

「五角形の分数のわり算」問題の一般化を通じた教材研究

— 小学校・中学校・高等学校の教材としての提案 —

森 田 大 輔	東京学芸大学大学院連合学校教育学研究科院生
齋 藤 雄	埼玉大学大学院教育学研究科院生
水 口 鑑	埼玉大学大学院教育学研究科院生
岩 崎 亮 英	埼玉大学大学院教育学研究科院生 (城北埼玉中学・高等学校)
内 田 幸 一	埼玉大学大学院教育学研究科院生
岡 本 大 志	埼玉大学大学院教育学研究科院生
二 宮 裕 之	埼玉大学教育学部自然科学講座算数・数学分野

キーワード：教材研究、「五角形の分数のわり算」問題、教授単元、初等教育、中等教育

1. はじめに

次期学習指導要領では、「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善（アクティブ・ラーニングの視点に立った授業改善）を推進することが求められている（文部科学省, 2017）。上記の要請に対して、本稿における課題意識は教材開発を通して授業改善を図ろうとする点にある。平林（1975, p.1）は「子どもに考えさせるためには、われわれはまず Situation を整備しなくてはならない。教具は思考を触発させるための具体的な Situation である」と述べ、数学的思考・数学的活動を触発する Situation の重要性を訴えるとともに、「数学的 Situation を豊かに作りだすものでなければならない。すなわち、単価的ではなく、多価的（multivalent）なものであることが本質的に要求される。それに接する人に応じて、とくにそれに接する人の数学的教養の高さに応じて、いくらでも問題を示唆する教具でなければならない」（ibid., p.25）と教具の在り方について述べている。すなわち、今日求められている「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けて、数学的思考を触発する Situation を整備するという視点は重要であり、多価的で豊かな数学的 Situation を構成する教材を提案することは教育的に意義があると考えられる。

上記の課題意識に鑑みて、本稿では「多価的で豊かな数学的 Situation を構成する教材」の一例として、「五角形の分数のわり算」問題に着目する。「五角形の分数のわり算」問題とは、小学校算数科を対象とした教材で、 $a_{n+2}=(a_{n+1}+1)/a_n$ という漸化式で表せる数列の規則性を見いだすという問題¹⁾である。この漸化式は、任意の自然数 n において $a_{n+5}=a_n$ が成立し、初項と第 2 項をどのように設定しても、5 つの数字が繰り返し現れるという特徴を持ったものである。例えば、 $a_1=4$ 、 $a_2=3$ とすると、 $a_3=(a_2+1)/a_1=(3+1)/4=1$ 、 $a_4=(a_3+1)/a_2=(1+1)/3=2/3$ 、 $a_5=(a_4+1)/a_3=((2/3)+1)/1=5/3$ 、 $a_6=(a_5+1)/a_4=((5/3)+1)/(2/3)=4=a_1$ となり、5 つの数字が繰り返し現れることが確認できる。また、この題材は差分方程式を背景に持つものであり（広田・高橋, 2003）、この漸化式をさらに発展させることで、小学生のみならず、中学生や高校生を対象とした教材の開発が期待される。平林氏の言を借りるならば、「五角形の分数のわり算」問題は多価的な豊かな数学的 Situation を構成する教材になることが期待できると言えよう。

そこで本稿では「五角形の分数のわり算」問題を一般化し、小学校・中学校・高等学校の教材として、教材化することを目的とする。そのために、本稿ではドイツの数学教育学者である Erich Wittmann 氏が提唱した教授単位 (TU: Teaching Units) ならびに本質的学習場 (SLEs: Substantial Learning Environments) と呼ばれる理論的枠組みを用いる。教授単位は数学、心理学、教育学、そして数学教育の実践の統合を意図した一連の教材群であり (Wittmann, 1984)、この概念は本質的な教授単位 (Wittmann, 1995)、そして本質的学習場 (Wittmann, 2001) と Wittmann 氏自身によって発展を遂げていった²⁾。また、本質的学習場は小学校から高等学校までを一貫する数学指導を理念的に内包するものであり (Wittmann, 1995, pp.359-360)、平林一榮氏の基本的な考えと軌を一にする (平林, 2004)。以上のことから、本稿の目的である教材提案のための理論的枠組みとして、Wittmann 氏の教授単位・本質的学習場を用いることは妥当であると判断し、この枠組みに沿った教材提案を行う。

本稿の構成は次の通りである。まず、本稿の理論的枠組みである Wittmann 氏の教授単位・本質的学習場について概観する (2 章)。次に「五角形の分数のわり算」問題を数学的に探究し、そこに内在する数学性を考察したうえで、学校数学の文脈における数学的価値・教授学的価値を見出す (3 章)。そして、2、3 章の考察を踏まえて、本質的学習場の枠組みに沿った形で小学校算数科・中学校数学科・高等学校数学科における教材を提案する (4 章)。最後に本稿における議論を総括し、今後の課題を示す (5 章)。

2. 教授単位・本質的学習場の概要

教材を研究・開発するにあたって、なにがしかの理論的枠組みに基づくことで、教材や授業の目的・目標を明確にすることができるとともに、児童・生徒の学習活動をより具体的にイメージすることができる。そこで、本稿では教材の研究・開発の理論的枠組みとして教授単位・本質的学習場を用いることとする。本質的学習場の概念はミューラーら (2004) によって我が国に広められたことを契機に、具体的な教材が開発され (e.g., 米田, 2006)、理論的な検討も進められてきた (e.g., 國本, 2009; 山本, 2012)。また、後述する教授単位の枠組みを用いた教材開発も近年なされており (e.g., 福田, 2014; 福田ら, 2018; 岩崎ら, 2017; 杉野本ら, 2018)、Wittmann 氏の提唱した概念は教材開発における 1 つの規範として成立しつつある。以下では、Wittmann (1984, 2001) を中心に、教授単位や本質的学習場に関する先行研究を概観し、本稿で措定する理論的枠組みについて整理する。

まず、Wittmann (1984) は、「アリスモゴン」や「ゴルトンボード」などといった様々な教授単位を、「目的 (O)」「題材 (M)」「(学習場の文脈から生じる数学の) 問題 (P)」「(大部分が数学であるが、まれに心理学的な学習場の) 背景 (B)」という枠組みに基づいて紹介している。また、Wittmann (2001, p.2) は教授単位という言葉の本質的学習場に置き換えた上で、本質的学習場の特性として以下の 4 点を挙げている。

- (1) 特定の水準における算数・数学の指導の中心的な目的、内容そして原理を表す。
- (2) この水準を超えた重要な数学的内容、プロセスとして手続きと関係し、数学的活動の豊かな源泉である。
- (3) 柔軟であり、教室の特殊事情に適合することができる。
- (4) 算数・数学指導の数学的、心理学的、そして教育学的側面を統合し、そして実証的研究の

ための豊かな環境を形成する。

また福田（2014, p.169）は上記の4点を挙げた上で、「これら4つの条件を充たす教授単元は、条件（2）や条件（3）によって示唆されているように、教材内容や教授方法などを適切に調節すれば、小学校の教材にも中学校の教材にも高等学校の教材にもなる。つまり、小学校から高等学校までを一貫するようなモデル教材として、教授単元は位置付く」と述べている。このような指摘は本稿で行おうとする教材開発と軌を一にするものであると言えよう。

また、Wittmann（2001）は本質的学習場の役割として、理論と実践を相互に関連付けることを挙げている。そして、本質的学習場を中心とした理論と実践の往還を、以下の図1のように表している。

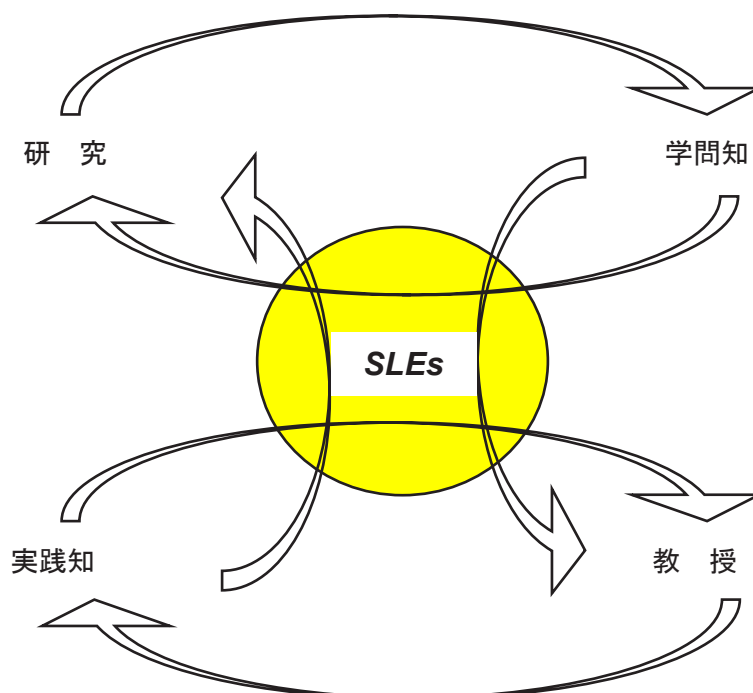


図1 SLEを核とする学問知と実践知の循環（Wittmann, 2001, p.5）

本章をまとめると、教授単元ならびに本質的学習場は、[目的／題材／背景／問題]という4つ組の枠組みで記述される一連の教材群である。さらに、本質的学習場はどの学年、校種においても豊かな数学的活動の源泉として働く。以下では、上記の4つ組の枠組みを用いることで、「五角形の分数のわり算」問題の教材開発を進めることとする。上記の枠組みは教授単元の枠組みとしているものの、それは本質的学習場に付与されている意図を減ずることを意味しない。むしろ、開発された教材から本質的学習場の特性（Wittmann, 2001）を積極的に見出し、本教材を価値づけていくことが求められるであろう。

3. 「五角形の分数のわり算」問題の数学的探究

野口（2016, pp.119-121）は「教材研究」とひとまとめに呼ばれる作業を、「素材研究」「教材研究」「指導法研究」という3つの段階で分けた上で、「この三つの段階のうち、最も基礎となるのは「素材研究」です。まずはそこに五十パーセントの力を注ぐことが大切です。基礎がしっか

り完成すれば、「教材研究」には三十パーセントの力を注げば十分であり、さらに「指導法研究」には、二十パーセントの力を注げば十分です」と述べている。このことから、「五角形の分数のわり算」問題を授業化するにあたって、まずは筆者らが当該の問題に対して十分に探究をすることが必要となる。本章では「五角形の分数のわり算」問題を数学的に探究することで、本問題の数学的価値とともに教授学的価値を明らかにする。筆者らが探究した過程において導出された数列は、タイプごとにラベリングし、以下の表1のように列記した。以降はこの記号で数列を示す。

表1 原題における数列の一般化

		周期
1-† $a_{n+2}=(a_{n+1}+1)/a_n$	2-† $a_{n+2}=a_{n+1}+1-a_n$	6
	2-‡ $a_{n+2}=a_{n+1}+k-a_n$	6
1-1 $a_{n+2}=a_{n+1}/a_n$	2-1 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$	6
1-2 $a_{n+4}=(a_{n+3}/a_{n+2})(a_{n+1}/a_n)$	2-2 $a_{n+4}=a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$	10
	2-3 $a_{n+6}=a_{n+5}-a_{n+4}+a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$	14
1-k $a_{n+2k}=(a_{n+2k-1}/a_{n+2k-2})\cdots(a_{n+1}/a_n)$	2-k $a_{n+2k}=a_{n+2k-1}-a_{n+2k-2}+\cdots-a_n$	$4k+2$
☆-k $a_{n+2k}=a_{n+2k-1} * a_{n+2k-2}^{-1} * a_{n+2k-3} * \cdots * a_n^{-1}$ $a_n \in G, n \in \mathbb{N}, (G, *)$: アーベル群		$4k+2$

表1における☆-kで記された漸化式では、数列自体がアーベル群ではなく、数列の元と数列を構成する演算がアーベル群であることを意味していることに注意されたい。原題で導かれる漸化式(1-†)の「+1」をなくした漸化式(1-1)も循環し、さらに1-1、1-2を1-kに一般化することができた。同様にして1-kと類似する漸化式である2-1、2-2を2-kに一般化でき、それらをさらにアーベル群の元により構成された漸化式☆-kと一般化できた。したがって、本問題に内在する数学性を簡潔に述べれば、「(1-k)、(2-k)での演算の比較から、アーベル群であれば、 $4k+2$ で循環する数列を得られること」であろう。この内在する数学性を踏まえれば、本問題の学校数学の文脈における数学的価値として「原題で導かれる数列が循環すること」「それらの数列を一般化できること」の2点が挙げられる。

一方、教授学的価値として「いろいろな漸化式や問に議論が派生すること」が挙げられる。したがって、本問題における数列は数学性を豊かに含み、小学生から大学生に対しても数学的活動を触発できる場を提供すると十分言えるだろう。例えば小学校段階では、規則性を掴み、循環することの面白さを感じさせ、なぜ循環するのかを帰納的に、可能ならば前形式的に確認することがさらなる数学的探究につながる。中学校段階では、(1-1)や(1-2)が循環することを、文字を用いて演繹的に証明するだけでなく、さらなる循環する数列を探究する活動を生起させることが可能であろう。高等学校段階では、循環する数列がなぜ循環するのかを、特性方程式に着目することで構造的に捉え、その構造を基に学習者自身が循環する数列を作ることが期待される。

このような数学的探究から得た数学的価値、教授学的価値を踏まえ、第4章では本稿の目的に即してこの一般化させた数列を基に、小学校・中学校・高等学校の教材を提案する。

4. 「五角形の分数のわり算」問題の教材化

本章では、3章で見出した原題の数学的価値、教授学的価値を踏まえ、小学校算数科ならびに

中学校・高等学校数学科における教材を節ごとに分けて記述する。

4-1 小学校算数科における教材化

第3章での検証を踏まえると、 $2-1$ 、 $2-2$ 、 \dots 、 $2-k$ は小学校算数科で用いることは甚だ困難であることが想定される。その理由として、ひき算を続けていくと、小学校段階では未習である負の数が必ず途中で出てきてしまうことが挙げられる。したがって、 $1-1$ 、 $1-2$ 、 \dots 、 $1-k$ の方で教材を考えていく必要がある。また、 $1-2$ 以降では、循環させるために10回以上計算する必要があることに加え、計算手順を説明および理解するのに時間を要する。以上の理由から、本稿では $1-1$ を用いた次の教材を提案する。

目的：帰納的な推論を体験する。

題材：規則性を持って並んでいる数

背景：帰納的推論、分数のわり算、循環する数

問題：(1) 次の数字の並び方の規則を見つけ、□に当てはまる数を求めよう。

①1、2、3、5、8、13、□

②1、2、2、4、8、32、□

(2) ①、②で見つけた規則のわり算バージョンで7番目の数字を求めよう。

(3) わり算バージョンの場合、1番目と2番目の数がどんな数でも7番目の□の数字を当てることができるのかを考えよう。

(1) の①、②は、(2) で扱う数列 $1-1$ の漸化式の計算を行うための練習として位置づいている。(2) では最初の数と2番目の数を何にするかを児童から3通り程度引き出し、学習者が規則に当てはめ計算する前に教師が7番目の数を当てることで、学習者に他の数字でも試したいという意欲を喚起させる。(3) では、(2) において学習者がもつ疑問を学習者自身で説明することを目的としている。(2) において試した3通り程の数だけではなく、他の数字でも試して確かめるような帰納的推論に加え、擬変数を用いた前形式的証明により、循環を証明することが期待される。

4-2 中学校数学科における教材化

以下では、原題を軸とした中学校数学科における教材を記述する。なお、本稿においては、中学校2年生と3年生においては扱える式の範囲が異なるため、中学校2年生を対象にする問題と中学校3年生を対象にする問題に分けて、それぞれ提案することとする。

目的：循環する数を通して数学への関心を高め、文字を用いて説明できる力を身につける。

題材：循環する数

背景：文字式の利用（式の説明）、式の展開、因数分解

問題：中学校2年生

(i)～(iv)の手順に従い①～⑩に数を入れ、(1)～(3)に答えよう。

(i) ①、②に適当な数を入れる。

(ii) ③に $② \div ①$ を計算した数を入れる。

(iii) ④に $③ \div ②$ を計算した数を入れる。

(iv) 以下を繰り返す。

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩

(1) 上記の表からどのようなことが言えるか考えてみよう。

(2) ①で予想した法則がいつでも成り立つことを説明しよう。

(3) 他にも循環するような式がつかれないか考えてみよう。

中学校3年生

(i)～(iv)の手順に従い①～⑩に数を入れ、(1)～(3)に答えよう。

(i) ①、②に適当な数を入れる。

(ii) ③に $(②+1) \div ①$ を計算した数を入れる。

(iii) ④に $(③+1) \div ②$ を計算した数を入れる。

(iv) 以下を繰り返す。

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩

(1) 上記の表からどのようなことが言えるか考えてみよう。

(2) ①で予想した法則がいつでも成り立つことを説明しよう。

(3) 他にも循環するような式がつかれないか考えてみよう。

本教材は循環する数を扱うことで数学への関心を高め、文字を用いて説明できる力を育てることを目的としている。循環を実感することによって関心を高めた後に、意欲的に文字を用いて説明する活動を行うことが期待される。本節では中学校数学科教材として3章にある $1-1$ と $1-\frac{1}{n}$ を題材として扱っている。原題に対応させ作問を行った中学校3年生の問題において分子の+1は大きな意味を持っている。中学校2年生の問題は原題に対応した漸化式である $1-\frac{1}{n}$ で分子の+1を0に置き換え作成を行なった。 $1-\frac{1}{n}$ において、 a_1 、 a_2 に任意の数を用いる場合、分子を a_n 、もしくは a_n+1 、つまり $1-\frac{1}{n}$ と $1-1$ の形にしないと循環しない。+1という条件を変えて循環が成り立つか考察を行ったり、 $2-\frac{1}{n}$ のような循環を考えたりすることによっても、より数学の面白さに触れられると考えられる。

中学校2年生対象の問題は、①～⑩に当てはまる数を考える段階は小学生でも解くことが可能であり、循環を実感することは容易である。また文字を用いて説明する段階も、必要な計算の技能は単項式同士の除法になるので、比較的容易に取り組むことができると考えられる。また、中学校2年生は初めて文字を用いて式の説明を取り扱う学年である。生徒自ら数が循環するという予想を立て、その予想がいつでも正しいことを説明する過程を通じて文字を用いることの重要性を実感できると考える。そして、既習である文字式の知識を活用することで学びを実感できる場としての機能も期待できる。数学の学習において文字式が重要であるという意識をもたせ、数学的に相手に説明する力が養われると考えている。

中学校3年生対象の問題も①～⑩に当てはまる数を考える段階は小学生でも解くことが可能であるが、計算をする際に通分の作業が必要になる。したがって、循環を実感する段階における難易度はやや高まるであろう。説明を行うには中学3年生には高度な通分や因数分解の知識が必要になる。数学が得意な生徒を除くと、説明を行うには、事前に一部の計算方法を指導や穴埋め形式のプリントを用意するなどの工夫を行う必要があると考えられる。しかし、普段は扱わないような多項式の計算を扱うことによって、計算力の向上や数学の楽しさをより実感することに寄与することが期待できる。

4-3 高等学校数学科における教材化

本章の最後に、前節までと同様に高等学校数学科における教材を提案する。「数列をすでに学習している生徒を対象とする」という仮定の下、次の教材を提案する。

目的：循環する理由をつかみ、自分で循環する数列を作れるようになる。
 題材：循環する数列の漸化式
 背景：特性方程式、 $z^n = 1 (z \in \mathbb{C})$
 問題：(1) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ $a_1 = 1, a_2 = 1$ の一般項を求めよう。
 (2) ①循環する数列の漸化式 $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$ 、 $a_1 = 1, a_2 = 1$ の周期を調べよう。
 ②この漸化式の一般項を求めよう。
 ③なぜこの数列が循環するのかを考えよう。
 (3) ①循環する数列の漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ 、 $a_1 = 1, a_2 = 1$ の周期を調べよう。
 ②この漸化式の一般項を求めよう。
 ③なぜこの数列が循環するのかを考えよう。
 (4) (2)、(3)を基にして、循環する数列を自分で考えてみよう。

中学校数学科では、きまりに当てはめて得られた数（数列）が循環することを証明する方法として文字式を用いる。一方で高等学校数学科では、数列の対応を捉えることができる一般項や、前後の変化を表すことができる漸化式を学習し、一般項や漸化式を循環することを証明する手法として用いることができる。循環する数列の漸化式を考察することで、なぜ循環するのかを構造として捉えることができる³⁾。循環の構造を捉えることで、その根拠を用いて自ら循環する数列の漸化式を作ることができるようになる。このような高等学校数学科の学習内容とその意義を踏まえ、上記のように目的、題材、背景を設定し、それを基に問題を設定した。

具体的には、まず(1)の問題を通して3項間漸化式の一般項を特性方程式の2解 α, β が $\alpha \neq \beta$ のとき、 $a_n = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}$ の形で一般項を書くことができることを確認する。次に(2)の問題を通して、特性方程式の解が3乗して1になること、 $x^2 + x + 1$ が $x^3 - 1$ の因数になっていることを意識させる。これを基に(3)の問題に取り組むことで、数列の漸化式の特性方程式の解が $p \in \mathbb{N}$ ではじめて $x^p = 1$ となることを満たせば、元の数列の一般項が $a_n = k_1(\alpha_1)^{n-1} + k_2(\alpha_2)^{n-1} + \dots + k_{p-1}(\alpha_{p-1})^{n-1}$ と表され、周期 p をもつと捉えることができるであろう。このように捉えることで、新たに循環する数列を探究させる際に、中学校数学科では発見的な探究にとどまっていたが、高等学校数学科では、 x^{p-1} の因数となる多項式と0とを等号で結ぶことで表される方程式が特性方程式となる数列を作ること、循環する数列の漸化式を見いだすことを可能にする。

5. おわりに

本稿では、「五角形の分数のわり算」問題の数列を一般化したものを基に、小学校・中学校・高等学校の教材として教材化することを目的とした。その結果、学校種によって多様な数学的な「背景」に基づく教材を提案することができた。その際に本質的学習場の枠組みに沿って記述することで、一般化させた数列に基づく教材が豊かな数学的背景を有していることをより明示化することを可能にした。なお、今回提案したそれぞれの学校種の具体的な教材は、一般化させた数列の筆者らが着目した数学的背景を基に提案したものである。別の背景に基づき、目的、題材、問題を設定した教材を提案することも十分可能であろう。

今後の課題として、以下の2点が挙げられる。1点目は、この教材を基に実際に授業を行うことで、「生徒が本教材と対峙した際に、どのような数学的活動を展開するのか？」を明らかにすることである。2点目は、本稿とは異なる背景を設定した際に、どのような教材が開発されるかを探る点にある。この点については、さらなる数学的探究を行うという方法もさることながら、実際に授業をすることで生徒の実態を探ることで異なる背景を設定するという方法も想定される。後者については、岡崎（2007）の言う「デザイン実験」とも整合する方法である。

注

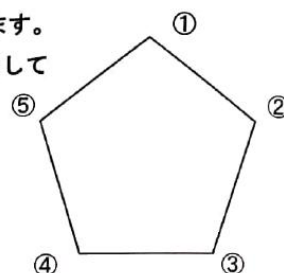
- 1) この問題は小学生対象であるので、実際は、漸化式という式で与えるのではなく、頂点にナンバリングがされた五角形を提示した上で「『(次の頂点+1) ÷ 前の頂点』の計算をして次の頂点に答えを書く。この計算を、⑤まで続ける。」と文章で提示される問題である。尚、平成31年3月27日に横浜国立大学附属横浜小学校で行われた算数数学教育合同研究会における片桐重男先生のご講演では、次のように示された。

問題1. 五角形①②③④⑤の頂点①と② に2つの数をかきます。

そして「(次の頂点+1) ÷ 前の頂点」の計算をして

次の頂点に答えをかきます。

この計算を、⑤まで続けます。



たとえば 図のように①を2、②を4とすると、

$(4+1) \div 2$ を計算して、その答えを③に書きます。

これは $\frac{5}{2}$ となるから ③に $\frac{5}{2}$ と書きます。

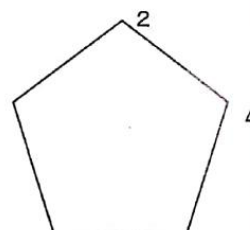
つぎにまた

「(次の頂点+1) ÷ 前の頂点」の計算

$$(\frac{5}{2} + 1) \div 4$$

をして、答えを④に書きます。

そして④と③の数を使って、もう一度この計算をして その答えを⑤に書きます。



- 2) 「教授単位」(Teaching Units) とは「本質的学習場」が指示する対象と同様の対象を表現する名詞として Wittmann が使用していたものである。これら用語の変更は内容的な変更を意味するわけではなく、「教授」という教師の営為の強調から、「学習」という生徒・児童の学習活動を強調するために行われた(山本, 2012)。
- 3) 「なぜ循環するのかを構造として捉えることができる」とは、「特性方程式の解が、初めて方程式 $x^p=1$ ($p \in \mathbb{N}$) の解となれば周期 p をもつ漸化式をつくることが出来るということを理解する」ことである。例えば、 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n \cdots (2-1)$ で定められる漸化式の特性方程式は $r^2-r+1=0 \cdots \textcircled{2}$ なので、両辺に $r+1$ をかけると $r^3=-1$ より、両辺 2 乗して $r^6=1$ である。実際に方程式 $\textcircled{2}$ の解を $x=\alpha, \beta$ と置けば、 $(2-1)$ の一般項は $a_n = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}$ となるので $a_{n+6} = a\alpha^{(n+6)-1} + b\beta^{(n+6)-1} = a\alpha^6\alpha^{n-1} + b\beta^6\beta^{n-1} = a_n$ である。

付記ならびに謝辞

本稿は、2019年度前期に大学院修士課程にて開講された講義「数学教育学特論 A」(担当教員:二宮裕之)で実際に行われた教材研究の成果を論文の形にまとめ直したものである。教材研究を進めるにあたり、講義に参加していた佐藤達也(春日部市立春日部南中学校教諭)、川崎隼、内田敦也、本間太陽、小沢征司(埼玉大学大学院教育学研究科院生)の諸氏も一緒に参加している。尚、受講生である大学院生が教材研究の過程で行った数学的活動については、森田ら(2020)において検討されている。

本研究は、片桐重男先生(元横浜国立大学教授・元文教大学教授)が平成31年3月27日の講演にて「五角形の分数のわり算」問題を提示されたことを契機に進められました。この教材を通して、片桐先生は、数学的に考えることの重要性を教えてくださいました。この場を借りて、衷心より感謝申し上げます。

引用文献

- 福田博人(2014). 統計教育に関する教授単元の開発研究—意思決定能力育成へ向けた批判的思考を促す教授単元の提示—. 全国数学教育学会誌 数学教育学研究, 20(2), 169-182.
- 福田博人・大谷洋貴・岩崎秀樹(2018). 統計的検定の教授単元の開発研究: 背理法からの展開と区別に着目して. 日本科学教育学会誌 科学教育研究, 42(4), 335-349
- 平林一榮(1975). 算数・数学教育のシツエーション. 広島大学出版研究会.
- 平林一榮(2004). 高等学校数学教育理念の問題. 長崎崇三・長尾篤志・吉田明史・一榮重雄・渡邊公夫・国宗進(編著), 授業研究に学ぶ高校新数学科の在り方(pp.165-195). 明治図書.
- 広田良吾・高橋大輔(2003). 差分と超離散. 共立出版.
- 岩崎秀樹・杉野本勇気・大滝孝治・岩知道秀樹(2017). 数学教育研究としての教材開発のあり方—中等教育を一貫する論証指導のために—. 全国数学教育学会誌 数学教育学研究, 23(2), 1-13.
- 米田重和(2006). 「本質的学習環境」としての算数・数学授業の実践的な研究—「盗賊と財宝」の中学校1年生の「正負の数」における活用—. 全国数学教育学会誌 数学教育学研究, 12, 65-70.
- 國本景亀(2009). 生命論に立つ数学教育学の方法論—自由で個性豊かな算数・数学授業を目指して—. 全国数学教育学会誌 数学教育学研究, 15(2), 1-15.
- 文部科学省(2017). 中学校学習指導要領解説 数学編. 日本文教出版.
- 森田大輔・佐藤達也・川崎隼・内田敦也・本間太陽・小沢征司・二宮裕之(2020). 「五角形の分数のわり算」問題を原題とする数学的活動—大学院生による数学的活動を事例として—. 埼玉大学教育学部附属教育実践総合センター紀要, 18, 17-24.
- ミューラー, G. N., シュタインプリング, H., & ヴィットマン, E. Ch. (2004). 國本景亀・山本信也(訳). 算数・数学 授業改善から教育改革へ—PISAを乗り越えて: 生命論的観点からの改革プログラム—. 東洋館出版社.
- 野口芳宏(2016). 教師に必要な3つのこと. 学陽書房.
- 岡崎正和(2007). 数学教育研究方法論としてのデザイン実験の位置と課題—科学性と実践性の調和の視点から—. 全国数学教育学会誌 数学教育学研究, 13, 1-13.

- 杉野本勇気・岩知道秀樹・福田博人・岩崎秀樹 (2018). 数学教育学の教授学的反省—数学的帰納法の教材開発を通じた研究法の考察—. 全国数学教育学会誌 数学教育学研究, 24(1), 17-23.
- Wittmann, E. Ch. (1984). Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 25-36.
- Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics education as a “Design Science”. *Educational Studies in Mathematics*, 29(4), 355-374.
- Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 1-20.
- 山本信也 (2012). 生命論的デザイン科学としての数学教育学の課題と展望. 熊日情報文化センター.

(2019年 9 月29日提出)

(2019年10月10日受理)

Generalization of “Division of Fractions with Pentagonal Cycle” Problem for Developing Teaching Materials:

Proposals for Elementary, Jr. High, and High School Mathematics

MORITA, Daisuke

The United Graduate School of Education, Tokyo Gakugei University

SAITO, Yu

Graduate School of Education, Saitama University

MIZUGUCHI, Kan

Graduate School of Education, Saitama University

IWASAKI, Ryoei

Graduate School of Education, Saitama University (Johokusaitama Junior & Senior High School)

UCHIDA, Koichi

Graduate School of Education, Saitama University

OKAMOTO, Taishi

Graduate School of Education, Saitama University

NINOMIYA, Hiroyuki

Faculty of Education, Saitama University

Abstract

The aims of this paper are generalizing the “Division of fractions with pentagonal cycle” problem and proposing this problem as a teaching material for school mathematics. “Division of fractions with pentagonal cycle” problem is a problem for students to find regularity of a sequence that can be expressed by a recursion formula of $a_{n+2} = (a_{n+1} + 1) / a_n$. Moreover, this number sequence is a circulating number sequence and has an interesting property of $a_{n+5} = a_n$.

First, we explored this problem mathematically, and found that mathematical value of this problem is “circulation of the sequence derived from the original title” and “it can generalize these sequences”. We also clarified that pedagogical value of this problem is “the debate derives from various recurrence formulas and questions”. Based on the above, we proposed the “Division of fractions with pentagonal cycle” as teaching materials in elementary, junior high, and high school mathematics by using the format of teaching units (TU) or Substantial Learning Environments (SLEs) by Wittmann (1984, 2001).

Keywords: teaching materials, “Division of fractions with pentagonal cycle” problem, teaching units, primary education, secondary education