tau = \omega_p t$ )

$\omega_i$ :ロータの回転角速度

$\omega_p$ :系の固有角振動数( $= 5.05 \times 2\pi \text{ rad/s}$ )

$\omega_{ni} = \sqrt{m_i e_i g / (J_i + m_i e_i^2)}$

## 3. 実験

**3・1 実験装置** 図1は実験装置の概略を示したものである。4 台のロータの回転軸は平行であり、支持系の振動方向に直角に配置している。支持系はベースプレート(以後台と呼ぶ)を4枚の板ばねで支持し、 $x$ 方向にのみ振動できる。ロータを配置した系の固有振動数は5.05 Hzである。ロータは外径60 mmで中心から24 mmの位置に約19 gの不釣り合い重りを取付けている。ロータはそれぞれ独立の電源を用いて駆動し、電圧によって回転速度を設定することができる。

**3・2 実験方法** はじめに台を固定した状態で、一定電圧を加え、ロータの回転速度を計測する。実験結果をまとめる上で、ロータのトルク特性は図2に示

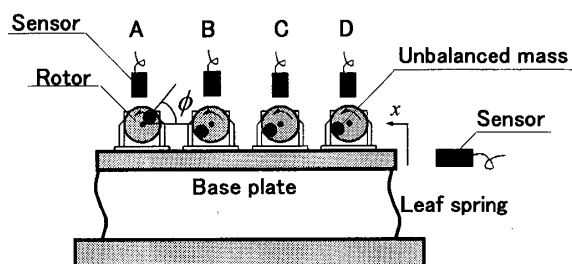


Fig.1 Experimental apparatus

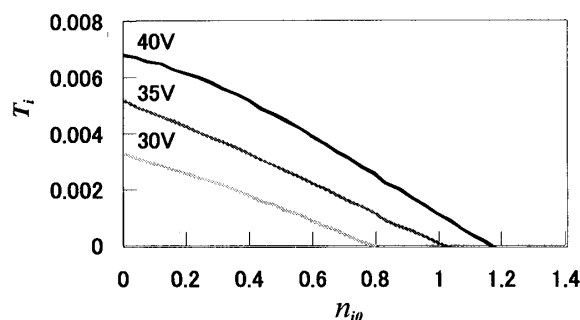


Fig.2 Measured torque-speed characteristics

すとおりであり、図にはロータAの駆動トルクの計測値を無次元量で示してある。各ロータのトルク特性はほぼ同じであり、回転速度が増加するに従い直線的にトルクは減少する。実験では、電圧に対し回転速度が一定値 $n_{i0}$ (以後、設定回転速度と呼ぶ)になるのを確認してから実験を行った。

ロータの回転速度は支持系の振動により影響を受ける。固定している台上のロータは、電圧に対して回転速度は一つに定まる。しかし、台が振動する場合、回転速度が台の危険速度に近いと負荷が大きく増加するため、回転速度は設定回転速度 $n_{i0}$ よりも低くなる。そこで、ロータの運転条件を電圧ではなく設定回転速度で表した方が危険速度との関係がわかりやすいと考え、以下では設定回転速度を用いて運転条件を表すことにする。また、台が振動する状態でのロータの回転速度を添字“1”をつけて $n_{i1}$ で表すことにする。当然であるが、各ロータの電圧は実験の間一定に保持し、台が振動する状態で、ロータの回転速度と台の振動を計測した。

本研究では、ロータの設定回転速度を台の危険速度を含む $4.6 \sim 6.0 \times 2\pi \text{ rad/s}$ の範囲(設定回転速度 $n_{i0} = 0.9 \sim 1.2$ )で実験を行った。

## 4. 解析

**4・1 運動方程式** 本実験の回転軸は十分に硬く、

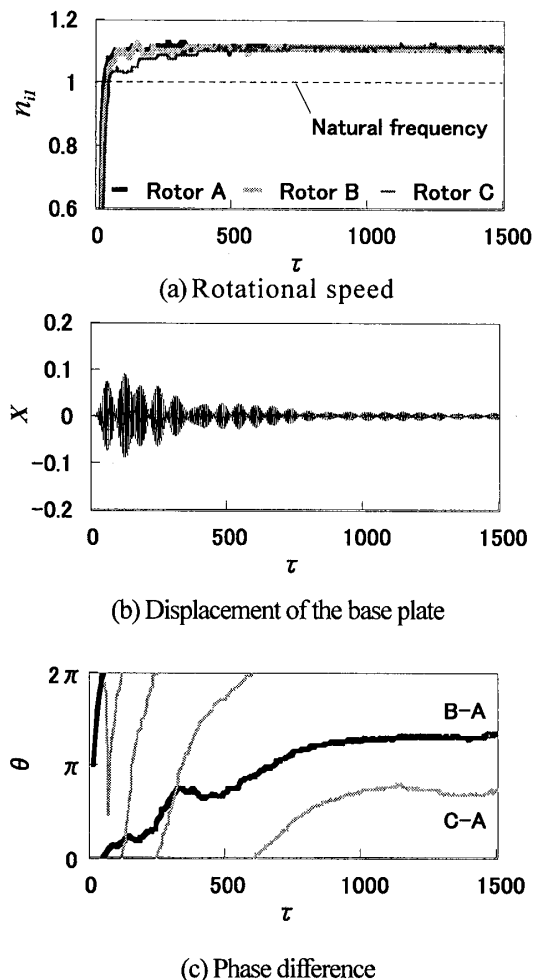


Fig.3 The rotors are passing through the critical speed  
(Experimental result: out-of-phase synchronization  
 $n_{A0} = 1.117, n_{B0} = 1.118, n_{C0} = 1.116$ )

また、剛な軸受けで支持されている剛性ロータとして取り扱い、台の鉛直方向の振動は小さく無視できるものとし  $x$  方向のみに振動するものとする、ロータおよび台の無次元化した運動方程式は以下になる。

$$\begin{aligned} \text{台: } & \frac{d^2 X}{d\tau^2} + 2\zeta_p \frac{dX}{d\tau} + X \\ & - \sum_{i=1}^4 \gamma_i \eta_i \left\{ \left( \frac{d\phi_i}{d\tau} \right)^2 \cos \phi_i + \frac{d^2 \phi_i}{d\tau^2} \sin \phi_i \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{ロータ: } & \frac{d^2 \phi_i}{d\tau^2} + 2\zeta_i \Omega_{i0} \frac{d\phi_i}{d\tau} + \Omega_{i0}^2 \cos \phi_i \\ & = \Omega_{i1}^2 \frac{d^2 X}{d\tau^2} \sin \phi_i + T_i \quad (i=1,2,3,4) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、式(2)の  $T_i$  は図2に示す計測したトルクの値を用いた。解析は数値積分により時刻歴応答を調べた。

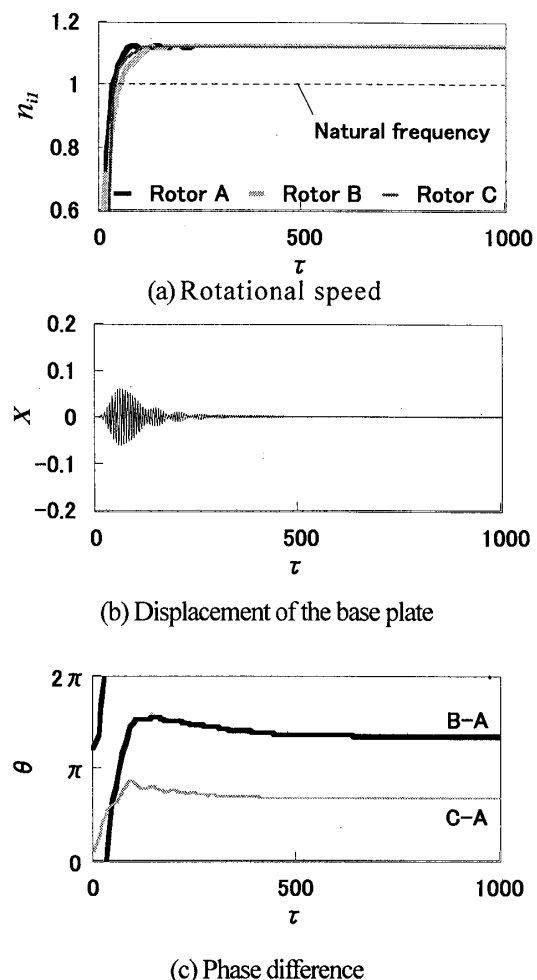


Fig.4 The rotors are passing through the critical speed  
(Calculated result: out-of-phase synchronization  
 $n_{A0} = 1.119, n_{B0} = 1.119, n_{C0} = 1.119$ )

実験との比較を行うにあたり、諸量は実測値を用いた。それらを無次元量で示すと以下のとおりであり、値の幅は各ロータの偏心質量と極慣性モーメントによるものである。

$$\begin{aligned} \zeta_i &= 0.0043, \zeta_p = 0.0178, \Omega_{i0} = 0.124 \sim 0.125 \\ \Omega_{i1} &= 0.198 \sim 0.199, \Omega_{i2} = 15.43 \sim 15.46, \\ \gamma_i &= 0.00244 \sim 0.00245, \eta_i = 0.964, \quad (i=1,2,3,4) \end{aligned}$$

## 5. 結果および考察

**5・1 系の過渡振動** 危険速度を通過した実験結果を図3に示す。設定回転速度が  $5.6 \sim 5.7 \times 2\pi$  rad/s の場合 ( $n_{A0} = 1.117, n_{B0} = 1.118, n_{C0} = 1.116$ )、3台のロータをほぼ同時に起動した。図3(a)はロータの無次元回転速度を無次元時間に対して示したものである。各ロータは速やかに系の危険速度  $n_{11}/\omega_p = 1$  を通過した。このときの台の時間変位を図3(b)に示してい

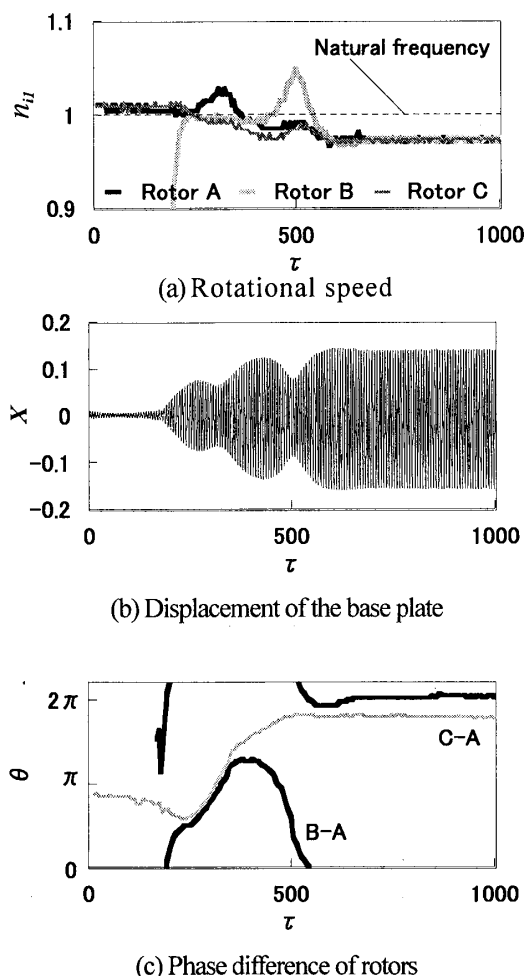


Fig.5 Rotational speeds of rotors are entrained into critical speed (Experimental result: in-phase synchronization  $n_{A0} = 1.011$ ,  $n_{B0} = 1.027$ ,  $n_{C0} = 1.011$ )

る。3 台のロータが危険速度を通過した後で台の振幅は最大となる。ロータ 1 台の危険速度通過時の過渡振動<sup>20)</sup>と同じである。振幅が最大となった後、系の自由振動成分は徐々に減衰する。このとき、うなりのような波形が不均一なのは、ロータ間の位相差が一定でないためであると考えられる。

図 3(c)はロータ間の位相差を示したものであり、位相差はロータ A を基準とし、ロータ A と各ロータの角度差を用いている。自由振動成分が減衰するに従い、位相差が一定値となることがわかる。十分に時間が経過したときの位相差は  $360^\circ$  を 3 等分した  $120^\circ$  に近い値となった。このように回転数が一致し、互いの不釣り合いを打ち消し合う位相となる場合を、ここでは逆位相同期と呼ぶことにする。

図 4 は、設定回転速度が  $n_{A0} = 1.119$ ,  $n_{B0} = 1.119$ ,  $n_{C0} = 1.119$  でロータを回転させた場合の数値計算結果である。実験結果と同じように危険速度を通過し、台

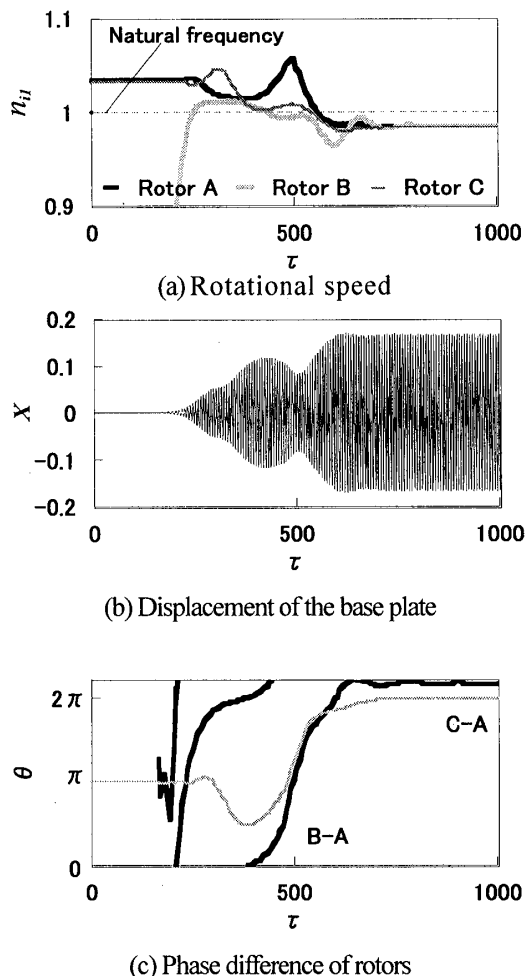


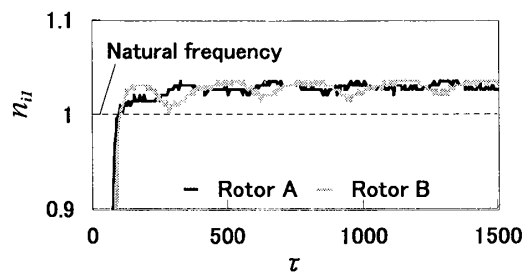
Fig.6 Rotational speeds of rotors are entrained into critical speed (Calculated result: in-phase synchronization  $n_{A0} = 1.034$ ,  $n_{B0} = 1.04$ ,  $n_{C0} = 1.034$ )

の振幅が小さくなるのに伴い、ロータ間の位相差はほぼ  $120^\circ$  になった。

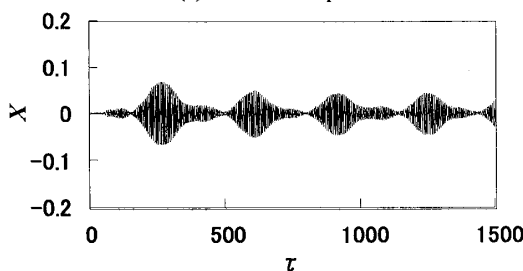
図 5 は危険速度を通過できずに振動が大きくなった実験結果を示したものである。各ロータの設定回転速度は  $n_{A0} = 1.011$ ,  $n_{B0} = 1.027$ ,  $n_{C0} = 1.011$  である。はじめに起動したロータ A と C は危険速度を通過している。2 台のロータの場合、危険速度を通過した後の位相差は  $360^\circ$  をほぼ 2 等分した  $180^\circ$  となる<sup>20)</sup>。

ロータ B を起動させると台の振動は徐々に大きくなり、3 台のロータの回転速度が危険速度以下になった。十分に時間が経過したとき、3 台のロータの位相がそろい台は大きく振動している。

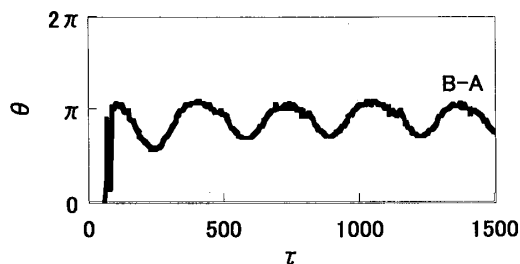
図 6 は数値計算結果を示したものである。図 5 と同じように 2 台のロータは危険速度以上で回転しているが、3 台めのロータの起動により、台の振幅が増加し全てのロータの回転速度が危険速度以下になった。実験結果と同じようにロータの位相がそろい台は大きく



(a) Rotational speed



(b) Displacement of the base plate



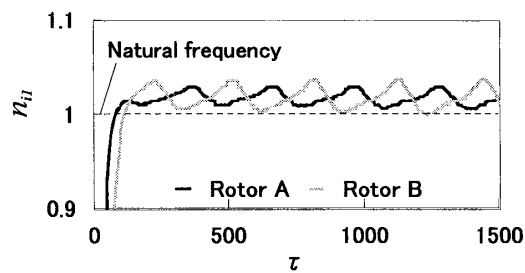
(c) Phase difference of rotors

Fig.7 Experimental result: quasi-synchronization  
( $n_{A0} = 1.03$ ,  $n_{B0} = 1.018$ )

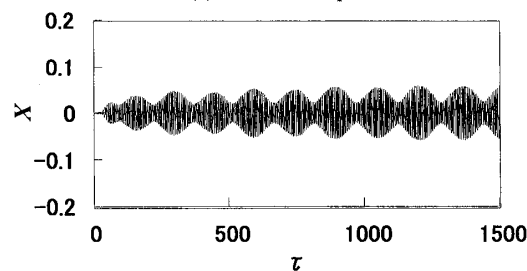
振動している。このように、危険速度を通過しない場合、ロータの不釣り合いがそろい、台は大きく振動する。ここではこれを同位相同期と呼ぶことにする。

次に危険速度は通過したが、通過後の回転速度が危険速度に近い場合に現れた特徴的な振動を示す。

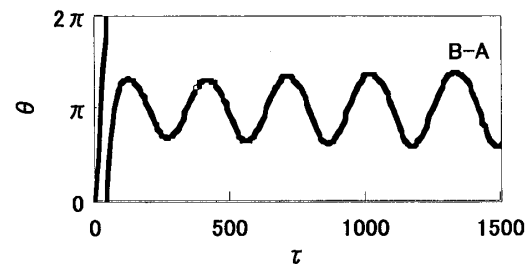
図7, 8は実験と数値計算の結果を無次元時間に対して示したものである。この場合、台はうなりに似た振動をしている。ロータの平均回転速度は危険速度以上であり、2台の回転速度は対となり、一方の回転速度が高くなるともう一方の回転速度が低くなることを繰り返した。ロータ間の位相差は  $180^\circ$  近くで大きく変動するが位相差が  $360^\circ$  以上となることはない。すなわち、相手を追い越すことはなく平均回転速度は同じである。このように平均回転速度は同じだが、位相差が変動することから、ここではこれを準同期と呼ぶことにする。この振動に外乱が加わると同位相同期が起り、さらに大きく振動する場合がある。



(a) Rotational speed



(b) Displacement of the base plate



(c) Phase difference of rotors

Fig.8 Calculated result: quasi-synchronization  
( $n_{A0} = 1.021$ ,  $n_{B0} = 1.026$ )

5・2 系の振幅 図9は2台の同期が起ったときの振動様式をロータの設定回転速度に対してまとめたものである。設定回転速度が低い範囲において同期が起ると同位相同期となり、設定回転速度が危険速度に近い範囲においては同期範囲が広がることになる。それらより高い速度範囲では逆位相同期となる。また、同位相同期と逆位相同期の境界付近において準同期が起る。図中で無印の領域は同期が起らず台はうなりのような振動をする。

図10(a)はロータ2台の場合の台の振幅をロータAとBの設定回転速度に対して示したものである。危険速度より高い設定回転速度で大きな振動が起る。図10(b)は4台が回転している場合( $n_{C0} = n_{D0} = 1.05$ )の結果を示したものである。図10(a)と比べると、台の振動が大きくなる範囲が広くなり、さらに、非常に大きい振動が起る場合があることがわかる。

実験に用いたロータBのトルク特性はAより回転

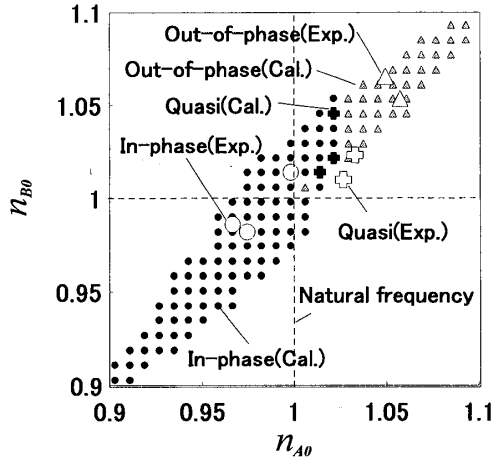
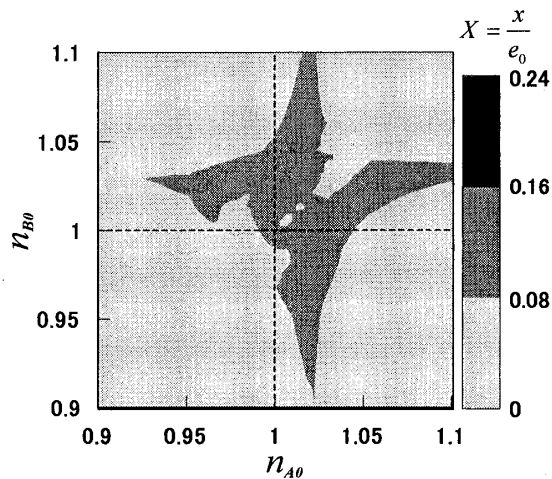
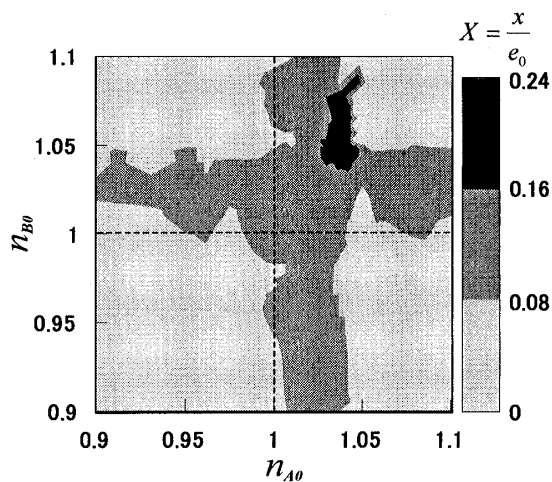


Fig.9 Types of synchronization versus  $n_{i0}$  (Two rotors)



(a) Two rotors



(b) Four rotors ( $n_{C0} = n_{D0} = 1.05$ )

Fig.10 Amplitudes of the base plate versus  $n_{i0}$

速度に対する傾きが小さいため、設定回速度に対するトルクの変化がAよりも小さい。このため、振動の大

きな範囲が  $n_{B0} = n_{A0}$  の直線上からB側に伸びていると考えられる。

**5.3 駆動トルクと負荷トルク** 図11は式(1), (2)についてシューティング法<sup>(31)</sup>を用いて数値計算を行い、同位相同期と逆位相同期の場合の定常周期解を求め、その安定判別を行っている。計算はロータAの値を用いて行った。ロータは同じものとしていることから、もっとも同期しやすく、大きな振動が起る条件を安全側で求めることができる。

式(1), (2)について平均法<sup>(27) (32)</sup>を用いて危険速度近傍における駆動トルクと振動による負荷トルクの近似式を求めると以下のように表せる。

$$N(T_i - 2\zeta_i \omega_i \Omega_{i0}) - \frac{(N \gamma_i \eta_i \omega_i^2)^2 \zeta_p \Omega_{i2}}{4\{(1 - \omega_i^2) + \zeta_p^2\}} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $N$ はロータの台数、左辺の第1項が駆動トルク、第2項が負荷トルクである。式(3)から回転角速度  $\omega$  を求めることができる。

図11(a)はロータ1台の駆動トルクと負荷トルクを示している。本実験に用いたロータAの駆動トルクは負荷トルクに比べ勾配が大きいため、駆動トルクと負荷トルクの交点は1点となり不安定な回転速度領域は現れない。設定回転速度  $n_{A0} = 1.048$  の場合(駆動電圧 36.5 V)、駆動トルク  $L_1$  と負荷トルク  $R_1$  の交点  $P_1$  でロータは回転する。

図11(b)はロータ2台の場合であり、設定回転速度は図11(a)と同じである。太線  $R_{21}$  は同位相同期のときの負荷トルクを示している。ロータの回転速度が危険速度以下の場合には同位相同期が安定となる。危険速度以上では同位相同期は不安定となり、逆位相同期が安定となり負荷トルクは非常に小さくなる。このときの負荷トルクを太線  $R_{22}$  で表している。2台の設定回転速度に対応する駆動トルクは  $L_2$  で表している。ロータが同期していることから、駆動トルクの合計は2倍となる。この駆動トルクと負荷トルクの交点が運転点となり  $P_2$  となる。この設定回転速度のとき、ロータ2台は危険速度を通過することができ、通過後はロータ間の位相差は  $180^\circ$  となるため、1台の場合よりも振幅は小さくなる。

図11(c)はロータ3台を回転させた結果を示したものであり、太線  $R_{31}$  は負荷トルク、 $L_3$  は駆動トルクを示している。駆動トルクと負荷トルクの交点は  $P_{31}$ ,  $P_{32}$  の2点となる。これは1台のみでは準定常に回転速度を上げて危険速度を通過できるが、3台のとき準定

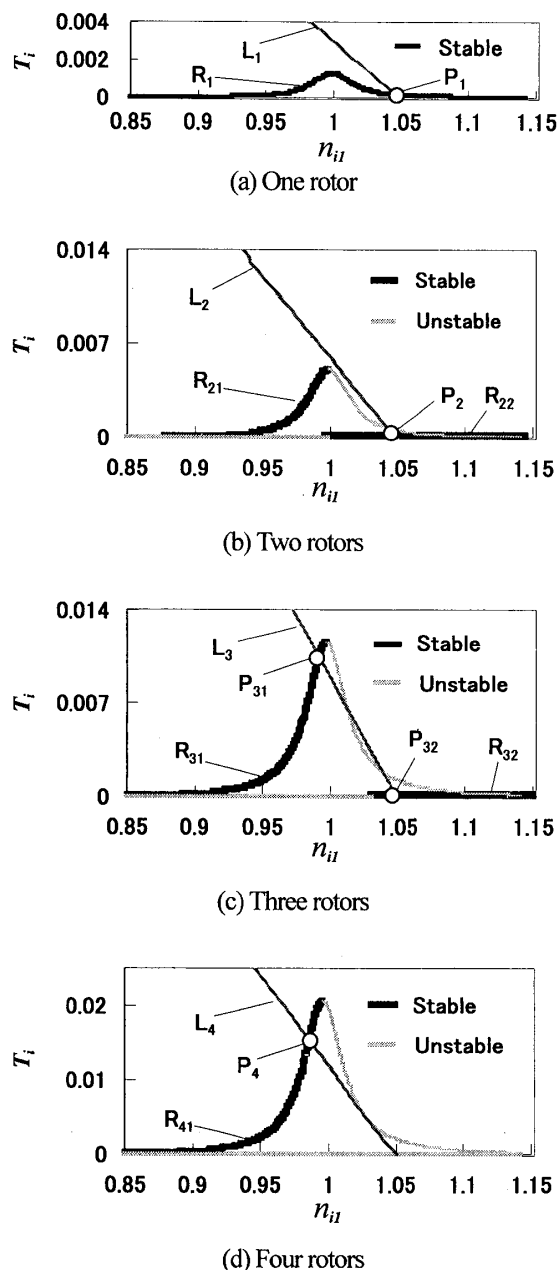


Fig.11 Torque-speed characteristics (L: driving torque,  $n_{i0} = 1.048$ ; R: vibrational torque)

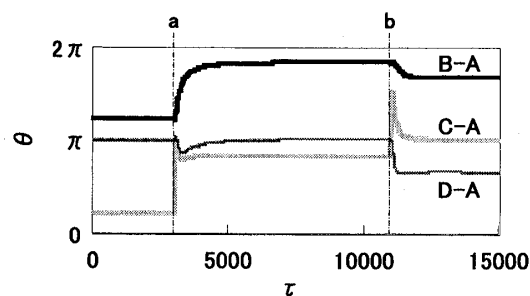


Fig.12 Time history of phases between rotor  $i$  and rotor A  
(Calculated result,  $n_{A0} = n_{B0} = n_{C0} = n_{D0} = 1.129$ )

常では危険速度を通過できないことを示している。また、 $P_{32}$ では台の振動は非常に小さい。しかし、ロータの起動などの外乱がある場合、 $P_{31}$ に引き込まれることがある。すなわち、危険速度以上で回転していても、さらにロータが駆動されることにより回転速度が危険速度に以下になり大きな振動が起ることがある。

式 (3) から、駆動トルクはロータ台数  $N$  に比例し負荷トルクは  $N^2$  に比例することがわかる。このため駆動トルクに余裕がない場合、台数が増えると危険速度を通過できなくなることがわかる。

図 11(d)は 4 台の場合を示したものである。3 台までとは異なり、危険速度以上においては安定な定常周期解がない。この計算結果について次に考える。

図 12 は、ロータ A~D の 4 台の挙動を数値計算により求めたものである。ロータ間の位相差を無次元時間に対して示している。設定回転速度は全て同じとして計算を行った。外乱(時刻 a, b でロータ B の速度を 10% 変動させた)を与えて、各ロータ間の位相差を調べた。

外乱が入る前では各ロータの位相差はほぼ一定であり、ロータ A と D 及び B と C の位相差はそれぞれ  $180^\circ$  である。時刻 a で外乱が入るとロータ A と D 及び B と C の位相差はそれぞれ  $180^\circ$  であるが、全てのロータ間の位相差は保持されない。さらに、時刻 b では位相差が  $180^\circ$  となる組合せが AD と BC から AC と BD に変わり位相差は保持されていない。

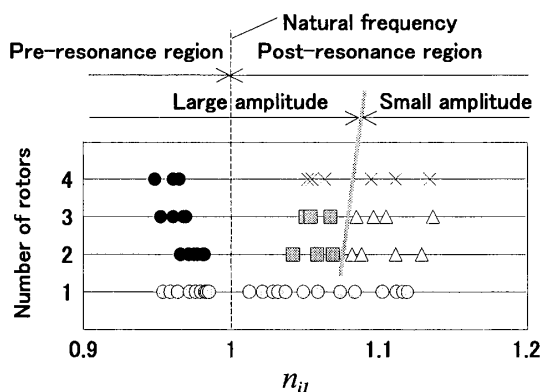
外乱などがなく設定回転速度が同じであれば、ロータは危険速度以上で定常回転する。従って、危険速度以上での回転速度において、定常周期解が不安定となる計算結果は外乱などに対して位相差を一定値に保持しない特性を表していると考えられる。

図 13 はロータ台数と系の振動様式の実験結果を回転速度に対して示したものである。危険速度を通過できない場合は同位同期となり、大きな振動が起った。

危険速度を通過した場合でも斜線で区分した左側の危険速度に近い範囲においては準同期(2, 3 台の場合)もしくは非同同期(4 台の場合)が起り、うなりに似た大きな振動を起す。この設定回転速度の場合、駆動トルクと負荷トルクは危険速度以下で交点をもつ。このため外乱などにより、回転速度が危険速度以下になることがある。

斜線より右側の範囲は、危険速度以下で駆動トルクと負荷トルクは交点をもたない設定回転速度であり、台の振幅は小さく、外乱などがあっても回転速度が危険速度以下になることはない。

駆動トルクに余裕があり危険速度を通過する場合、ロータ 2 台と 3 台ではロータ間の位相差はそれぞれ

Fig.13 Types of synchronization versus  $n_{11}$ 

- :One rotor ●:In-phase synchronization  
 △:Out-of-phase synchronization  
 ■:Quasi-synchronization ×:Non synchronization

$180^\circ$ ,  $120^\circ$  近くで保持される。しかし、4 台の場合、位相差は保持されなかった。実験結果では危険速度以上で同期が起る場合、ロータの不釣り合い力をお互いに打ち消す位相差となった。2 台と 3 台ではこの位相差はそれぞれ  $180^\circ$  と  $120^\circ$  である。しかし、図 12 の計算結果のように、4 台においては 2 台が  $180^\circ$  の位相差をもつとき、他の 2 台の位相差も  $180^\circ$  であれば、4 台の不釣り合い力は打ち消す位相差となる。このような位相差の組合せは無数であり、3 台までのように一つではない。このようなことから 4 台では位相差が保持されないのではないかと考えられる。

## 6. まとめ

複数の剛性ロータが支持系の危険速度を通過する場合について実験と解析を行い、以下のことが明らかとなった。

回転速度が危険速度以下の場合、複数ロータの不釣り合いが同位相で安定となるため、支持系が大きく振動する。ほぼ同じロータを  $N$  台回転させると、駆動トルクが  $N$  に比例するのに対し、負荷トルクは  $N^2$  に比例して大きくなる。このため駆動トルクに余裕のないロータは、運転台数を増やすと危険速度を通過できなくなる。また、ロータを順に起動し、はじめのロータが危険速度を通過した場合でも、続いてロータが起動されると負荷トルクが増加し、回転速度が危険速度以下となり支持系に大きな振動が起ることがある。

駆動トルクが負荷トルクより大きい場合、ロータは危険速度を通過する。危険速度通過後は、各ロータの不釣り合いはお互いを打ち消しあい、支持系の振動は小

さくなる。ロータが 2 台もしくは 3 台の場合、ロータ間の位相差はそれぞれほぼ  $180^\circ$  と  $120^\circ$  となり一定値を保持する。しかし、ロータ 4 台の場合、ロータ間の位相差は一定値を保持しない。

## 参考文献

- (1) F. M. Lewis, *Trans. A.S.M.E.*, Vol.54, (1932), 253-261.
- (2) 下山美徳・山本敏男, 機論, 15-50, (1949), 113-121.
- (3) 山田英夫・津村利光, 機論, 17-64, (1951), 115-119.
- (4) 矢鍋重夫・田村章義, 機論, 37-294, (1971), 268-275.
- (5) 矢鍋重夫・田村章義, 機論, 38-307, (1972), 514-523.
- (6) 矢鍋重夫, 機論, 39-325, (1973), 2734-2744.
- (7) 矢鍋重夫, 機械の研究, 29-10, (1977), 1191-1196.
- (8) 矢鍋重夫, 機論, 45-398, (1979), 1082-1091.
- (9) 松浦克昌, 機論, 37-302, (1971), 1854-1861.
- (10) 松浦克昌, 機論, 41-343, (1975), 777-783.
- (11) 松浦克昌, 機論, 42-363, (1976), 3418-3427.
- (12) 松浦克昌, 機論, 45-397, (1979), 993-1001.
- (13) 石田幸男・池田隆・山本敏男, 機論, 52-478, C(1986), 1764-1771.
- (14) 川井良次・岩壺卓三・神吉博, 機論, 35-280, (1969), 2325-2334.
- (15) T. Iwatsubo, H. Kanki, R. Kawai, *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 14, No.3, (1972), 184-194.
- (16) 太田博・他 3 名, 機論, 53-490, C(1987), 1160-1165.
- (17) A. Dornig, *J. Appl. mech.*, (1959), 217-223.
- (18) F. Ellyin and Z. Wolanski, *J. Appl. mech.*, (1986), 417-423.
- (19) M. F. Dimentberg and et al, *Nonlinear Dynamics*, 13 (1997), 171-187.
- (20) 長屋幸助・他 3 名, 機論, 52-475, C(1986), 997-1002.
- (21) 長屋幸助・他 6 名, 機論, 54-499, (1988), 605-609.
- (22) 山川宏・西岡康志・鈴木良明, 機論, 52-484, C(1986), 3108-3114.
- (23) 野波健蔵・東成昭・戸谷隆美, 機論, 53-496, (1987), 2495-2501.
- (24) I. I. Blekhman, *Synchronization in Science and Technology*, (1988), 29-36, ASME Press.
- (25) I. I. Blekhman, *Vibrational Mechanics*, (2000), 175-196, World Scientific.
- (26) 井上順吉・他 2 名, 機論, 41-350, (1975), 2840-2846.
- (27) 井上順吉・他 2 名, 機論, 48-430, (1995), 819-824.
- (28) 井上順吉・他 2 名, 機論, 49-437, (1995), 39-43.
- (29) M. Paz and J. D. Cole, *Trans. ASME, J. of Vib. Acoust.*, Vol. 114, No.1, (1992), 37-41.
- (30) T. Nagamine, K. Nakano, Y. Sato, *APVC99. Proc.* Vol.2, (1999), 836-841.
- (31) 近藤孝広・矢ヶ崎一幸, 機論, 61-583, (1995), 746-751.
- (32) たとえば, 末岡淳男・井上順吉, 機械力学Ⅱ, (2002), 45-50, 理工学社.