The Fefferman space of a contact Riemannian manifold and the Lorentzian spin geometry

（接触リーマン多様体のフェファーマン空間とそのローレンツスピン幾何）

埼玉大学大学院理工学研究科

博士後期課程　理工学専攻数学コース

主指導教員　下川航也 教授

大山 人紀

2022 年 3 月

目 次

序論

本論文では，接触リーマン多様体上のフェファーマン空間のローレンツスピン幾何を論ずる．

接触リーマン多様体とは，奇数次元多様体に接触形式と適切なリーマン計量及び擬概複素構造が付随したものである．この接触リーマン多様体はその接触構造から定まる特殊な主 S^1 束を持ち，その全空間はフェファーマン空間と呼ばれており接触構造から誘導されるローレンツ計量を持つ． フェファーマン空間は，Fefferman によってまず複素数空間内の実超曲面上の主 S^1 束の全空間として導入され（[6]），Lee，Blair，Dragomir，長瀬らによって接触リーマン多様体上の空間に拡張された（[13]，[4]，[17]）．

接触リーマン多様体の擬概複素構造には可積分条件が定まる．可積分条件を満たす接触リーマン多様体の研究は盛んに行われてきたが，非可積分を含んだ一般の接触リーマン多様体の研究は比較的少ない．特に，一般の接触リーマン多様体のフェファーマン空間の研究はさらに少ない．

接触リーマン多様体の研究では，レヴィ＝チヴィタ接続とは異なる接続が用いられる．計量とトーションに関してよい性質を持つレヴィ＝チヴィタ接続は，接触リーマン多様体ではその接続構造を保たない（補題 1.10）．そのため，接触リーマン多様体の研究では接触構造を保つ接続が用いられる．可積分の場合では，田中・ウェブスター接続がよく知られている．この接続は接触リーマン多様体の構造である三つ組（接触構造，リーマン計量，擬概複素構造）を平行にする性質を持つ．さらにトーションを最小にする性質をも併せ持つ．しかし，一般の場合には，これらの性質を全て持つ接続は存在しない．一般の接触リーマン多様体の場合には，田中・ウェブスター接続の一般化である丹野接続が知られている．丹野接続は接触構造やリーマン計量さらにトーションに関しては，田中・ウェブスター接続と同じ性質を持つが，一般には擬概複素構造を不変に保たない（命題 1.14 と命題 1.19）．このことより，丹野接続を用いたフェファーマン空間やスピン幾何を用いた研究では，非常に複雑な計算が現れる（[4]）．この問題を踏まえて構成されたものが，長瀬氏によって導入されたエルミート丹野接続である（[18]）．このエルミート丹野接続は擬概複素構造を保ち，さらに田中・ウェブスター接続の一般化である．特に，接触リーマン多様体のスピン幾何やフェファーマン空間の曲率の研究で有効的に働いている（[16]，[17]）．

この論文では，一般の接触リーマン多様体のフェファーマン空間にローレンツスピン幾何を用いた研究 [20] を主眼に論じていく．

フェファーマン空間をローレンツスピン幾何の観点から調べた先行研究は非常に少ない．ただし，類似の研究として，Lewandowski の研究 [14] を可積分接触リーマンスピン多様体の場合に拡張した Baum の研究 [5] がある．彼女は，まず，接触リーマン多様体がスピン構造を持つ条件より，フェファーマン空間を変形したフェファーマン・バウム空間にローレンツスピン構造が

構成できることを示した．通常のスピン幾何と同様に，ローレンツスピン構造からもフェファーマン・バウム空間上にスピノール束が構成される．この切断であるスピノール場には，特殊なスピノール場であるトゥイスタースピノールがある．このトゥイスタースピノールはある接続の平行場を与えホロノミー研究やチャーン接続の研究にも繋がり，その存在は重要な幾何的性質を与える．Baum は，フェファーマン・バウム空間のスピノール束の構造に着目することで，具体的に線型独立な 2 つのトゥイスタースピノール場を構成した．

Baum の研究では，接触リーマン多様体に二つの条件（可積分性，スピン構造の存在）を課して，フェファーマン空間を変形したフェファーマン・バウム空間で議論を行っていた．我々は，Baum の 2 条件を除いたフェファーマン空間に関しても同様の結果が成り立つことを予想した．この予想が我々の研究の出発点であり，最終的に我々はこの予想を解決した．

まず，我々は，フェファーマン空間に底空間の構造から誘導されるローレンツスピン構造が構成されることを発見した．それを標準ローレンツスピン構造と呼ぶ．さらに，そのスピノール束の構造に着目することで特殊なスピノール場 $\Phi_{\pm}$ を構成した．このスピノール場 $\Phi_{\pm}$ に関して，次を示した．

> 底空間が可積分条件を満たすとき，$\Phi_{\pm}$ はトゥイスタースピノールとなる．また，$\Phi_{\pm}$ がトゥイスタースピノールになるのは底空間が可積分条件を満たすときに限る．

これから，特に，底空間が可積分条件を満たすとき，フェファーマン空間が線型独立な 2 つのトゥイスタースピノールを持つことがわかる．

以下で，本論文の構成を簡単に述べる．1 節で接触リーマン多様体の基本的な性質を述べる．特に接触リーマン多様体に特有な接続であるエルミート丹野接続を導入する．さらに，接触リーマン多様体の標準複素スピン構造を紹介する．この構成法は，フェファーマン空間の標準スピン構造にも重要である．2 節では，この研究の主な舞台であるフェファーマン空間を定義していく．フェファーマン空間を論ずる際に重要になるのはフェファーマン形式である．まずはこのフェファーマン形式を導入することを目標に論じ，最終的にフェファーマン空間の性質を述べることにする．3 節で，スピン幾何について論じていく．ただ，リーマン計量のスピン幾何についは参考文献に譲ることにし，この議論で使う事柄をまとめて論ずることにする．1 節から 3 節の準備のもと，主論の 4 節に入っていく．まず，標準ローレンツスピン構造が底空間の接触リーマン多様体の構造から構成されることを述べ，そのスピノール束の構造から生じるスピノール場があることを論じていく．続いて，構成したスピノール場に着目し，これを用いてフェファーマン空間の幾何的性質を調べていく．最後の 5 節では, フェファーマン空間に標準的に入るローレンツ計量を変形させリーマン計量にし，その幾何学を調べていく．

本論文では，人名はローマ字表記とし人名由来の形容詞や名詞はカナ表記とする．ただし日本人の場合は日本語表記とする．

最後に，埼玉大学大学院に入学してから博士課程の 5 年間もの間, 熱心に指導して下さった長瀬正義名誉教授に最大の感謝の意を表します．長瀬氏が指導して下さった 5 年間は数学的刺激に満ちた期間であり，多くの掛け替えのないものを頂いきました．特に，初期に指導して下さったスピン幾何と博士課程で行った共同研究，さらに退職後にも指導して下さったことに関しては，再度感謝の意を申し上げます.

また，博士課程の後半で指導教員を担って下さった下川航也教授，学部生の頃からお世話になっている数学科事務員の方々，さらにその他の数学科の先生方にも大変お世話になりました．皆様には感謝の念に堪えません．加えて，研究生活のなか精神的な支えになってくれた私の家族に深く感謝いたします.

1　接触リーマン多様体

この節では接触リーマン多様体の基本事項を紹介する．証明の多くは省略し，必要であれば参考文献を挙げることにする．この章全体の参考文献としては Blair [3] を挙げておく．

1.1　接触リーマン多様体の定義とその基本事項

接触多様体の定義を紹介する．

定義 1.1. M を奇数次元多様体とし，$\dim M = 2n+1$ とする．また M 上の 1 形式 θ が，至る所で $\theta \wedge (d\theta)^n \neq 0$ を満たすとする．このとき，θ を M 上の接触形式といい，(M, θ) を接触多様体という．さらに，接触多様体の向きは，$\theta \wedge (d\theta)^n$ から定まる向きを正とする．

接触多様体 (M, θ) には，次の補題で定まるレーブ場と呼ばれるベクトル場 ξ が一意に存在する．今後は，このレーブ場 ξ を含めて接触多様体を $(M, \theta : \xi)$ と書くことにする．

補題 1.2. θ を M 上の接触形式とする．このとき，ベクトル場 ξ が一意に存在して

$$\theta(\xi) = 1, \quad \xi \rfloor d\theta = 0 \tag{1.1}$$

となる．ここで $\rfloor$ は内部積を表している．

式 (1.1) は，リー微分 $\mathcal{L}$ を使うことで

$$\theta(\xi) = 1, \quad \mathcal{L}_\xi \theta = 0 \tag{1.2}$$

と書き換えられる．こちらを定義に採用しているものもある．

レーブ場 ξ は至る所で 0 にならないため，自明なライン束 $\mathbb{R}_\xi \subset TM$ を生成する．さらに，接触形式 θ から余次元 1 の接束の部分束 H が

$$H = \bigcup_{x \in M} H_x, \quad H_x \coloneqq \ker \theta_x$$

によって定まる．この H を M の接触構造と呼ぶ．これらを用いると，接束 TM は

$$TM = H \oplus \mathbb{R}_\xi$$

と表される．

補題 1.3. $d\theta$ は H で非退化である．つまり，$X, Y \in H$ について $d\theta(X, Y) \neq 0$ となる．特に，$(H_x, (d\theta)_x)$ はシンプレクティック空間となる．

次に接触多様体を使って接触リーマン多様体の定義を述べる．一言で述べると，接触多様体に適切な計量と接束の自己写像を付随させたものが接触リーマン多様体である．

定義 1.4. $(M, \theta : \xi)$ を接触多様体とする．さらに，リーマン計量 g と $J \in \mathrm{End}(TM)$ が，任意のベクトル場 X と Y について

$$J^2 X = -X + \theta(X)\xi, \tag{1.3}$$

$$g(X, Y) = d\theta(X, JY) + \theta(X)\theta(Y) \tag{1.4}$$

を満たすとする．このとき組 $(M, \theta : \xi, g, J)$ を接触リーマン多様体といい，J を擬複素構造という．

定義から直ちに

- $J\xi = 0$,
- $g(\xi, \xi) = 1$,
- 任意の $X \in H$ に対して $g(X, \xi) = 0$

がわかる．また，一見すると，接触リーマン多様体は接触多様体より扱える多様体が少ないように見える．しかし，それは誤りであり，扱えるものは同等である．次の命題からそのことがわかる．

命題 1.5. 接触多様体 $(M, \theta : \xi)$ には，接触リーマン多様体 $(M, \theta : \xi, g, J)$ にするリーマン計量 g と $J \in \mathrm{End}(TM)$ が存在する．

詳しい証明は，Blair [3] を参照してほしい．ここではその概要を説明するに留める．この証明は，シンプレクティック多様体 (M, Ω) が概複素多様体 (M, g, J) になる証明と類似しており，シンプレクティック多様体の場合では TM と Ω となるところに接触多様体の場合には H と $d\theta$ を対応させればよい．

まず，ベクトル束 H の計量 h をとる，この計量に関する正規直交枠を取ることで，$d\theta$ は局所的に行列 Θ と表される，この Θ に行列の極分解を適用することで，対称かつ正定値行列 $\mathcal{G}$ と直交行列 $\mathcal{J}$ が一意に存在して

$$\Theta = \mathcal{J}\mathcal{G}$$

と分解される．この $\mathcal{J}$ と $\mathcal{G}$ は，その一意性より大域的に貼り合わせることができる．こうして得た H 上のテンソルをそれぞれ $\tilde{J}$ と $\tilde{g}$ とする．あとは $TM = H \oplus \mathbb{R}_\xi$ より J を ξ 方向では消えるように，g を H と ξ が直交するように拡張すればよい．このようにして構成できたものが命題 2.2 の g と J である．

接触リーマン多様体では，擬概複素構造 J を H に制限すると $(J|_H)^2 = -1$ となることから，H を複素化した H^c が

$$H^c = H_+ \oplus H_-, \quad H_\pm \coloneqq \{X \in H^c \mid JX = \pm iX\} \tag{1.5}$$

と分解されることがわかる．この分解によって J の可積分性が定義される．

定義 1.6. $(M,\theta:\xi,g,J)$ を接触リーマン多様体とする．J が可積分であるとは，任意の X_+ と $Y_+\in\Gamma(H_+)$ について

$$[X_+,Y_+]\subset\Gamma(H_+) \tag{1.6}$$

を満たすときにいう．

接触多様体上では H に関する可積分，つまり任意の $X,Y\in\Gamma(H)$ に対して $[X,Y]\subset\Gamma(H)$ が成り立たない．このことは，$X,Y\in\Gamma(H)$ に対して

$$\theta([X,Y])=-d\theta(X,Y)$$

と成立することと $d\theta$ が H 上非退化であることからわかる．

接触リーマン多様体の可積分条件は, ナイエンハンステンソルを用いて言い換えることができる. ナイエンハンステンソル $[J,J]$ とは,

$$[J,J](X,Y):=[JX,JY]+J^2[X,Y]-J[JX,Y]-J[X,JY]$$

で定められる $(1,2)$ テンソルである.

命題 1.7. J が可積分であるための必要十分条件は，任意の $X,Y\in\Gamma(H)$ に関して

$$[J,J](X,Y)+d\theta(X,Y)\xi=0 \tag{1.7}$$

となることである.

式 (1.7) は

$$[JX,JY]-[X,Y]-J[JX,Y]-J[X,JY]=0\quad(X,Y\in\Gamma(H)) \tag{1.8}$$

と言い換えられる．また命題の証明は，概複素構造が複素構造になる場合と同様である．

次に接触リーマン多様体上の特殊な局所枠について紹介する．接触リーマン多様体 M^{2n+1} の接束 TM は複素化すると

$$TM^c=H_+\oplus H_-\oplus\mathbb{C}_\xi$$

と分解した．この分解より，概エルミート多様体の場合と同様にして，接触リーマン多様体の TM^c には次の条件を満たす局所枠 $(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{\bar{1}},\dots,\xi_{\bar{n}})$ を取ることができる．この局所枠を擬エルミート枠または J 枠と呼ぶ.

$$\xi_0=\xi,$$

$$\xi_\alpha\in H_+,\quad \xi_{\bar\alpha}=\overline{\xi_\alpha}\qquad(\alpha=1,\dots,n),$$

$$g(\xi_A, \xi_B) = \delta_{A\bar{B}} \qquad (A, B = 0, 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}).$$

ここで，δ_{AB} とは

$$\delta_{AB} = \begin{cases} 1 & A = B, \\ 0 & A \neq B \end{cases}$$

である．また，添え字 $\alpha, \beta, \ldots$ は $1, \ldots, n$ を走り，$A, B, \ldots$ は $0, 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}$ を走るものとする．この規則は今後も使用していく．

次に，CR 共形変換について述べる．接触形式 θ に対して正値関数 f をかけた $\tilde{\theta} \coloneqq f\theta$ は，$d(f\theta) = df \wedge \theta + fd\theta$ となることから

$$\tilde{\theta} \wedge (d\tilde{\theta})^n = e^{2(n+1)f}\theta \wedge (d\theta)^n$$

となる．特に，変換後の $\tilde{\theta}$ も接触形式になる．また，正値関数は e^{2f} と表すこともでき，計算の簡略化のため，今後は $\tilde{\theta} = e^{2f}\theta$ と表していく．

定義 1.8 (接触多様体の CR 共形変換)**.** 接触多様体 (M, θ) に対して，$(M, \tilde{\theta})$ ($\tilde{\theta} = e^{2f}\theta$) とする変換を CR 共形変換という．

CR 共形変換において $H = \ker\theta = \ker\tilde{\theta}$ と接触構造は保たれるが，レーブ場は保たれない．このことは，後述する式 (1.9) からもわかる．

この変換を接触リーマン多様体でも行いたいが，接触リーマン多様体にはリーマン計量と擬概複素構造があり，接触形式の変換だけではそれらの行き先が一意に定まらない．しかし，リーマン計量は擬概複素構造から定まること，擬概複素構造は接触構造上では同型射であるがレーブ場方向では消えることに着目して，次のように接触リーマン多様体の CR 共形変換を定める．

定義 1.9 (接触リーマン多様体の CR 共形変換)**.** 接触リーマン多様体 $(M, \theta : \xi, g, J)$ に対して，次で定まる接触リーマン多様体 $(M, \tilde{\theta}, \tilde{\xi}, \tilde{g}, \tilde{J})$ にする変換を接触リーマン多様体の CR 共形変換という．

- $\tilde{\theta} = e^{2f}\theta$ とし，$\tilde{\theta}$ から定まるレーブ場を $\tilde{\xi}$ とする．
- $\tilde{J} \in \mathrm{End}(TM)$ を，$\tilde{J}|_H = J|_H$ かつ $\tilde{J}\tilde{\xi} = 0$ で定める．
- $\tilde{g}$ を，任意のベクトル場 X, Y について

$$\tilde{g}(X, Y) = d\tilde{\theta}(X, \tilde{J}Y) + \tilde{\theta}(X)\tilde{\theta}(Y)$$

  となるように定める．

特に混乱がない場合は，接触リーマン多様体の CR 共形変換を単に CR 共形変換と呼ぶ．CR 共形変換で得た $\tilde{J}$ は

$$\tilde{J}^2 X = -X + \tilde{X}\tilde{\xi}$$

を満たすことに注意しておく．

最後に，CR 共形変換後の擬エルミート枠がどのように取れるかを説明して，ここを終わりにする．変換前の擬エルミート枠とその双対枠を，それぞれ

$$(\xi_0 = \xi, \xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{\bar{1}}, \dots, \xi_{\bar{n}}), \qquad (\theta^0 = \theta, \theta^1, \dots, \theta^n, \theta^{\bar{1}} \dots, \theta^{\bar{n}})$$

と表す．これを用いて変換後の $\tilde{\theta}$ のレーブ場 $\tilde{\xi}$ は，レーブ場の一意性より，

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= e^{-f}\xi - 2ie^{-f}\sum_{\alpha}\xi_\alpha(f)\xi_\alpha + 2ie^{-f}\sum_{\alpha}\xi_{\bar{\alpha}}(f)\xi_{\bar{\alpha}} \\ &= e^{-f}\bigl(\xi - 2i\sum_{\alpha}\xi_\alpha(f)\xi_\alpha + 2i\sum_{\alpha}\xi_{\bar{\alpha}}(f)\xi_{\bar{\alpha}}\bigr) \qquad (1.9)\end{aligned}$$

と表される．$A \neq 0$ に対して $\tilde{\xi}_A$ を

$$\xi_A = e^{-f}\xi_A \in H$$

と定めると，$(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}_{\bar{1}}, \dots, \tilde{\xi}_{\bar{n}})$ が変換後の擬エルミート枠になる．実際，$d\theta = -i\sum\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\alpha}}$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}_\alpha) &= d\tilde{\theta}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}_\alpha) = 2e^{2f}(df \wedge \theta)(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}_\alpha) + e^{2f}d\theta(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}_\alpha) \\ &= -2e^{2f}df(\tilde{\xi}_\alpha)\theta(\tilde{\xi}) + ie^f\theta^{\bar{\alpha}}(\tilde{\xi}) \\ &= -2\xi_\alpha(f) - 2i^2\xi_\alpha(f) = 0\end{aligned}$$

かつ，$A, B \neq 0$ について，

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\xi}_A, \tilde{\xi}_B) &= d\tilde{\theta}(\tilde{\xi}_A, \tilde{J}\tilde{\xi}_B) = e^{-2f}d\tilde{\theta}(\xi_A, J\xi_B) = d\theta(\xi_A, J\xi_B) \\ &= g(\xi_A, \xi_B) = \delta_{A\bar{B}}\end{aligned}$$

が成り立つ．この双対枠 $(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}^1, \dots, \tilde{\theta}^n, \tilde{\theta}^{\bar{1}}, \dots, \tilde{\theta}^{\bar{n}})$ は，簡単な計算より，

$$\tilde{\theta} = e^{2f}\theta, \quad \tilde{\theta}^\alpha = e^f(\theta^\alpha + 2i\xi_\alpha(f)\theta),$$

$$\tilde{\theta}^{\bar{\alpha}} = \overline{\tilde{\theta}^\alpha} = e^f(\theta^{\bar{\alpha}} - 2i\xi_\alpha(f)\theta)$$

となることがわかる．

1.2 丹野接続とエルミート丹野接続

接触リーマン多様体では接触構造が重要であるが，レヴィ＝チヴィタ接続は接触構造と相性が悪い．

補題 1.10. 接触リーマン多様体 $(M, \theta : \xi, g, J)$ のレヴィ＝チヴィタ接続 ∇^g は，$X, Y \in \Gamma(H)$ について

$$\theta(\nabla^g_\xi X) = 0, \qquad (1.10)$$

$$2\theta(\nabla^g_X Y) = -(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) - d\theta(X, Y) \qquad (1.11)$$

となる．

証明． レヴィ＝チヴィタ接続の性質より

$$
\begin{aligned}
2\theta(\nabla^g_\xi X) &= 2g(\nabla^g_\xi X, \xi) \\
&= \xi g(X,\xi) + Xg(\xi,\xi) - \xi g(\xi, X) + g([\xi, X], \xi) - g([X,\xi],\xi) + g([\xi,\xi], X) \\
&= 2\theta([\xi, X]) \\
&= 2\bigl(\xi\theta(X) - X\theta(\xi) - d\theta(\xi, X)\bigr) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる．同様にして，

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla^g_X Y, \xi) &= Xg(Y,\xi) + Yg(\xi,X) - \xi g(X,Y) \\
&\qquad + g([X,Y],\xi) - g([Y,\xi],X) + g([\xi,X],Y) \\
&= -\xi g(X,Y) + g([\xi,X],Y) + g([\xi,Y],X) + \theta([X,Y]) \\
&= -(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) - d\theta(X,Y)
\end{aligned}
$$

となる． □

この補題から，レヴィ＝チヴィタ接続は接束の分解 $TM = H \oplus \mathbb{R}_\xi$ を保たないことがわかる．実際，もしも保つとすると

$$
(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) = -d\theta(X,Y) \quad (X, Y \in H)
$$

となるが，上式の左辺は対称であり右辺は歪対称である．よって，H 上で $d\theta = 0$ となるが，これは $d\theta$ が H 上非退化に矛盾する．また，$\mathcal{L}_\xi g$ に関して次の補題が成り立つ．

補題 1.11． $X_\pm, Y_\pm \in H_\pm$ とする．次が成り立つ．

$$
(\mathcal{L}_\xi g)(\xi, Y_\pm) = 0, \quad (\mathcal{L}_\xi g)(X_\pm, Y_\mp) = 0,
$$

$$
(\mathcal{L}_\xi g)(X_\pm, Y_\pm) = -2g([\xi, X_\pm], Y_\pm).
$$

ただし，符号は同順である．

証明． 一般に，$\overline{(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y)} = (\mathcal{L}_\xi g)(\overline{X}, \overline{Y})$ と

$$
(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) = \xi g(X,Y) - g([\xi,X],Y) - g(X,[\xi,Y])
$$

が成り立つことに注意する．まず，

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi g)(\xi, Y_+) &= -g(\xi, [\xi, Y_+]) = -\theta([\xi, Y_+]) \\
&= d\theta(\xi, Y_+) - \xi\theta(Y_+) - Y_+\theta(\xi) = 0
\end{aligned}
$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi g)(X_+,Y_-) &= \xi g(X_+,Y_-) - g([\xi,X_+],Y_-) - g(X_+,[\xi,Y_-]) \\ &= -i\xi d\theta(X_+,Y_-) + id\theta([\xi,X_+],Y_-) - id\theta([\xi,Y_-],X_+) \\ &= -id^2\theta(\xi,X_+,Y_-) = 0\end{aligned}$$

となる．同様にして，

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi g)(X_+,Y_+) &= -g([\xi,X_+],Y_+) - g(X_+,[\xi,Y_+]) \\ &= -id\theta([\xi,X_+],Y_+) - id\theta([\xi,Y_+],X_+) \\ &= id^2\theta(\xi,X_+,Y_+) - 2id\theta([\xi,X_+],Y_+) \\ &= -2g([\xi,X_+],Y_+)\end{aligned}$$

となる． □

一般に，$\mathcal{L}_Z g = 0$ を満たすベクトル場 Z はキリング場と呼ばれる．レーヴ場 ξ がキリング場のとき，K 接触リーマン多様体と呼ばれる．前補題より，K 接触リーマン多様体の必要十分条件がわかる．

命題 1.12. 接触リーマン多様体 $(M,\theta:\xi,g,J)$ が K 接触リーマン多様体になるための必要十分条件は，任意の $X_+ \in \Gamma(H_+)$ に対して

$$[\xi,X_+] \subset \Gamma(H_+)$$

が成り立つことである．

証明． まず，

$$\theta([\xi,X_+]) = -d\theta(\xi,X_+) + \xi\theta(X_+) - X_+\theta(\xi) = 0$$

が成り立つ．これと補題 1.11 より示される． □

次に，接触リーマン多様体の研究でよく用いられる丹野接続を紹介する．

定義 1.13. 接触リーマン多様体 $(M,\theta:\xi,g,J)$ 上の接続 ∇^T を

$$\nabla^T_X Y = \nabla^g_X Y - \frac{1}{2}\theta(X)JY - \theta(Y)\nabla^g_X\xi + (\nabla^g_X\theta)(Y)\xi \tag{1.12}$$

と定め，丹野接続と呼ぶ．

丹野接続 ∇^T が接続になることに注意する．実際，

$$A_X(Y) \coloneqq \nabla^T_X Y - \nabla^g_X Y \in \Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}(TM))$$

となることより $\nabla^T = \nabla^g + A$ が接続であることがわかる．また，丹野接続は定義より常に存在することがわかる．また，次の特徴付けを持つ．

命題 1.14. ∇^T を丹野接続とする．また，T を ∇^T のトーション，$\tau = \xi \rfloor T$ とする．丹野接続 ∇^T は以下を満たす．

$$\nabla^T \theta = 0, \quad \nabla^T g = 0,$$

$$T(X_+, Y_+) = 0, \quad T(X_+, Y_-) = ig(X_+, Y_-)$$

$$\tau \circ J + J \circ \tau = 0.$$

ここで，$X_\pm, Y_\pm \in \Gamma(H_\pm)$ である．逆に，上の条件を満たす接続は丹野接続のみである．

証明. まず，丹野接続の定義と補題 1.10 より

$$\begin{aligned}
(\nabla^T_X \theta)(Y) &= X\theta(Y) - \theta(\nabla^T_X Y) \\
&= X\theta(Y) - \theta(\nabla^g_X Y) + \theta(Y)\theta(\nabla^g_X \xi) - (\nabla^g_X \theta)(Y) \\
&= \theta(Y)\theta(\nabla^g_X \xi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，レヴィ＝チヴィタ接続は g と整合性を持つことより，

$$\begin{aligned}
(\nabla^T_Z g)(X, Y) &= Zg(X, Y) - g(\nabla^T_Z X, Y) - g(X, \nabla^T_Z Y) \\
&= -g\Big(-\frac{1}{2}\theta(Z)JX - \theta(X)\nabla^g_Z \xi + (\nabla^g_Z \theta)(X)\xi, Y\Big) \\
&\quad - g\Big(X, -\frac{1}{2}\theta(Z)JY - \theta(Y)\nabla^g_Z \xi + (\nabla^g_Z \theta)(Y)\xi\Big) \\
&= \frac{1}{2}\theta(Z)\Big(g(JX, Y) + g(X, JY)\Big) + \theta(X)g(\nabla^g_Z \xi, Y) \\
&\quad - \theta(Y)(\nabla^g_Z \theta)(X) + \theta(Y)g(X, \nabla^g_Z \xi) - \theta(X)(\nabla^g_Z \theta)(Y) \\
&= \theta(X)\Big(g(\nabla^g_Z \xi, Y) - (\nabla^g_Z \theta)(Y)\Big) - \theta(Y)\Big((\nabla^g_Z \theta)(X) - g(X, \nabla^g_Z \xi)\Big)
\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
g(\nabla^g_Z \xi, X) &= Zg(\xi, X) - g(\xi, \nabla^g_Z X) \\
&= Z\theta(X) - \theta(\nabla^g_Z X) = (\nabla^g_Z \theta)(X)
\end{aligned}$$

であるから，上の計算と合わせて $\nabla^T g = 0$ が示される．次に，$X, Y \in H^c$ とすると，レヴィ＝チヴィタ接続はトーションフリーより，

$$\begin{aligned}
T(X, Y) &= \nabla^T_X Y - \nabla^T_Y X - [X, Y] \\
&= -\frac{1}{2}\theta(X)JY - \theta(Y)\nabla^g_X \xi + (\nabla^g_X \theta)(Y)\xi \\
&\quad + \frac{1}{2}\theta(Y)JX + \theta(X)\nabla^g_Y \xi - (\nabla^g_Y \theta)(X)\xi \\
&= \Big((\nabla^T_X \theta)(Y) - (\nabla^T_Y \theta)(X)\Big)\xi \\
&= \Big(-\theta(\nabla^g_X Y) + \theta(\nabla^g_Y X)\Big)\xi
\end{aligned}$$

となる．補題 1.10 より，

$$-\theta(\nabla^g_X Y)+\theta(\nabla^g_Y X)=\frac{1}{2}\Big((\mathcal{L}_\xi)(X,Y)+d\theta(X,Y)-(\mathcal{L}_\xi g)(Y,X)-d\theta(Y,X)\Big)$$
$$=d\theta(X,Y)=g(JX,Y)$$

となる．よって，

$$T(X_+,Y_+)=0,\quad T(X_+,Y_-)=ig(X_+,Y_-)$$

が示された．今までに示したことより，$\tau(\xi)=0$ かつ $\tau(X)\in H$（$X\in H$）が成り立つ．よって，$X,Y\in H$ で $g((\tau\circ J+J\circ\tau)(X),Y)=0$ を示せばよい．まず，

$$\begin{aligned}(\tau\circ J+J\circ\tau)(X)&=\nabla^T_\xi JX-[\xi,JX]+J(\nabla^T_\xi X-[\xi,X])\\&=\nabla^g_\xi JX-\frac{1}{2}J^2X+(\nabla^g_\xi\theta)(JX)\xi-[\xi,JX]\\&\quad+J\Big(\nabla^g_\xi X-\frac{1}{2}JX+(\nabla^g_\xi\theta)(X)\xi\Big)-J[\xi,X]\\&=\nabla^g_{JX}\xi+J\nabla^g_X\xi+X+(\nabla^g_\xi\theta)(JX)\xi\end{aligned}$$

がわかる．これより，

$$\begin{aligned}&g((\tau\circ J+J\circ\tau)(X),Y)\\&=g(\nabla^g_{JX}\xi,Y)-g(\nabla^g_X\xi,JY)+g(X,Y)\\&=-g(\xi,\nabla^g_JXY)+g(\xi,\nabla^g_XJY)+g(X,Y)\\&=\frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi g)(JX,Y)+\frac{1}{2}d\theta(JX,Y)\\&\quad-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi g)(X,JY)-\frac{1}{2}d\theta(X,JY)+g(X,Y)\\&=\frac{1}{2}\Big((\mathcal{L}_\xi g)(JX,Y)-(\mathcal{L}_\xi g)(X,JY)\Big)-d\theta(X,JY)+g(X,Y)\\&=\frac{1}{2}\Big((\mathcal{L}_\xi g)(JX,Y)-(\mathcal{L}_\xi g)(X,JY)\Big)\end{aligned}$$

となる．また，補題 1.11 より

$$\begin{aligned}&(\mathcal{L}_\xi g)(JX,Y)-(\mathcal{L}_\xi g)(X,JY)\\&=(\mathcal{L}_\xi g)(JX_+,Y_+)-(\mathcal{L}_\xi g)(X_+,JY_+)+(\mathcal{L}_\xi g)(JX_-,Y_-)-(\mathcal{L}_\xi g)(X_-,JY_-)\\&=0\end{aligned}$$

となる．以上より，$\tau\circ J+J\circ\tau=0$ が示された．また，次の命題から，丹野接続は局所的にはカッコ積と擬エルミート枠で一意に表される．このことから丹野接続の一意性がわかる． □

命題 1.15. 擬エルミート枠 $(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{\bar{n}})$ に関して，ω_A^B を $\nabla^T \xi_A = \sum \omega_A^B \xi_B$ とする．このとき，

$$(\omega_A^B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\alpha^\beta & \omega_{\bar{\alpha}}^\beta \\ 0 & \omega_\alpha^{\bar{\beta}} & \omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}, \qquad \omega_{\bar{A}}^{\bar{B}} = \overline{\omega_A^B}$$

と表され，さらに各成分は

$$\omega_\alpha^\beta(\xi) = g(\xi_{\bar{\beta}}, [\xi, \xi_\alpha]), \quad \omega_\alpha^\beta(\xi_\gamma) = -g(\xi_\alpha, [\xi_\gamma, \xi_{\bar{\beta}}]), \quad \omega_\alpha^\beta(\xi_{\bar{\gamma}}) = g(\xi_{\bar{\beta}}, [\xi_{\bar{\gamma}}, \xi_\alpha]),$$

$$\omega_\alpha^{\bar{\beta}}(\xi) = 0, \quad \omega_\alpha^{\bar{\beta}}(\xi_\gamma) = -g(\xi_\gamma, [\xi_\alpha, \xi_\beta]), \quad \omega_\alpha^{\bar{\beta}}(\xi_{\bar{\gamma}}) = 0$$

と表される．

証明. 前命題を用いて計算すれば示される．例えば，$\tau \circ J + J \circ \tau = 0$ と $\theta \circ \tau = 0$ より $J \circ \tau \circ J - \tau = 0$ であるから，$\tau(X_+)$ の H_+ 部分は

$$\tau(X_+)|_{H_+} = \frac{1}{2}(\tau(X_+) - iJ\tau(X_+)) = 0$$

が成り立つ．これより

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^\beta(\xi) &= g(\nabla_\xi^T \xi_\alpha, \xi_{\bar{\beta}}) = g(\tau(\xi_\alpha) + [\xi, \xi_\alpha], \xi_{\bar{\beta}}) \\ &= g(\xi_{\bar{\beta}}, [\xi, \xi_\alpha]) \end{aligned}$$

が成り立つ． □

次に $\nabla^T J$ の性質に着目する．$(1,2)$ テンソル $\mathcal{Q}$ を

$$\mathcal{Q}(X, Y) \coloneqq (\nabla_Y^T J)(X)$$

と定め，丹野テンソルと呼ぶ．

命題 1.16. 丹野テンソル $\mathcal{Q}$ は以下を満たす．

(1) $\mathcal{Q}$ は ξ 成分に作用せると消え，H に値をとる．つまり，ベクトル場 X と Y について，$\mathcal{Q}(\xi, X) = \mathcal{Q}(X, \xi) = 0$ かつ $\mathcal{Q}(X, Y) \in H$ となる．

(2) $\mathcal{Q}(X_+, Y_-) = 0$.

(3) $g(\mathcal{Q}(X_+, Y_+), Z_-) = 0$.

(4) $g(\mathcal{Q}(X_+, Y_+), Z_+) = -2ig([X_+, Z_+], Y_+)$.

証明. (1) 命題 1.15 から，$Q(\xi, Y) = 0$ と $Q(X, Y) \in H$ は直ちに従う．残りは $Q(X, \xi) = 0$ だが，$g(Q(X_+, \xi), Y_\pm) = 0$ を示せば十分である．まず，

$$\begin{aligned} g(Q(X_+, \xi), Y_-) &= g(\nabla_\xi^T J X_+, Y_-) - g(J \nabla_\xi^T X_+, Y_-) \\ &= ig(\nabla_\xi^T J X_+, Y_-) - ig(\nabla_\xi^T X_+, Y_-) = 0 \end{aligned}$$

となる．次に，命題 1.15 の $\omega_{\alpha}^{\bar{\beta}}(\xi)=0$ から $g(\nabla^T_\xi X_+, Y_+)=0$ が成り立つことより，

$$
\begin{aligned}
g(Q(X_+,\xi),Y_+) &= g(\nabla^T_\xi JX_+, Y_+) + g(\nabla^T_\xi X_+, JY_+)\\
&= 2ig(\nabla^T_\xi X_+, Y_+) = 0
\end{aligned}
$$

が示される．

(2) から (4) は Q がテンソルであることと命題 1.15 を用いることで示される．

□

この命題より，丹野テンソルは

$$
\mathcal{Q} \in \Gamma(H_+ \otimes H^- \otimes H^- + H^- \otimes H^+ \otimes H^+) \tag{1.13}
$$

とみなせる．これと再び命題 1.16 を用いることで次がいえる．

系 1.17. ベクトル場 X と Y について，次が成り立つ．

(1) $g(\mathcal{Q}(X,Y),Z)+g(X,\mathcal{Q}(Z,Y))=0$

(2) $g(\mathcal{Q}(X,Y),Z)+g(\mathcal{Q}(Y,Z),X)+g(\mathcal{Q}(Z,X),Y)=0$

これらより，丹野テンソルを擬エルミート枠枠で表示に関する次の結果を得る．

系 1.18. 丹野テンソルは

$$
\mathcal{Q} = \sum \mathcal{Q}^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \xi_\alpha \otimes \theta^{\bar{\beta}} \otimes \theta^{\bar{\gamma}} + \sum \mathcal{Q}^{\bar{\alpha}}_{\beta\gamma} \xi_{\bar{\alpha}} \otimes \theta^{\beta} \otimes \theta^{\gamma} \tag{1.14}
$$

と表示され，その係数は $\mathcal{Q}^{\bar{\alpha}}_{\beta\gamma} = \overline{\mathcal{Q}^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}}$ と

$$
\mathcal{Q}^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} + \mathcal{Q}^{\beta}_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} = 0, \tag{1.15}
$$

$$
\mathcal{Q}^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} + \mathcal{Q}^{\beta}_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}} + \mathcal{Q}^{\gamma}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0 \tag{1.16}
$$

を満たす．

以上より，丹野接続とはリーマン計量やトーションとは相性がよいが，擬概複素構造に関しては相性が悪い接続といえる．また，丹野テンソルが消える条件に関しては次の命題がある．

命題 1.19. $Q=0$ となるための必要十分条件は，J が可積分になることである．

証明． 命題 1.16 より示される． □

次に，丹野接続のエルミート部分に着目してみる．丹野接続 $\nabla^T_X Y$ の H_+ 部分は，

$$\begin{aligned}(\nabla^T_X Y_+)_{H_+} &= \frac{1}{2}\big(\nabla^T_X Y_+ - iJ\nabla^T_X Y_*\big)\\ &= \nabla^T_X Y_+ - \frac{1}{2}\big(\nabla^T_X Y_+ + iJ\nabla^T_X Y_+\big)\\ &= \nabla^T_X Y_+ - \frac{1}{2}J\big(-J\nabla^T_X Y_+ + \nabla^T_X JY_+\big)\\ &= \nabla^T_X Y_+ - \frac{1}{2}J(\nabla^T_X J)(Y_+)\\ &= \nabla^T_X Y_+ - \frac{1}{2}J\mathcal{Q}(Y_+, X)\end{aligned}$$

と計算される．同様にして，

$$(\nabla^T_X Y_-)_{H_-} = \nabla^T_X Y_- - \frac{1}{2}J\mathcal{Q}(Y_-, X)$$

が成り立つ．以上より，$\nabla^T_X Y$ の ξ 方向と $H_\pm$ 方向は, 次のように表される．

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}(\nabla^T_X Y)_0 & 0 & 0\\ 0 & (\nabla^T_X Y)_+ & 0\\ 0 & 0 & (\nabla^T_X Y)_-\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\nabla^T_X(\theta(Y)\xi) & 0 & 0\\ 0 & \nabla^T_X Y_+ & 0\\ 0 & 0 & \nabla^T_X Y_-\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}X(\theta(Y))\xi & 0 & 0\\ 0 & \nabla^T_X Y_+ - \frac{1}{2}J\mathcal{Q}(Y_+, X) & 0\\ 0 & 0 & \nabla^T_X Y_- - \frac{1}{2}J\mathcal{Q}(Y_-, X)\end{pmatrix}\\ &= \nabla^T_X Y - \frac{1}{2}J\mathcal{Q}(Y, X). \end{aligned} \tag{1.17}$$

特に $J\mathcal{Q} \in \Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}(TM))$ であるから，(1.17) は接続になる．

定義 1.20. 接触リーマン多様体の接続 ∇^{hT} を

$$\nabla^{hT}_X Y = \nabla^T_X Y - \frac{1}{2}J\mathcal{Q}(Y, X)$$

とする．∇^{hT} をエルミート丹野接続という.

エルミート丹野接続にも命題 1.14 に対応する次の命題が成り立つ．

命題 1.21. エルミート丹野接続 ∇^{hT} は以下を満たす.

$$\nabla^{hT}\theta = 0, \quad \nabla^{hT}g = 0, \quad \nabla^{hT}J = 0,$$

$$T(X_+, Y_+) = \frac{1}{4}[J, J](X_+, Y_+), \quad T(X_+, Y_-) = ig(X_+, Y_-),$$
$$\tau \circ J + J \circ \tau = 0.$$

証明． 命題 1.14 と命題 1.16 から従う．例えば，

$$\begin{aligned}(\nabla^{hT}_X\theta)(Y) &= X\theta(Y) - \theta(\nabla^{hT}_X Y)\\ &= X\theta(Y) - \theta(\nabla^{T}_X Y) + \frac{1}{2}\theta(JQ(Y,X))\\ &= (\nabla^{T}_X\theta)(Y) = 0\end{aligned}$$

となる．他も同様である． □

最後に，丹野接続とエルミート丹野接続の擬リッチ曲率と擬スカラー曲率を紹介する．接続 ∇^* $(* = T, hT)$ の曲率を

$$F(\nabla^*)(X,Y) = \nabla^*_X\nabla^*_Y - \nabla^*_Y\nabla^*_X - \nabla^*_{[X,Y]} \tag{1.18}$$

と表す．擬エルミート枠 $(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{\bar{n}})$ について，

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^*}(X,Y) = \sum_{\alpha=1}^{n} g(F(\nabla^*)(X,Y)\xi_\alpha, \xi_{\bar{\alpha}}), \tag{1.19}$$

$$s^{\nabla^*} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathrm{Ric}^{\nabla^*}(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\alpha}}) \tag{1.20}$$

とし，Ric^{∇^*} と s^{∇^*} をそれぞれ擬リッチ曲率，擬スカラー曲率と呼ぶ[1]．通常のリッチ曲率とスカラー曲率は，それぞれ $\mathrm{Ric}(\nabla^*)$ と $s(\nabla^*)$ で表す．擬リッチ曲率と擬スカラー曲率について次の関係がある．

命題 1.22 ([19])**．** 次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}}(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\beta}}) &= \sum_\nu F(\nabla^{hT})^{\nu}_{\nu\alpha\bar{\beta}}\\ &= \sum_\nu F(\nabla^{g})^{\nu}_{\nu\alpha\bar{\beta}} - \sum_{\nu,\mu}\left(\frac{1}{4}\mathcal{Q}^{\bar{\mu}}_{\nu\alpha}\mathcal{Q}^{\mu}_{\bar{\nu}\bar{\beta}} + \tau^{\bar{\nu}}_{\alpha}\tau^{\nu}_{\bar{\beta}}\right) + \frac{2n+1}{4}\delta_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}}(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \frac{i}{2}\sum_\nu (\nabla^{hT}_{\xi_{\bar{\nu}}}\mathcal{Q})^{\bar{\beta}}_{\alpha\nu},$$

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}}(\xi_\alpha, \xi) = \sum_\mu (\nabla^{hT}_{\xi_{\bar{\mu}}}\tau)^{\bar{\alpha}}_{\mu} + \frac{i}{2}\sum_{\nu,\mu}\tau^{\nu}_{\bar{\mu}}\mathcal{Q}^{\bar{\alpha}}_{\nu\mu},$$

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^{T}}(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\beta}}) = \mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}}(\xi_\alpha, \xi_{\bar{\beta}}) + \frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu}\mathcal{Q}^{\bar{\mu}}_{\nu\alpha}\mathcal{Q}^{\mu}_{\bar{\nu}\bar{\beta}},$$

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^{T}}(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}}(\xi_\alpha, \xi_\beta), \quad \mathrm{Ric}^{\nabla^{T}}(\xi_\alpha, \xi) = \mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}}(\xi_\alpha, \xi).$$

さらに，擬スカラー曲率について

$$s^{\nabla^T} = s^{\nabla^{hT}} + \frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu}|\mathcal{Q}^{\bar{\mu}}_{\nu\alpha}|$$

が成り立つ．

[1] Ric^{∇^*} と s^{∇^*} ともに H_+ で縮約したものである．

命題 1.23 ([19]). 次が成り立つ.

$$\mathrm{Ric}(\nabla^{hT})(\xi_\alpha,\xi_{\bar\beta}) = \mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}}(\xi_\alpha,\xi_{\bar\beta}) - \frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu}\mathcal{Q}^{\bar\alpha}_{\nu\mu}\mathcal{Q}^{\beta}_{\bar\mu\bar\nu},$$

$$\mathrm{Ric}(\nabla^{hT})(\xi_\alpha,\xi_\beta) = \frac{i}{2}\sum_{\nu}(\nabla^{hT}_{\xi_{\bar\nu}}\mathcal{Q})^{\bar\beta}_{\alpha\nu} + i(n-1)\tau^{\bar\alpha}_{\beta},$$

$$\mathrm{Ric}(\nabla^{hT})(\xi_\alpha,\xi) = \sum_{\mu}(\nabla^{hT}_{\xi_{\bar\mu}}\tau)^{\bar\alpha}_{\mu},$$

$$\mathrm{Ric}(\nabla^{T})(\xi_\alpha,\xi_{\bar\beta}) = \mathrm{Ric}(\nabla^{hT})(\xi_\alpha,\xi_{\bar\beta}) + \frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu}\left(\mathcal{Q}^{\bar\mu}_{\nu\alpha}\mathcal{Q}^{\mu}_{\bar\nu\bar\beta} - \mathcal{Q}^{\bar\alpha}_{\nu\mu}\mathcal{Q}^{\beta}_{\bar\mu\bar\nu}\right),$$

$$\mathrm{Ric}(\nabla^{T})(\xi_\alpha,\xi_\beta) = \mathrm{Ric}(\nabla^{hT})(\xi_\alpha,\xi_\beta) + \frac{i}{2}(\nabla^{hT}_{\xi_\nu}\mathcal{Q})^{\bar\alpha}_{\nu\beta},$$

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^{T}}(\xi_\alpha,\xi) = \mathrm{Ric}(\nabla^{hT})(\xi_\alpha,\xi) - \frac{i}{2}\tau^{\mu}_{\bar\nu}\mathcal{Q}^{\bar\alpha}_{\mu\nu},$$

$$s(\nabla^{T}) = s(\nabla^{hT}) = 2s^{\nabla^{hT}}.$$

1.3 標準複素スピン構造

接触リーマン多様体は，その構造から誘導される標準複素スピン構造をもつ．ここでは，その標準複素スピン構造がどのように構成されるかを述べる．詳しい説明は，Morgan [15] や Lawson-Michelsohn [12] を参照してほしい．

複素スピン群 Spin^c_{2n} とは

$$\mathrm{Spin}^c_{2n} = \mathrm{Spin}_{2n}\otimes_{\mathbb{Z}_2} U(1) = \mathrm{Spin}_{2n}\times U(1)/\{\pm 1\}\subset \mathbb{C}l_{2n}$$

である[2]．また，普遍被覆射 $\mathrm{Ad}:\mathrm{Spin}_{2n}\to SO(2n)$ より，

$$\mathrm{Ad}^{\,c}:\mathrm{Spin}^c_{2n}\to SO(2n)\times U(1),\quad [a,z]\mapsto(\mathrm{Ad}(a),z^2) \tag{1.21}$$

が定まる．これより，複素スピン群は群 $SO(2n)\times U(1)$ の二重被覆群となる．

続いて，ユニタリー群と複素スピン群の関係について述べていく．まず，同型 $\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$ から誘導される包含射 $\iota:U(n)\to SO(2n)$ によって，

$$\iota\times\det:U(n)\to SO(2n)\times U(1),\quad A\mapsto(\iota(A),\det(A))$$

ができる．このとき，$J^c:U(n)\to\mathrm{Spin}^c_{2n}$ を以下で定める．まず，$A\in U(n)$ の固有値と固有ベクトルに関して次のことがいえる．

- A の固有値は，絶対値が 1 より $e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}$ と表せる．特に，$\det A = e^{i\sum\theta_k}$ である．

[2]複素スピン群自体は，任意の n で定義されるが，この論文では n が偶数の場合のみ使用するため，この場合に限って議論している．

- 固有値 $e^{i\theta_k}$ の固有ベクトルによる $(p_1, \ldots, p_n)$ は $\mathbb{C}^n$ のユニタリー枠とできる．

これらより，$j^c(A) \in \mathrm{Spin}^c_{2n}$ を

$$[\prod\big(\cos(\frac{\theta_k}{2}) + \sin(\frac{\theta_k}{2}) p_k \circ (J p_k)\big), e^{i\sum\frac{\theta_k}{2}}] \tag{1.22}$$

と定める．ここで，$J \coloneqq \iota(iI_n)$ である．このとき，次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}^c_{2n} \arrow[d, "\mathrm{Ad}^c"] \\ U(n) \arrow[ur, "j^c"] \arrow[r, "\iota\times\det"'] & SO(2n)\times U(1) \end{tikzcd} \tag{1.23}$$

特に，j^c は $\iota \times \det$ の二重被覆射 Ad^c による持ち上げである．

このの $U(n)$ と Spin^c_{2n} の関係を，接触リーマン多様体 M 上のエルミート束 $H \subset TM$ に適用していく．

まず，H をランク $2n$ の実ベクトル束と見なすことで，H の正の正規直交枠を集めた主束 $SO(H)$ を得る．さらに，M は標準複素ライン束

$$K = \{\omega \in \wedge^{n+1} T^*M^c \mid X_- \lrcorner \omega = 0 \quad (X_- \in H_-)\}$$

をもつ．この複素ライン束 K は，複素ベクトル束として $K^{-1} = \wedge^n_{\mathbb{C}} H$ となる．これらより，M 上の束射

$$\iota \times \det : U(H) \to SO(H) \times U(K^{-1})$$

を得る．

次に，主 Spin^c_{2n} 束を $\mathrm{Spin}^c(H) \coloneqq U(H) \times_{j^c} \mathrm{Spin}^c_{2n}$ で定めると，束射

$$\begin{aligned} \Phi^c_H &: \mathrm{Spin}^c(H) \to SO(H) \times U(K^{-1}), \\ &[(A, a)] \mapsto (A, \det A).\,\mathrm{Ad}^c(a) \qquad (a \in \mathrm{Spin}^c_{2n}) \end{aligned}$$

が定まる．

最後に，$TM = H \oplus \mathbb{R}_\xi$ より $SO(TM) = SO(H) \times_{\mathrm{cano}} SO(2n+1)$ となることに気を付けると，$\mathrm{Spin}(TM) = \mathrm{Spin}(H) \times_{\mathrm{cano}} \mathrm{Spin}(2n+1)$ によって，

$$\begin{aligned} \Phi^c &: \mathrm{Spin}^c(TM) \to SO(TM) \times U(K^{-1}), \\ &[(s, a)] \mapsto \Phi^c_H(s).\,\mathrm{Ad}^c(a) \qquad (a \in \mathrm{Spin}^c_{2n+1}) \end{aligned} \tag{1.24}$$

が定まる．

定義 1.24. (1.24) で定まる複素スピン構造 $(\mathrm{Spin}^c(TM), \Phi^c)$ を, M の標準複素スピン構造という．

この標準複素スピン構造からスピノール束 $\mathcal{S}^c = \mathrm{Spin}(TM) \times_{\Delta_{2n+1}^c} S_{2n+1}$ が定まる．このスピノール束に関して次の命題が成り立つ．

命題 1.25 ([22], [16])**.** 標準複素スピン構造のスピノール束 $\mathcal{S}^c$ は，次のクリフォード作用の対応を含めて，同型 $\mathcal{S}^c \cong \wedge^{0,*}(H^c)^*$ が成り立つ．ξ_A を擬エルミート枠とすると，

$$\xi_\alpha \circ \leftrightarrow \sqrt{2}\theta^{\bar{\alpha}} \wedge, \quad \xi_{\bar{\alpha}} \circ \leftrightarrow -\sqrt{2}\theta^{\bar{\alpha}} \vee,$$
$$\xi \circ \leftrightarrow (-1)^{q+1} i \qquad \text{on} \quad \wedge^{0,q} (H^c)^*$$

が成り立つ．

次にスピノール接続について述べる．スピノール接続は，M のレヴィ＝チヴィタ接続と $U(K^{-1})$ の接続から誘導された．$U(K^{-1})$ の接続に関して次の補題が成り立つ．

補題 1.26. エルミート丹野接続 ∇^{hT} の H_+ で縮約した $\sum \omega(\nabla^{hT})^\alpha_\alpha$ は，$U(K^{-1})$ の接続になる．

この補題から誘導される $\mathcal{S}^c$ 上の接続を $\nabla^{\mathcal{S}^c}$ と表記する．また，エルミート丹野接続 ∇^{hT} は，J を不変に保つことから，$\wedge^{0,*}H^c$ の接続に拡張される．この意味で，命題 1.25 の同型において，次の命題が成り立つ．

命題 1.27 ([16])**.** 命題 1.25 の同型において，$\nabla^{\mathcal{S}^c} = \nabla^{hT}$ が成り立つ．

2　フェファーマン空間

この章では，特に断らない限り接触リーマン多様体を $(M^{2n+1}, \theta : \xi, g, J)$ と表す．この章の目標は，M 上の主 S^1 束であるフェファーマン空間の構成とその基本的な性質を議論することである．序論でも述べたが，このフェファーマン空間は $(2n+1, 1)$ 型のローレンツ計量であるフェファーマン計量をもっている．この章の参考文献として，Lee [13]，長瀬 [17]，Blair-Dragomir [4] を挙げておく．

2.1　フェファーマン空間の定義

接触リーマン多様体 M 上には標準的複素ライン束 K が

$$K = \{\omega \in \wedge^{n+1} T^* M^c \mid X_- \rfloor \omega = 0 \quad (X_- \in H_-)\} \tag{2.1}$$

で定められる．この射影を $\pi^K : K \to M$ と表記する．ベクトル束としては $K \cong \wedge^n(H_+^*) \cong \wedge^n(H_-)$ であるが，(2.1) で定めることで，K には次で定まる $n+1$ 形式 $\mathcal{T}$ をもつ．

$$\mathcal{T}_\omega(X_1, \ldots, X_{n+1}) \coloneqq \omega_{\pi^K(\omega)}(\pi_*^K(X_1), \ldots, \pi_*^K(X_{n+1})). \tag{2.2}$$

この $\mathcal{T}$ を K 上のトートジー形式と呼ぶ．

この複素ライン束 K を用いて，M 上の主 S^1 束 $F(M)$ を

$$F(M) = K_0/\mathbb{R}_{>0} \tag{2.3}$$

と定める．ここで，$K_0 = K \backslash \{0\}$ であり，射影を $\pi : F(M) \to M$ とする．この主 S^1 束も，束としては次の同型をもつが，K から定まっていることが重要である．

K には，M の計量から標準的にエルミート計量が入る．そのエルミート計量によって M 上の主 $U(1)$ 束 $U(K)$ ができる． $S^1 = U(1) \subset \mathbb{C}$ とみなすことで，$F(M) \cong U(K)$ となる．

さらに，$F(M)$ は，主束として以下の特徴づけをもつ．まず，$H^1(M, S^1)$ は主 S^1 束の同値類とみなすことができ，$[F(M)] \in H^1(M, S^1)$ となる．また，H はエルミート束より，第一種チャーン類 $c_1(H) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ が定まる．これらについて，完全系列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to S^1 \to 1$ から定まる同型 $H^2(M, \mathbb{Z}) \cong H^1(M, S^1)$ において，

$$[F(M)] = [c_1(H)] \tag{2.4}$$

が成り立つ．これは，ある $F(M)$ 上の接続の曲率を π で押し出した ω_1 と，ある $K^{-1} \cong \wedge^n(H_+)$ の接続の曲率 ω_2 が存在して，$[\omega_1] = [\omega_2] \in H^1 M, \mathbb{Z})$ が成り立つことを示せばよい．

加えて，フェファーマン空間は，擬エルミート枠からできる局所自明化をもつ．開集合 $U \subset M$ 上の擬エルミート枠に対して，

$$F(M)|_U \cong U \times S^1, \quad [z.\theta_x \wedge \theta_x^1 \wedge \cdots \wedge \theta_x^n] \leftrightarrow (x, z) \tag{2.5}$$

とすれば，これらの変換関数は $U(1) = S^1$ に値をとり，$F(M)$ の局所自明化族である．上の (2.5) で得られる $F(M)|_U \to S^1$ を z_U と表す．

次に，$F(M)$ 上で重要なフェファーマン形式 σ を導入する．そのためにいくつの準備をしておく．

補題 2.1. 任意の $\omega \in K$ に対して，正値 λ_ω が一意に存在して，

$$i^{n^2} n! \theta \wedge (\xi \rfloor \omega) \wedge (\xi \rfloor \bar{\omega}) = \lambda_\omega \theta \wedge (d\theta)^n$$

となる．特に，$\omega \in \Gamma(K)$ に対して，上を満たす $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R}_{>0})$ が一意に存在する．

証明. 擬エルミート枠の双対枠 $(\theta, \theta^1, \ldots, \theta^{\bar{n}})$ をとると，K の定義より，

$$\omega = a\theta \wedge \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

と表される．よって，

$$\begin{aligned}
\theta \wedge (\xi \rfloor \omega) \wedge (\xi \rfloor \bar{\omega}) &= |a|^2 \theta \wedge \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n \wedge \theta^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge \theta^{\bar{n}} \\
&= (-1)^{n(n-1)/2} |a|^2 \theta \wedge \theta^1 \wedge \theta^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge \theta^n \wedge \theta^{\bar{n}} \\
&= i^{n(n-1)} |a|^2 \theta \wedge \theta^1 \wedge \theta^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge \theta^n \wedge \theta^{\bar{n}}
\end{aligned}$$

となる．一方，$d\theta = i \sum_{\alpha=1}^n \theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\alpha}}$ であるから，

$$\begin{aligned}
(d\theta)^n &= i^n \left(\sum \theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\alpha}} \right) \\
&= i^n n! \theta^1 \wedge \theta^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge \theta^n \wedge \theta^{\bar{n}}
\end{aligned}$$

となる．以上より，$\lambda_\omega = |a|^2$ となり，主張が示される． □

この補題より，包含写像 $\iota_\theta : F(M) \to K$ が

$$[\omega] \mapsto \frac{1}{\lambda_\omega} \omega \tag{2.6}$$

で定まる．この写像で引き戻した K 上のトートジー形式を

$$\mathcal{Z} = \iota_\theta^* \mathcal{T} \in \Gamma(\wedge^{n+1} T^* F(M)^c) \tag{2.7}$$

と表す．今，それぞれの関係は，

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, "\iota_\theta"] \arrow[d, "\pi"'] & K \arrow[d, "\pi^K"] \\
M \arrow[r, equal] & M
\end{tikzcd} \qquad \mathcal{Z} \xleftarrow{\iota_\theta^*} \mathcal{T}$$

となっている．この可換図式より，$\mathcal{Z}$ は擬エルミート枠の双対枠を用いて，

$$\mathcal{Z} = z_U.\pi^*(\theta) \wedge \pi^*(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n) \tag{2.8}$$

と表示される．また，$\pi^*\theta$ は $F(M)$ 上の 1 形式より，$\mathcal{Z}$ から $\pi^*\theta$ の引いた

$$\rho \coloneqq z_U.\pi^*(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n) \tag{2.9}$$

は $F(M)$ 上の n 形式になる．

命題 2.2 ([17])**.** 以下を満たす $F(M)$ 上の 1 形式 σ が一意に存在する．

$$d\mathcal{Z} = i(n+2)\sigma \wedge \mathcal{Z} + z_U.\pi^*\mathcal{W}_U,$$

$$\sigma \wedge d\rho \wedge \bar{\rho} = \mathrm{tr}(d\sigma) i\sigma \wedge (\pi^*\theta) \wedge \rho \wedge \bar{\rho}.$$

ここで，$\mathcal{W}_U$ とは，

$$\mathcal{W} = \frac{i}{2}\theta \wedge \sum (-1)^\alpha \theta^1 \wedge \cdots \wedge \left(\mathcal{Q}^\alpha_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta^{\bar{\gamma}}\right) \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

で定まる M 上の $n+2$ 形式である．また tr とは，$\Phi = i \sum \Phi_{\alpha\bar{\beta}} \pi^*\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}} + \cdots$ に対して，$\mathrm{tr}\,\Phi = \sum \Phi_{\alpha\bar{\alpha}}$ とするものである．

定義 2.3. 命題 2.2 で定まる $F(M)$ 上の 1 形式 σ をフェファーマン形式という．

次に，フェファーマン形式の性質を述べていく．局所表示 (2.5) について，z_U に多価関数 $\log : S^1 \to \mathbb{R}$ を合成した $\varphi_U = \log \circ z_U$ も多価関数になる．しかし，差が定数より外微分 $d\varphi$ は一価関数になる．また，値域を $[0, 2\pi)$ とすることで，局所的に

$$F(M)|_U \cong U \times [0, 2\pi), \quad [\omega_x] \mapsto (x, \varphi([\omega])) \tag{2.10}$$

と表すことができる．

命題 2.4 ([17])**.** フェファーマン形式 σ の擬エルミート枠による局所表示は

$$\sigma = \frac{1}{n+2}\left\{d\varphi_U + \pi^*\left(i\omega(\nabla^{hT})^\alpha_\alpha - \frac{s^{\nabla^{hT}}}{s(n+1)}\theta\right)\right\}$$

となる．

次に，フェファーマン形式によって $F(M)$ に接続が入ることを述べる．一般に，主 G 束 P の接続 $A \in \Gamma(T^*F(M)) \otimes \mathfrak{g}$ とは，次の 2 条件を満たすものである．

- $X \in \mathfrak{g}$ による基本ベクトル場 $X^\sharp$ に対して，$P(X^\sharp) = X$ となる．
- $R_g^*A = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} A$，つまり $Y \in T_pP$ に対して，$A_{p.g}(R_{g*}Y) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(AY)$ を満たす．

今，$F(M)$ は可換群 S^1 の主束であるから，同一視 $\mathfrak{u}(1)=i\mathbb{R}$ より，$F(M)$ の接続は $i\Gamma(T^*F(M))$ の元になる．

命題 2.5 ([17])**.** $i(n+2)\sigma$ は主 S^1 束 $F(M)$ の接続になる．また，この曲率は

$$i\pi^*\big(i\mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}}-\frac{d(s^{\nabla^{hT}}\theta)}{2(n+1)}\big)\in i\Gamma(\wedge^2T^*F(M)) \tag{2.11}$$

となる．

この接続より，接束は水平分布 $\mathcal{H}$ と垂直分布 $\mathcal{V}$ に分解され，$\mathcal{H}\cong\pi^*TM$ となる ([11])．その水平リフトを $\pi^*_{\mathcal{H}}$ と表す．さらに，$i(n+2)\in\mathfrak{u}(1)$ の基本ベクトルを Σ と表せば，$\mathcal{V}=\mathbb{R}_\Sigma$ となる[3]．よって，接束は

$$\begin{aligned}TF(M)&=\mathcal{H}\oplus\mathcal{V}\\&=\pi^*_{\mathcal{H}}TM\oplus\mathbb{R}_\Sigma\\&=\pi^*_{\mathcal{H}}H\oplus\mathbb{R}^2_{\pi^*_{\mathcal{H}}\xi,\Sigma}\end{aligned} \tag{2.12}$$

と表示される．

ここで，$(0,2)$ テンソル h を

$$h=\pi^*g|_H+2(\pi^*\theta\otimes\sigma+\sigma\otimes\pi^*\theta) \tag{2.13}$$

と定める．これは $(2n+1,1)$ 型のローレンツ計量になる．実際，(2.12) より，M の局所枠 $(e_1,\ldots,e_{2n},e_{2n+1}=\xi)$ を水平方向に持ち上げあることで，フェファーマン空間の接束の局所枠

$$\pi^*_{\mathcal{H}}e_1,\ \ldots\ ,\pi^*_{\mathcal{H}}e_{2n},\ \pi^*_{\mathcal{H}}\xi,\ \Sigma \tag{2.14}$$

が得られる．さらに，この後半部分をねじった局所枠

$$\pi^*_{\mathcal{H}}e_1,\ \ldots\ ,\pi^*_{\mathcal{H}}e_{2n},\ \frac{\pi^*_{\mathcal{H}}\xi+\Sigma}{2},\ \frac{\pi^*_{\mathcal{H}}\xi-\Sigma}{2} \tag{2.15}$$

が h の $(2n+1,1)$ 型正規直交枠になることが，簡単な計算より示される．

定義 2.6. (2.13) で定まるローレンツ計量をフェファーマン計量といい，組 $(F(M),h)$ をフェファーマン空間と呼ぶ．

最後に，フェファーマン空間の重要な性質である CR 共形不変性について述べてる．

まず，CR 共形変換後 $(M\mapsto\tilde{M})$ の $F(\tilde{M})$ は，局所的に

$$\begin{aligned}[z\tilde{\theta}\wedge\tilde{\theta}^1\wedge\cdots\wedge\tilde{\theta}^n]&=[ze^{(n+2)f}\theta\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^n]\\&=[z\theta\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^n]\end{aligned}$$

と計算されることより，$F(\tilde{M})=F(M)$ と同一視される．今，変換前を h_θ，変換後を $h_{\tilde{\theta}}$ と表すことにする．

命題 2.7 ([4], [17])**.** フェファーマン計量は CR 共形変換において，$h_{\tilde{\theta}}=e^{2f}h_\theta$ となる．特に，CR 共形変換で共形変換する．

[3] Σ は σ で正規化したものである．つまり，$\sigma(\Sigma)=1$．

2.2 フェファーマン空間の性質

フェファーマン空間 $(F(M),h)$ には，そのフェファーマン計量よりレヴィ＝チヴィタ接続 ∇^h が定まった．特に，リーマン計量の場合と同様にして，計量とカッコ積で，

$$h(\nabla^h_X Y, Z) = Xh(Y,Z) + Yh(Z,Y) - Zh(Y,X)$$
$$h([X,Y],Z) - h([Y,Z],X) + h([Z,X],Y) \tag{2.16}$$

で定まった．また，

$$\mathcal{F}(\sigma) \coloneqq \frac{i}{n+2}\big(\mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}} + \frac{id(s^{\nabla^{hT}}\theta)}{2(n+1)}\big) \in \Gamma(\wedge^2 T^*M) \tag{2.17}$$

としておく．これを用いると，接続 $i(n+2)\sigma$ の曲率は $i(n+2)\pi^*\mathcal{F}(\sigma)$ と表される（命題 2.5）． また，カッコ積について次の補題が成り立つ．

補題 2.8 ([11], [17])**.** $X, Y \in \Gamma(TM)$ について，

$$[\pi^*_{\mathcal{H}}X, \pi^*_{\mathcal{H}}Y] = \pi^*_{\mathcal{H}}[X,Y] - \mathcal{F}(\sigma)(X,Y)\Sigma \tag{2.18}$$

となる．

命題 2.9 ([17])**.** $F(M)$ のベクトル場 X, Y と $z \in U(1)$ について，

$$R_{z*}\nabla^h_X Y = \nabla^h_{R_{z*}X} R_{z*}Y \tag{2.19}$$

が成り立つ．

この命題より，レヴィ＝チヴィタ接続 ∇^h は $\pi : F(M) \to M$ で押し出すことで底空間 M 上の接続になる．つまり，M 上のベクトル場 X, Y について，

$$(\pi_*\nabla^h)_X Y \coloneqq \pi_*(\nabla^h_{\pi^*_{\mathcal{H}}X}\pi^*_{\mathcal{H}}Y) \tag{2.20}$$

が接続になる．さらに，擬エルミート枠を用いると，$F(M)$ の接続 ∇^h は底空間 M のエルミート丹野接続 ∇^{hT} を用いて表すことができる．

命題 2.10 ([17])**.** $(\pi_*\nabla^h)$ はトーションフリーとなり，M 上のベクトル場 X, Y について，

$$(\pi_*\nabla)_X Y = \nabla^{hT}_X Y + \frac{1}{2}g(X,JY)\xi + \theta(Y)\tau(X) - \theta(X)\big(\mathcal{F}^\sigma(Y) + \mathcal{F}(Y,\xi)\xi\big)$$
$$- \theta(Y)\big(\mathcal{F}^\sigma(X) + \mathcal{F}(\sigma)(X,\xi)\xi\big) \tag{2.21}$$

となる．ここで，$\mathcal{F}^\sigma(X)$ とは，$g(Y, \mathcal{F}^\sigma(X)) = \mathcal{F}(\sigma)(Y,X)$ で定まるベクトル場である．

次に，局所表示の関係を紹介する．まず，擬エルミート枠 $(\xi_0=\xi,\xi_1,\dots,\xi_{\bar{n}})$ によるエルミート丹野接続の接続形式を $\nabla^{hT}\xi_B=\sum\xi_A\cdot\omega(\nabla^{hT})^B_A$ とし，$F(M)$ の枠 $(W_1,\dots,W_{2n+2})=(\pi^*_{\mathcal{H}}\xi_1,\dots,\pi^*_{\mathcal{H}}\xi_{\bar{n}},\pi^*_{\mathcal{H}}\xi,\Sigma)$ によるレヴィ＝チヴィタ接続 ∇^h の接続形式を $\nabla^hW_B=\sum W_A\cdot\omega(\nabla^h)^B_A$ と表す．

命題 2.11 ([17])**.** (1) $\omega(\pi_*\nabla^h)^A_B$ に関して以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\omega(\pi_*\nabla^h)^\alpha_\beta &= \omega(\nabla^T)^\alpha_\beta+\mathcal{F}(\sigma)(\xi_\beta,\xi_{\bar\alpha})\theta,\\
\omega(\pi_*\nabla^h)^{\bar\alpha}_\beta &= \omega(\nabla^T)^{\bar\alpha}_\beta+\mathcal{F}(\sigma)(\xi_\beta,\xi_\alpha)\theta,\\
\omega(\pi_*\nabla^h)^0_\beta &= \frac{i}{2}\theta^{\bar\beta},\\
\omega(\pi_*\nabla^h)^{\bar\alpha}_0 &= -\sum_\gamma\mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar\alpha},\xi_\gamma)\theta^\gamma-\sum_\gamma\bigl(\mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar\alpha},\xi_{\bar\gamma})-\tau^\alpha_{\bar\gamma}\bigr)\theta^{\bar\gamma}\\
&\quad-2\mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar\alpha},\xi)\theta,\\
\omega(\pi_*\nabla^h)^0_0 &= 0.
\end{aligned}$$

(2) $\omega(\nabla^h)$ に関して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\omega(\nabla^h)^\alpha_\beta &= \pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)^\alpha_\beta+i\delta_{\alpha\beta}\sigma, &\quad \omega(\nabla^h)^{\bar\alpha}_\beta &= \pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)^{\bar\alpha}_\beta,\\
\omega(\nabla^h)^{2n+1}_\beta &= \pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)^0_\beta, &\quad \omega(\nabla^h)^{\bar\alpha}_{2n+1} &= \pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)^\alpha_0,\\
\omega(\nabla^h)^{2n+2}_\beta &= -\frac{1}{2}\overline{\pi^*\omega(\pi_*\nabla)^\beta_0}, &\quad \omega(\nabla^h)^\alpha_{2n+2} &= -2\,\overline{\pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)^0_\alpha},\\
\omega(\nabla^h)^{2n+1}_{2n+1} &= \omega(\nabla^h)^{2n+2}_{2n+1}=\omega(\nabla^h)^{2n+1}_{2n+2}=\omega(\nabla^h)^{2n+2}_{2n+2}=0.
\end{aligned}$$

上の命題から ∇^h を ∇^{hT} を用いると次のように表せる．

系 2.12. 局所枠において次がいえる．

$$\begin{aligned}
\omega(\nabla^h)^\alpha_\beta &= \pi^*\bigl(\omega(\nabla^T)^\alpha_\beta+\mathcal{F}(\sigma)(\xi_\beta,\xi_{\bar\alpha})\theta\bigr)+i\delta_{\alpha\beta}\sigma,\\
\omega(\nabla^h)^{\bar\alpha}_\beta &= \pi^*\bigl(\omega(\nabla^T)^{\bar\alpha}_\beta+\mathcal{F}(\sigma)(\xi_\beta,\xi_\alpha)\theta\bigr),\\
\omega(\nabla^h)^{2n+1}_\beta &= \frac{i}{2}\pi^*\theta^{\bar\beta},\\
\omega(\nabla^h)^{\bar\alpha}_{2n+1} &= -\pi^*\bigl(\sum_\gamma\mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar\alpha},\xi_\gamma)\theta^\gamma\bigr)-\pi^*\sum_\gamma\bigl(\mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar\alpha},\xi_{\bar\gamma})-\tau^\alpha_{\bar\gamma}\bigr)\theta^{\bar\gamma}\\
&\quad-2\pi^*\bigl(\mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar\alpha},\xi)\theta\bigr),\\
\omega(\nabla^h)^{2n+2}_\beta &= \frac{1}{2}\pi^*\bigl(\sum_\gamma\mathcal{F}(\sigma)(\xi_\alpha,\xi_{\bar\gamma})\theta^\gamma\bigr)+\frac{1}{2}\pi^*\sum_\gamma\bigl(\mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar\alpha},\xi_{\bar\gamma})-\tau^\alpha_{\bar\gamma}\bigr)\theta^{\bar\gamma}\\
&\quad+\pi^*\bigl(\mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar\alpha},\xi))\theta\bigr),\\
\omega(\nabla^h)^\alpha_{2n+2} &= i\pi^*\theta^\alpha,\\
\omega(\nabla^h)^{2n+1}_{2n+1} &= \omega(\nabla^h)^{2n+2}_{2n+1}=\omega(\nabla^h)^{2n+1}_{2n+2}=\omega(\nabla^h)^{2n+2}_{2n+2}=0.
\end{aligned}$$

3　ローレンツスピン幾何

ここではローレンツスピン幾何について説明していく．スピン幾何の基本的な事柄は，[12]，[1]，[15]，[7] に詳細に載っている．特にディラック作用素やペンローズ作用素については，[7] と [9] に包括的にまとまっている．

3.1　ローレンツ計量とローレンツスピン構造

実ベクトル空間 V^{m+1} のローレンツ計量 η とは，ある基底 $(e_1, \ldots, e_{m+1})$ で

$$\eta = (e^1)^2 + \cdots + (e^n)^2 - (e^{m+1})^2 \tag{3.1}$$

と表される 2 次形式である．今後，ローレンツ計量といえば，η のことを意味するものとする．

ローレンツ計量の直交群 $O(V, \eta)$ と特殊直交群 $SO(V, \eta)$ は，それぞれ

$$O(V, \eta) \coloneqq \{A \in GL(V) \mid \eta(Av) = \eta(v) \quad (v \in V)\},$$

$$SO(V, \eta) \coloneqq O(V, \eta) \cap SL(V, \eta)$$

で与えられる．また，$\mathbb{R}^{m,1}$ の直交群と特殊直交群を $O(m, 1)$ と $SO(m, 1)$ と表すことにする．一般のローレンツ空間 V は，直交基底を取ることで，等長同型 $V \cong \mathbb{R}^{m,1}$ となる．特に，直交群や特殊直交群は，$O(m, 1)$ と $SO(m, 1)$ と同型になる．

直交群 $O(m, 1)$ は，包含 $O(m, 1) \subset GL(m+1)$ より，行列の極分解を用いることで，

$$O(m, 1) \cong \begin{pmatrix} O(m) & O \\ O & \pm 1 \end{pmatrix} \times \bigl(H_+(m+1) \cap O(m, 1)\bigr)$$

となる．ここで，$H_+(m+1)$ は対称かつ正定値な行列全体である．右辺の $H_+(m+1) \cap O(m, 1)$ については次の命題が成り立つ．

命題 3.1.

$$\begin{aligned} &H_+(m+1) \cap O(m, 1) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & d \end{pmatrix} \in M(m+1) \;\middle|\; \begin{array}{c} A = {}^t A \in M(m),\ b \in \mathbb{R}^m, \\ d^2 = {}^t b b + 1,\ A^2 = 1 + b\, {}^t b,\ Ab = db \end{array} \right\} \end{aligned}$$

特に，$H_+(m+1) \cap O(m, 1) \cong \mathbb{R}^m$ となる．

また，$H_+(m+1) \subset GL_+(m+1)$ より，次が成り立つ．

系 3.2.

$$SO(m,1) \cong \begin{pmatrix} \pm SO(m) & O \\ O & \pm 1 \end{pmatrix} \times \bigl(H_+(m+1) \cap O(m,1)\bigr).$$

式中の $\pm$ は符号同順である．

系 3.3. $O(m,1)$ の連結成分は 4 つで，$SO(m,1)$ の連結成分は 2 つである．

系 3.4. $SO(m,1)$ の連結成分のうち恒等射をもつものを $SO_0(m,1)$ とすると，その基本群は $\pi_1(SO_0(m,1)) = \mathbb{Z}_2$ となる．

次に，$SO(m,1)$ の被覆射であるローレンツスピン群 $\mathrm{Spin}(m,1)$ について述べていく．$\mathrm{Spin}(m,1)$ は，クリフォード代数 $Cl_{m,1}$ を用いて，

$$\mathrm{Spin}(m,1) = \{v_1 \circ \cdots \circ v_{2n} \mid v_k \in \mathbb{R}^{m,1},\ \eta(v_k) = \pm 1\} \tag{3.2}$$

と定める．ただし，$\mathbb{R}^{m,1} \subset Cl(m,1)$ であり，$\circ$ はクリフォード作用である．また，

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}(m,1) &\to SO(m,1), \\ a &\mapsto (v \mapsto a \circ v \circ a^{-1}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

は二重被覆射である．特に，系 3.4 より，$\mathrm{Spin}_0(m,1)$ は $SO_0(m,1)$ の普遍被覆群になる．

クリフォード代数の既約表現から誘導される $\mathrm{Spin}(m,1)$ の表現をローレンツスピン表現と呼ぶ．ローレンツスピン群がコンパクトリー群であることから，表現空間にはエルミート計量が入り，ローレンツスピン表現は

$$\Delta_{m,1} : \mathrm{Spin}(m,1) \to U(S_{m,1}) \tag{3.4}$$

と表される．

最後に，多様体上のローレンツスピン構造について簡単に復習する．ローレンツ計量をもつ有向多様体 $M^{m,1} = (M^{m+1}, g)$ を考える．各点 x では

$$SO_x(M,g) = \{(e_1, \ldots, e_{m+1}) \mid (T_xM, g_x) \text{ の正の正規直交枠 }\}$$

が定まり，これより

$$SO(M,g) = \bigcup_{x \in M} SO_x(M,g)$$

が定まる．

定義 3.5. 主ローレンツスピン束 $\mathrm{Spin}(M,g)$ と束写像 $\Phi : \mathrm{Spin}(M,g) \to SO(M,g)$ が存在して，$a \in \mathrm{Spin}(m,1)$ に対して，

$$\Phi(p.a) = \Phi(p).\,\mathrm{Ad}(a)$$

が成り立つとする．このとき，$(\mathrm{Spin}(M,g), \Phi)$ をスピン構造といい，スピン構造が付随している多様体をスピン多様体と呼ぶ．

スピン多様体 $M^{m,1}$ には，ローレンツスピン表現 $\Delta_{m,1} : \mathrm{Spin}(m,1) \to GL(S_{m,1})$ から

$$\not{S} = \mathrm{Spin}(M) \times_{\Delta_{m,1}} S_{m,1}$$

が定まる．また，クリフォード束

$$\begin{aligned}\mathbb{C}l(M) &\coloneqq SO(M,g) \times_{\mathrm{cano}} \mathbb{C}l_n \\ &= \mathrm{Spin}(M,g) \times \mathbb{C}l_n\end{aligned}$$

より，スピノール束 $\not{S}$ はクリフォード作用

$$\circ : \Gamma(\mathbb{C}l(M)) \times \Gamma(\not{S}) \to \Gamma(\not{S}), \quad (a,s) \mapsto a \circ s$$

をもつ．特に，$TM \subset \mathbb{C}l(M)$ であり，任意のクリフォード作用は局所的には TM の作用から定まるに注意しておく．

この $\not{S}$ には，(3.4) より標準的なエルミート計量が入る．さらに，計量と整合性を持つ接続は，スピン構造の束写像によって，スピノール束に接続を誘導させる．特に，レヴィ＝チヴィタ接続から誘導される接続をスピン接続と呼ぶ．

3.2 クリフォード表現とスピノール束

ローレンツ計量の正の符号が奇数の場合，クリフォード表現は特殊な分解をもつ．ここではそのクリフォード表現の分解について議論する．ただし，正の符号が偶数の場合にも，同様な議論をすることができる．クリフォード代数の一般的な表現としては Lawson–Michelsohn [12] を参照してほしい．ここで扱うローレンツ型のクリフォード代数の表現については，Baum [5] と長瀬 [16] を参考にしている．以下では，ローレンツ計量の符号を $(2n+1,1)$ とする．

クリフォード代数 $\mathbb{C}l(2n+1,1)$ は

$$\begin{aligned}\mathbb{C}l(2n+1,1) &= \mathbb{C}l(2n,0) \otimes \mathbb{C}l(1,1), \\ e_i &\leftrightarrow \begin{cases} e_i \otimes e_1 \circ e_2 & i \le 2n, \\ 1 \otimes e_1 & i = 2n+1, \\ 1 \otimes e_2 & i = 2n+2 \end{cases}\end{aligned} \tag{3.5}$$

と分解される．ただし，e_i は正規直交枠である．この分解より，クリフォード代数 $\mathbb{C}l(2n+1,1)$ の既約表現 $S_{2n+1,1}$ は，$\mathbb{C}l(2n,0)$ の既約表現 $S_{2n,1}$ と $\mathbb{C}l(1,1)$ の既約表現 $S_{1,1}$ を用いて，

$$S_{2n+1,1} = S_{2n,0} \otimes S_{1,1} \tag{3.6}$$

となる．加えて，同型 (3.5) では，

$$\begin{aligned} i^n e_1 \circ \cdots \circ e_{2n+2} &\leftrightarrow i^n e_1 \circ \cdots \circ e_{2n} \otimes (e_1 \circ e_2)^{2n+1} \\ &= i^n e_1 \circ \cdots \circ e_{2n} \otimes e_1 \circ e_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

が成り立つ．これは，$\omega^c_{p,q} = i^{[(p+1-q)/2]} e_1 \circ \cdots e_n$ と定めると，$\omega^c_{2n+1,1} \leftrightarrow \omega^c_{2n,0} \otimes \omega^c_{1,1}$ と表される[4]．

一方，$(\omega^c_*)^2 = 1$ $(* = (2n+1,1),(2n,0),(1,1))$ より，各表現空間は

$$\begin{aligned} S_{2n+1,1} &= S^+_{2n+1,1} \oplus S^-_{2n+1,1}, \\ &\qquad S^\pm_{2n+1,1} = \{\phi \in S_{2n+1,1} \mid \omega^c_{2n+1,1}\phi = \pm\phi\}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} S_{2n,0} &= S^+_{2n,0} \oplus S^-_{2n,0}, \\ &\qquad S^\pm_{2n,0} = \{\phi \in S_{2n,0} \mid \omega^c_{2n,0}\phi = \pm\phi\}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= S^+_{1,1} \oplus S^-_{1,1}, \\ &\qquad S^\pm_{1,1} = \{\phi \in S_{1,1} \mid \omega^c_{1,1}\phi = \pm\phi\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

と分解する．この分解を用いることで，表現空間は，さらに

$$\begin{aligned} S_{2n+1,1} &= S^+_{2n+1,1} \oplus S^-_{2n+1,1} \\ &= \left(S^+_{2n,0} \otimes S^+_{1,1} \oplus S^-_{2n,0} \otimes S^-_{1,1}\right) \oplus \left(S^+_{2n,0} \otimes S^-_{1,1} \oplus S^-_{2n,0} \otimes S^+_{1,1}\right) \\ &= \left(S^+_{2n,0} \oplus S^-_{2n,0}\right) \otimes S^+_{1,1} \oplus \left(S^+_{2n,0} \oplus S^-_{2n,0}\right) \otimes S^-_{1,1} \\ &\cong \left(S^+_{2n,0} \oplus S^-_{2n,0}\right) \oplus \left(S^+_{2n,0} \oplus S^-_{2n,0}\right) \\ &= S_{2n,0} \oplus S_{2n,0} \end{aligned} \tag{3.11}$$

と表される．４つ目の等式で $\dim S^\pm_{1,1} = 1$ を用いている．

次にこの分解によってクリフォード作用がどのように変わるかをみていく．

まず，表現 $\rho_{1,1} : \mathbb{C}l(1,1) \to S_{1,1}$ は，$S_{1,1} = \mathbb{C}^2$ かつ

$$\rho(e_1) = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(e_2) = \sigma_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

$$\rho(e_1 \circ e_2) = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

と表される[5]．今，$e_1 \circ e_2 = -\sigma_3$ の固有値 ± 1 の固有ベクトル $v_\pm$ として

$$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

をとることができる．表現空間 $S_{1,1}$ は

$$S_{1,1} = S^+_{1,1} \oplus S^-_{1,1}, \quad S^\pm_{1,1} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\langle v_\pm \rangle \tag{3.15}$$

[4] ω^c_* は正規直交基底の取り方によらない．また，$(\omega^c_*)^2 = 1$ を満たす．

[5] $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はパウリ行列．

と表される．$\sigma_1(v_\pm) = \pm v_\mp$，$\sigma_2(v_\pm) = -v_\mp$ となることに注意する．これよりスピノール表現の分解 (3.11) において，$e_i \in \mathbb{C}l(2n+,1)$ の $(\phi,\psi) \in S_{2n} \oplus S_{2n}$ への作用は，

$$e_i \circ (\phi,\psi) = \begin{cases} (e_i \circ \phi, e_i \circ \psi) & i \leq 2n, \\ (-\psi, \phi) & i = 2n+1, \\ (-\psi, -\phi) & i = 2n+2 \end{cases} \tag{3.16}$$

となる．ここで，$e_i \circ \phi$ は $\mathbb{C}l(2n,0)$ の作用である．

3.3 ディラック作用素とペンローズ作用素

ローレンツスピン多様体 (M,g) 上のスピノール束 $\not{S}$ には，スピノール接続

$$\nabla^{\not{S}} : \Gamma(\not{S}) \to \Gamma(T^*M \otimes \not{S})$$

があることは既に述べた．計量 g による同一視 $T^*M \cong TM$ によって，$\nabla^{\not{S}}$ の値域を $\Gamma(TM \otimes \not{S})$ とみなせる 一方，$TM \subset \mathbb{C}l(M)$ より，クリフォード作用 $\circ$ によって，束写像

$$\mu : TM \otimes \not{S} \to \not{S}, \quad X \otimes s \mapsto X \circ s$$

ができる．さらに，この束写像から束の短完全系列

$$0 \to \ker\mu \xrightarrow{\iota} TM \otimes \not{S} \xrightarrow{\mu} \not{S} \to 0$$

ができる．今，$\not{S}$ には標準的なエルミート計量が入っていた．これと計量 g によって $TM \otimes \not{S}$ には計量が入り，$TM \otimes \not{S}$ から $\ker\mu$ への直交射影 p ができる．この p は $p \circ \iota = 1$ であり，分解

$$TM \otimes \not{S} \cong \not{S} \oplus \ker\mu, \quad \varphi \mapsto (\mu(\varphi), p(\varphi))$$

を与える．

定義 3.6. $D^{\not{S}} := \mu \circ \nabla^{\not{S}}$ をディラック作用素，$P^{\not{S}} := p \circ \nabla^{\not{S}}$ をペンローズ作用素と呼ぶ．ここで，$\circ$ は写像の合成である．また，$\varphi \in \Gamma(\not{S})$ のうち, $D^{\not{S}}\varphi = 0$ となるものを調和スピノールといい，$P^{\not{S}}\varphi = 0$ となるものをトゥイスタースピノールという．

ディラック作用素とペンローズ作用素の関係は次の可換図で表すことができる．

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Gamma(\not{S}) \\
\Gamma(\not{S}) \arrow[r, "\nabla^{\not{S}}"] \arrow[urrr, bend left, "D^{\not{S}}"] \arrow[drrr, bend right, "P^{\not{S}}"'] & \Gamma(T^*M \otimes \not{S}) \arrow[r, equal, "g"] & \Gamma(TM \otimes \not{S}) \arrow[ur, "\mu"] \arrow[dr, "p"'] & \\
 & & & \Gamma(\ker \mu)
\end{tikzcd}$$

次に，ディラック作用素とペンローズ作用素の枠表示を述べる．

$M^{m,1}$ の正規直交枠を $(e_1, \cdots, e_m, e_{m+1})$ で表し，ϵ_{ij} を

$$\epsilon_{ij} = e^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \leq m, \\ -1 & i = j > m, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする．さらに，$\epsilon_i = \epsilon_{ii}$ とする．g によって，$e_i \leftrightarrow \epsilon_i e^i$ と表せることより，定義から

$$D^{\not{S}} = \sum \epsilon_i e_i \circ \nabla^{\not{S}}_{e_i}$$

と表せることがわかる．また，束の射影 p が

$$p(X \otimes s) = X \otimes s + \frac{1}{n} \sum \epsilon_i e_i \otimes e_i \circ X \circ s$$

であることより，

$$\begin{aligned}
P^{\not{S}} &= p\big(\sum_i \epsilon_i e_i \otimes \nabla^{\not{S}}_{e_i}\big) \\
&= \sum_i \epsilon_i p\big(e_i \otimes \nabla^{\not{S}}_{e_i}\big) \\
&= \sum_i \epsilon_i \big(e_i \otimes \nabla^{\not{S}}_{e_i} + \frac{1}{n} \sum_j \epsilon_j e_j \otimes e_j \circ e_i \circ \nabla^{\not{S}}_{e_i}\big) \\
&= \sum_i \epsilon_i e_i \otimes \nabla^{\not{S}}_{e_i} + \frac{1}{n} \sum_j \epsilon_j e_j \otimes e_j \circ D^{\not{S}} \\
&= \sum_i \epsilon_i e_i \otimes \big(\nabla^{\not{S}}_{e_i} + \frac{1}{n} e_i \circ D^{\not{S}}\big)
\end{aligned}$$

となる．この表示より，任意の i で

$$\big(\nabla^{\not{S}}_{e_i} + \frac{1}{n} e_i \circ D^{\not{S}}\big)\varphi = 0 \tag{3.17}$$

となることが，φ がトゥイスタースピノールになる同値条件であることがわかる．さらに，トゥイスタースピノールの同値条件として次がいえる．

補題 3.7. $\varphi \in \Gamma(\not{S})$ について，以下は同値である．

(1) φ はトゥイスタースピノールである．

(2) ある $\psi \in \Gamma(\mathcal{S})$ が存在して，$|g(X,X)| = 1$ となるベクトル場 X について $g(X,X)X \circ \nabla^{\mathcal{S}}_X \varphi = \psi$ となる．

(3) ある $\psi \in \Gamma(\mathcal{S})$ が存在して，任意の i で $\epsilon_i e_i \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} \varphi = \psi$ となる．

証明． (1) $\Rightarrow$ (2) : $X = \sum X^i e_i$ と表す．(3.17) より，

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum X^i X \circ \big(\nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} + \frac{1}{n} e_i \circ D^{\mathcal{S}}\big)\varphi \\
&= X \circ \nabla^{\mathcal{S}}_X \varphi + \frac{1}{n} X \circ X \circ D^{\mathcal{S}} \varphi \\
&= X \circ \nabla^{\mathcal{S}}_X \varphi - \frac{g(X,X)}{n} D^{\mathcal{S}} \varphi
\end{aligned}
$$

となる．よって，$\psi = \frac{1}{n} D^{\mathcal{S}} \varphi$ とおけばよい．
(2) $\Rightarrow$ (3) は明らか．残りは (3) $\Rightarrow$ (1) を示せばよい．(3) を i に関して和をとれば $D^{\mathcal{S}} \varphi = n\psi$ を得，また (3) の両辺に $-e_i$ を作用させることで，$\nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} \varphi = -e_i \circ \psi$ を得る．よって，

$$
\big(\nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} + \frac{1}{n} e_i \circ D^{\mathcal{S}}\big)\varphi = -e_i \circ \psi + \frac{1}{n} e_i \circ (n\psi) = 0
$$

となる．□

最後に，有名なリヒネロビッチの定理を紹介する．

命題 3.8.

$$
(D^{\mathcal{S}})^2 = -\sum \epsilon_i \Big(\nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} \nabla^{\mathcal{S}}_{e_i} - \nabla^{\mathcal{S}}_{\nabla^g_{e_i} e_i}\Big) + \frac{s(\nabla^g)}{4}
$$

4　フェファーマン空間のローレンツスピン幾何

この節では，今までの議論を踏まえて，フェファーマン空間上のローレンツスピン幾何を議論する．まず，フェファーマン空間には標準ローレンツスピン構造が入ることを述べ，その後にトゥイスタースピノールについて論じていく．

我々の議論に入る前に，先行研究との違いを明確にしておく．フェファーマン空間上のローレンツスピン幾何の先行研究として，Baum の研究がある．彼女の研究と我々の研究は類似している点もあるが，大きく異なる点がある．その最も大きな点は，彼女の研究では接触リーマン多様体にスピン構造を仮定している点である．我々の研究では，その仮定を課せずに議論している．また，彼女の研究では田中・ウェブスター接続を用いているが，我々はエルミート丹野接続を用いている．Baum の研究は最後に紹介することにする．

この節では，接触リーマン多様体を $(M^{2n+1}, \theta : \xi, g, J)$ と表す．

4.1　標準ローレンツスピン構造

4.1.1　標準ローレンツスピン構造

フェファーマン空間の接束 $TF(M)$ は, 計量を含めて

$$(TF(M), h) = (\pi^*_{\mathcal{H}}H, \pi^*g|_H) \oplus (\mathbb{R}_{\pi^*_{\mathcal{H}}\xi,\Sigma}, h^e) \tag{4.1}$$

と分解された．ここで，$h^c = \pi^*\theta \otimes \sigma + \sigma \otimes \pi^*\theta$ である．また，$\pi^*_{\mathcal{H}}J := \pi^*_{\mathcal{H}} \circ J \circ \pi_*$ によって，$\pi^*_{\mathcal{H}}H$ はエルミート束 $(\pi^*_{\mathcal{H}}H, \pi^*_{\mathcal{H}}J, \pi^*g|_H)$ になる．よって，$\pi^*_{\mathcal{H}}H$ は標準複素スピン構造をもつ．この標準複素スピン構造は，π^*K^{-1} を用いて，

$$\Phi^c : \mathrm{Spin}^c(\pi^*_{\mathcal{H}}H) \to SO(\pi^*_{\mathcal{H}}H) \times U(\pi^*K^{-1}) \tag{4.2}$$

と表される．

加えて，エルミート束 $\pi^*_{\mathcal{H}}H$ に関して次の補題が成り立つ．

補題 4.1. $\pi^*_{\mathcal{H}}H$ の第一種チャーン類は $c_1(\pi^*_{\mathcal{H}}H) = 0$ となる．

証明. まず，$c_1(\pi^*_{\mathcal{H}}H) = c_1(\wedge^n \pi^*_{\mathcal{H}}H) = c_1(\pi^*K)$ である．また，次のトム・ギジン完全系列が成り立つ．

$$\cdots \to H^0(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f} H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^2(F(M), \mathbb{Z}) \to \cdots \tag{4.3}$$

ここで，f はカップ積 $\smile$ を用いて $f(a) = a \smile c_1(K)$ で表される．これより

$$c_1(\pi^*_{\mathcal{H}}H) = c_1(\pi^*K) = (\pi^*f)(1) = 0 \tag{4.4}$$

となる．　□

この補題より，エルミート枠を集めた主束 $U(\pi_{\mathcal{H}}^* H)$ は，以下のようにして主 $SU(2n)$ 束に簡約する．射影 $p : TF(M) \to F(M)$ と (2.10) の合成を

$$\Theta_U \coloneqq \varphi_U \circ p : TF(M)|_{\pi^{-1}(U)} \to [0, 2\pi) \tag{4.5}$$

とする．これを用いて，擬エルミート枠を持ち上げた $\pi_{\mathcal{H}}^* \xi_\alpha$ を

$$\xi_\alpha^F \coloneqq \pi_{\mathcal{H}}^* \xi_\alpha \cdot e^{-i\Theta_U/n}, \quad \xi_{\bar{\alpha}}^F = \overline{\xi_\alpha^F} \tag{4.6}$$

と定める．特に，$(H, J) \cong H_+$ より，$\xi_\cdot^F$ は H の局所枠と見なせる．これより

$$SU(\pi_{\mathcal{H}}^* H) = \bigcup \xi_\cdot^F \cdot SU(n) \tag{4.7}$$

とする．これは $U(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \supset SU(\pi_{\mathcal{H}}^* H)$ となる．また，次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}_{2n} \arrow[d, "\mathrm{Ad}^c"] \\ SU(n) \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "\iota \times \det"'] & SO(2n) \times 1 \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

また，$SO(\pi_{\mathcal{H}}^* H) = SU(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \times SO(2n)$ である．これより，

$$\mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \coloneqq SU(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \times_j \mathrm{Spin}_{2n}, \tag{4.9}$$

$$\Phi_1 : \mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \to SO(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \tag{4.10}$$

が定まる．さらに，$(\mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^* \xi, \Sigma}, h^e)$ はローレンツ計量を持つ自明束であるから，Spin_2 の自明束を $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^2_{\phi\xi,\Sigma})$ より

$$\Phi_2 : \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^* \xi, \Sigma}) \to SO(\mathbb{R}^s, h^e) \tag{4.11}$$

を得る．これらと，$SO(TF(M)) = (SO(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \times SO(\mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^* \xi, \Sigma})) \times_{\mathrm{cano}} SO_0(2n+1, 1)$ と表されることから，

$$\mathrm{Spin}(TF(M)) \coloneqq (\mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \times \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^2)) \times_{\mathrm{cano}} \mathrm{Spin}_0(2n+1, 1), \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Spin}(TF(M)) &\to SO(TF(M)), \\ [(s_1, s_2), a] &\mapsto [\Phi_1(s_1), \Phi_2(s_2)].\,\mathrm{Ad}(a) \end{aligned} \tag{4.13}$$

で定まる $(\Phi, \mathrm{Spin}(TF(M)))$ は $F(M)$ のローレンツスピン構造になる．

定義 4.2. 上の式 (4.12) と (4.13) から定まる $(\Phi, \mathrm{Spin}(TF(M))$ をフェファーマン空間の標準ローレンツスピン構造と呼ぶ．

4.1.2 スピノール束とクリフォード作用

ローレンツスピン多様体 $(F(M), h)$ 上で考える（[16], [20]）．分解 $TF(M) = \pi_{\mathcal{H}}^* H \oplus \mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^*\xi,\Sigma}$ の各成分に制限すると，$\pi_{\mathcal{H}}^* H$ のスピン構造 (4.10) と $\mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^*\xi,\Sigma}$ のスピン構造 (4.11) を得た．さらに，各 ω_*^c はそれぞれのスピノール束で大域的切断になっることに気を付けると，表現空間の分解と同様に, スピノール束は

$$
\begin{aligned}
\cancel{S}(TF(M)) &= \cancel{S}^+(TF(M)) \oplus \cancel{S}^-(TF(M)), \\
&\qquad \cancel{S}^{\pm}(TF(M)) = \{\phi \in \Gamma(\cancel{S}(TF(M))) \mid \omega_{2n+1,1}^c \phi = \pm\phi\}, \qquad (4.14) \\
\cancel{S}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) &= \cancel{S}^+(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \oplus \cancel{S}^-(\pi_{\mathcal{H}}^* H), \\
&\qquad \cancel{S}^{\pm}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) = \{\phi \in \Gamma(\cancel{S}(\pi_{\mathcal{H}}^* H)) \mid \omega_{2n,0}^c \phi = \pm\phi\}, \qquad (4.15) \\
\cancel{S}(\mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^*\xi,\Sigma}) &= \cancel{S}^+(\mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^*\xi,\Sigma}) \oplus \cancel{S}^-(\mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^*\xi,\Sigma}), \\
&\qquad \cancel{S}^{\pm}(\mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^*\xi,\Sigma}) = \{\phi \in \Gamma(\cancel{S}(\mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^*\xi,\Sigma})) \mid \omega_{1,1}^c \phi = \pm\phi\} \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

と分解される．特に，$\cancel{S}^{\pm}(*)$ は $F(M)$ 上のベクトル束になっている．よって，(3.11) と同様にして，

$$\cancel{S}(TF(M)) \cong \cancel{S}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \oplus \cancel{S}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \qquad (4.17)$$

と分解されることがわかる．また，$\pi_{\mathcal{H}}^* H$ がエルミート束であったから，$\pi_{\mathcal{H}}^* K^{-1} = \wedge_{\mathbb{C}}^n \pi_{\mathcal{H}}^* H$ に気を付けると，$\cancel{S}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) = \wedge^{0,*}(\pi_{\mathcal{H}}^* H^c)^* \otimes \pi_{\mathcal{H}}^* K^{1/2}$ となった．これを用いると，上式は，ベクトル束として

$$\cancel{S}(TF(M)) \cong \left(\wedge^{0,*}(\pi_{\mathcal{H}}^* H^c)^* \otimes \pi_{\mathcal{H}}^* K^{1/2}\right) \oplus \left(\wedge^{0,*}(\pi_{\mathcal{H}}^* H^c)^* \otimes \pi_{\mathcal{H}}^* K^{1/2}\right) \qquad (4.18)$$

と表される．以下，$\cancel{S}(T(F(M))$ を単純に $\cancel{S}$ と表記する．

次に，フェファーマン空間の特殊な局所枠によるクリフォード作用を紹介する．まず，射影 $p : TF(M) \to F(M)$ と (2.10) の合成を

$$\Theta_U \coloneqq \varphi_U \circ p : TF(M)|_{\pi^{-1}(U)} \to [0, 2\pi) \qquad (4.19)$$

とする．これを用いて，擬エルミート枠を持ち上げた $\pi_{\mathcal{H}}^* \xi_\alpha$ を以下のように変形させる．

$$\xi_\alpha^F \coloneqq \pi_{\mathcal{H}}^* \xi_\alpha \cdot e^{-i\Theta_U/n}, \qquad \xi_{\bar\alpha}^F = \overline{\xi_\alpha^F} \qquad (4.20)$$

特に，$(H, J) = H_+$ より $SU(H)$ の局所枠と見なせる．また，$e_{2\alpha-1}^F = (\xi_\alpha^F + \xi_{\bar\alpha}^F)/\sqrt{2}$ と $e_{2\alpha}^F = (-\xi_\alpha^F + \xi_{\bar\alpha}^F)/\sqrt{-2}$, $\xi^F = \pi_{\mathcal{H}}^* \xi$ とおくと，

$$e_1^F, \ldots, e_{2n}^F, \frac{\xi^F + \Sigma}{2}, \frac{\xi^F - \Sigma}{2} \qquad (4.21)$$

が $TF(M)$ の局所枠になる．この ξ_α^F のクリフォード作用はスピノール束の同型 (4.18) に関しては以下のようになる．

命題 4.3. 同型 (4.18) に関して，$(\phi,\psi)\in \not{S}$ へのクリフォード作用は次で表される．

$$\xi^F_\alpha \circ (\phi,\psi) = (\sqrt{2}\theta^{\bar{\alpha}}_F \wedge \phi, \sqrt{2}\theta^{\bar{\alpha}}_F \wedge \phi), \tag{4.22}$$

$$\xi^F_{\bar{\alpha}} \circ (\phi,\psi) = (-\sqrt{2}\theta^{\bar{\alpha}}_F \vee \phi, -\sqrt{2}\theta^{\bar{\alpha}}_F \vee \phi), \tag{4.23}$$

$$\frac{\xi^F+\Sigma}{2} \circ (\phi,\psi) = (-\psi,\phi), \qquad \frac{\xi^F-\Sigma}{2} \circ (\phi,\psi) = (-\psi,-\phi). \tag{4.24}$$

また，$\frac{\xi^F}{2}\circ(\phi,\psi) = (-\psi,\phi)$ と $\frac{\Sigma}{2}\circ(\phi,\psi) = (0,\phi)$ が成り立つ．

4.2 フェファーマン空間のローレンツスピン幾何

ここでは，標準ローレンツスピン構造から定まるディラック作用素とペンローズ作用素を調べていく．

各議論に入る前に，いくつか記号や注意を述べておく．今後の議論では，$F(M)$ の局所枠として次の 3 種類を用いていく．一つは $F(M)$ の正規直交枠

$$(s_1,\cdots,s_{2n+1};s_{2n+2}) = (e^F_1,\ldots,e^F_{2n},\frac{\xi^F+\Sigma}{2};\frac{\xi^F-\Sigma}{2}), \tag{4.25}$$

残り 2 つは $\pi^*_{\mathcal{H}}H$ エルミート枠である $(\xi^F_1,\xi^F_{\bar{1}},\ldots,\xi^F_{\bar{n}})$ と $(\pi^*_{\mathcal{H}}\xi_1,\pi^*_{\mathcal{H}}\xi_{\bar{1}},\ldots\pi^*_{\mathcal{H}}\xi_{\bar{n}})$ である．また，枠の関係

$$e_{2\alpha-1} = \frac{\xi^F_\alpha+\xi^F_{\bar{\alpha}}}{\sqrt{2}}, \quad e_{2\alpha} = \frac{-\xi^F_\alpha+\xi_{\bar{\alpha}}}{i\sqrt{2}} \tag{4.26}$$

が成り立ったことを再度注意しておく．

次に，これら局所枠によるレヴィ＝チヴィタ接続 ∇^h の接続形式を述べておく．まず，$\nabla^h s_j = \sum s_I\cdot\omega(\nabla^h;s)^i_j$ と表す．また，命題 2.11 より，

$$h(\nabla^h\xi^F,\Sigma) = h(\nabla^h\Sigma,\xi^F) = h(\nabla^h\xi^F,\xi^F) = h(\nabla^h\Sigma,\Sigma) = 0 \tag{4.27}$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}\nabla^h\xi^F_B = \sum \xi^F_A\cdot\omega(\nabla^h;F)^A_B + s_{2n+1}\cdot\omega(\nabla^h;F)^{2n+1}_B \\ + s_{2n+2}\cdot\omega(\nabla^h;F)^{2n+2}_B\end{aligned} \tag{4.28}$$

と表すことができる[6]．ここで，A,B は $1,\ldots,n,\bar{1},\ldots,\bar{n}$ を走るものである．今後 A,B はこの規則で用いる．また α,β は $1,\ldots,n$ を走るものとする．同様にして，擬エルミート枠を持ち上げた $(\pi^*_{\mathcal{H}}\xi_1,\ldots\pi^*_{\mathcal{H}}\xi_{\bar{n}})$ を用いた接続形式を

$$\begin{aligned}\nabla^h\xi^F_B = \sum \xi^F_A\cdot\omega(\nabla^h)^A_B + s_{2n+1}\cdot\omega(\nabla^h)^{2n+1}_B \\ + s_{2n+2}\cdot\omega(\nabla^h)^{2n+2}_B\end{aligned} \tag{4.29}$$

と表示する．

[6] $\omega(\nabla^h,F)^{2n+2}_{2n+1} = 0$ に注意．

補題 4.4. 二つの接続形式 $\omega(\nabla^h;F)$ と $\omega(\nabla^h)$ に関して，次の関係が成り立つ．

$$\omega(\nabla^h;F)^{\alpha}_{\beta}=\omega(\nabla^h)^{\alpha}_{\beta}-\delta_{\alpha\beta}\frac{id\Theta}{n},\qquad \omega(\nabla^h;F)^{\alpha}_{\bar\beta}=e^{2i\Theta/n}\omega(\nabla^h)^{\alpha}_{\bar\beta},$$
$$\omega(\nabla^h;F)^{\bar\alpha}_{\beta}=e^{-2i\Theta/n}\omega(\nabla^h)^{\bar\alpha}_{\beta},\qquad \omega(\nabla^h;F)^{\bar\alpha}_{\bar\beta}=\omega(\nabla^h)^{\bar\alpha}_{\bar\beta}+\delta_{\alpha\beta}\frac{id\Theta}{n},$$
$$\omega(\nabla^h;F)^{A}_{k}=e^{r(A)i\Theta}\omega(\nabla^h)^{A}_{k}\qquad (k=2n+1,2n+2)$$

証明. 簡単な計算より従う．実際，エルミート枠であることより，

$$\begin{aligned}\omega(\nabla^h,F)^{\alpha}_{\beta}&=h(\nabla^h\xi^F_{\beta},\xi^F_{\bar\alpha})=h(\nabla^h e^{-i\Theta/n}\pi^*_{\mathcal H}\xi_\beta,e^{i\Theta/n}\pi^*_{\mathcal H}\xi_{\bar\alpha})\\&=h(-\frac{id\Theta}{n}e^{-i\Theta/n}\pi^*_{\mathcal H}\xi_\beta+e^{-i\Theta/n}\nabla^h\pi^*_{\mathcal H}\xi_\beta,e^{i\Theta/n}\pi^*_{\mathcal H}\xi_{\bar\alpha})\\&=h(\nabla^h\pi^*_{\mathcal H}\xi_\beta,\pi^*_{\mathcal H}\xi_{\bar\alpha})-\frac{id\Theta}{n}h(\pi^*_{\mathcal H}\xi_\beta,\pi^*_{\mathcal H}\xi_{\bar\alpha})\\&=\omega(\nabla^h)^{\alpha}_{\beta}-\delta_{\alpha\beta}\frac{id\Theta}{n}\end{aligned}$$

となる．他も同様である． □

4.2.1 標準ローレンツスピン構造のスピノール接続

ここでは，スピノール接続 ∇^{g} の接続形式の局所枠による表示とその関係性を述べる．次の 2 点に注意する．

1. リー環 $\mathfrak{spin}_{2n+1,1}\cong\mathfrak{so}_{2n+1,1}$ が

$$s_i\circ s_j\leftrightarrow\begin{cases}2(s_j\wedge s_i\vee-s_i\wedge s_j\vee) & i<j\le 2n+1,\\ 2(s_{2n+2}\wedge s_i\vee+s_i\wedge s_{2n+2}\vee) & i\le 2n+1\end{cases}\tag{4.30}$$

   となる[7]．ここで，$\vee$ とは $s_i\vee s_j=\delta_{ij}$ の意味である．

2. 接続形式 $\omega(\nabla^h;s)$ が

$$\begin{aligned}\omega(\nabla^h;s)=&\sum_{i<j\le 2n+1}(s_j\wedge s_i\vee-s_i\wedge s_j\vee)\cdot\omega(\nabla^h;s)^j_i\\&+\sum_{i\le 2n}(s_{2n+2}\wedge s_i+s_i\wedge s_{2n+2}\vee)\cdot\omega(\nabla^h;s)^{2n+2}_i\end{aligned}\tag{4.31}$$

   となる[8]．

[7] $SO(V)\subset\mathrm{End}(V)$ より，そのリー環も $\mathfrak{so}(V)\subset\mathrm{End}(V)$ と見なしている．
[8] $\omega(\nabla^h;s)^{2n+2}_{2n+1}=0$ に注意．

この２点よりスピノール接続の接続形式は

$$
\begin{aligned}
\omega(\nabla^{\mathscr{S}}) &= \frac{1}{2}\sum_{i<j\leq 2n+1} s_i\circ s_j\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_i^j + \frac{1}{2}\sum_{i\leq 2n} s_i\circ s_{2n+2}\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_i^{2n+2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i<j} s_i\circ s_j\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_i^j\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j\leq 2n} s_i\circ s_j\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_i^j + \frac{1}{2}\sum_{i\leq 2n} s_i\circ s_{2n+1}\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_i^{2n+1}\\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i\leq 2n} s_i\circ s_{2n+2}\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_i^{2n+2} \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

となる．また，$\omega(\nabla^h;F)$ を用いると次のように表すことができる．

補題 4.5. スピノール接続の接続形式 $\omega(\nabla^{\mathscr{S}})$ は，$(\xi_1^F,\dots,\xi_{\bar{n}}^F)$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
\omega(\nabla^{\mathscr{S}}) &= \frac{1}{4}\sum_{A,B\leq 2n}\xi_A^F\circ\xi_B^F\circ\cdot\omega(\nabla^h;F)_{\bar{A}}^B + \frac{1}{2}\sum_{A\leq 2n}\xi_A^F\circ s_{2n+1}\circ\cdot\omega(\nabla^h;F)_{\bar{A}}^{2n+1}\\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{A\leq 2n}\xi_A^F\circ s_{2n+2}\circ\cdot\omega(\nabla^h;F)_{\bar{A}}^{2n+2} \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

と表される．

証明. 枠の関係 (4.26) を (4.31) に代入して整理すればよい．ここでは，$\omega(\nabla^h;F)$ を ω と省略して表示することにする．(4.31) の右辺の第一項は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j\leq 2n} s_i\circ s_j\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_i^j\\
&= \sum_{\alpha,\beta} s_{2\alpha-1}\circ s_{2\beta-1}\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_{2\alpha-1}^{2\beta-1} + \sum_{\alpha,\beta} s_{2\alpha}\circ s_{2\beta}\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_{2\alpha}^{2\beta}\\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta} s_{2\alpha-1}\circ s_{2\beta}\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_{2\alpha-1}^{2\beta} + \sum_{\alpha,\beta} s_{2\alpha}\circ s_{2\beta-1}\circ\cdot\omega(\nabla^h;s)_{2\alpha}^{2\beta-1}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta}\left(\xi_\alpha^F\circ\xi_\beta^F\circ+\xi_\alpha^F\circ\xi_{\bar{\beta}}^F\circ+\xi_{\bar{\alpha}}^F\circ\xi_\beta^F\circ+\xi_{\bar{\alpha}}^F\circ\xi_{\bar{\beta}}^F\circ\right)\left(\omega_\alpha^{\bar{\beta}}+\omega_\alpha^\beta+\omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}+\omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}\right)\\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta}\left(\xi_\alpha^F\circ\xi_\beta^F\circ-\xi_\alpha^F\circ\xi_{\bar{\beta}}^F\circ-\xi_{\bar{\alpha}}^F\circ\xi_\beta^F\circ+\xi_{\bar{\alpha}}^F\circ\xi_{\bar{\beta}}^F\circ\right)\left(\omega_\alpha^{\bar{\beta}}-\omega_\alpha^\beta-\omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}+\omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}\right)\\
&\quad - \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta}\left(-\xi_\alpha^F\circ\xi_\beta^F\circ+\xi_\alpha^F\circ\xi_{\bar{\beta}}^F\circ-\xi_{\bar{\alpha}}^F\circ\xi_\beta^F\circ+\xi_{\bar{\alpha}}^F\circ\xi_{\bar{\beta}}^F\circ\right)\left(-\omega_\alpha^{\bar{\beta}}+\omega_\alpha^\beta-\omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}+\omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}\right)\\
&\quad - \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta}\left(-\xi_\alpha^F\circ\xi_\beta^F\circ-\xi_\alpha^F\circ\xi_{\bar{\beta}}^F\circ+\xi_{\bar{\alpha}}^F\circ\xi_\beta^F\circ+\xi_{\bar{\alpha}}^F\circ\xi_{\bar{\beta}}^F\circ\right)\left(-\omega_\alpha^{\bar{\beta}}-\omega_\alpha^\beta+\omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}+\omega_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}\right)\\
&= \sum_{A,B\leq 2n}\xi_A^F\circ\xi_B^F\circ\cdot\omega_{\bar{A}}^B.
\end{aligned}
$$

第二項と第三項についても同様の計算を行うことで，主張がいえる． □

さらに，接続形式 $\omega(\nabla^{\mathscr{g}})$ は，M 上の接続 $\pi_*\nabla^h$ を用いることで次のように言い換えられる．

命題 4.6. 接続形式 $\omega(\nabla^{\mathscr{g}})$ は,

$$\begin{aligned}\omega(\nabla^{\mathscr{g}}) = \sum_{A,B} &\xi_B^F \circ \xi_A^F \circ \cdot \frac{e^{r(A,B)i\Theta}\pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)_{\bar{B}}^A}{4} \\ &+ d\theta_F \circ \cdot \big(-\frac{\sigma}{n} + \pi^*\big(\frac{i\sum\omega(\nabla^{hT})_\alpha^\alpha}{2n} - \frac{s^{\nabla^{hT}}}{4n(n+1)}\theta\big)\big) \\ &- \frac{\xi^F}{2} \circ \sum \xi_B^F \circ \cdot e^{r(B)i\Theta}\pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)_{\bar{B}}^0 \\ &+ \frac{\Sigma}{2} \circ \sum \xi_A^F \circ \cdot \frac{e^{r(A)i\Theta}\pi^*\omega(\nabla^h)_0^A}{2} \end{aligned} \tag{4.34}$$

と表される．ここで，$d\theta_F \circ = \sum e_{2\alpha-1}^F \circ e_{2\alpha}^F \circ$ である．

上の命題を後に使う形にしておく．

系 4.7. $C \neq 2n+1, 2n+2$ とする．このとき，以下のようになる．

$$\begin{aligned}\omega(\nabla^{\mathscr{g}})(\xi_C^F) = \sum_{A,B} &\xi_B^F \circ \xi_A^F \circ \cdot \frac{e^{r(A,B,\bar{C})i\Theta}\pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)_{\bar{B}}^A(\xi_C)}{4} \\ &+ d\theta_F \circ \cdot \frac{e^{r(\bar{C})i\Theta}i\sum\pi^*\omega(\nabla^{hT})_\alpha^\alpha(\xi_C)}{2n} \\ &- \frac{\xi^F}{2} \circ \sum \xi_B^F \circ \cdot e^{r(B,\bar{C})i\Theta}\pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)_{\bar{B}}^0(\xi_C) \\ &+ \frac{\Sigma}{2} \circ \sum \xi_A^F \circ \cdot \frac{e^{r(A,\bar{C})i\Theta}\pi^*\omega(\nabla^h)_0^A(\xi_C)}{2}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}\omega(\nabla^{\mathscr{g}})(s_{2n+1}) = \sum_{A,B} &\xi_B^F \circ \xi_A^F \circ \cdot \frac{e^{r(A,B)i\Theta}\pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)_{\bar{B}}^A(\xi)}{8} \\ &+ d\theta_F \circ \cdot \big(\frac{i\sum\pi^*\omega(\nabla^{hT})_\alpha^\alpha(\xi)}{4n} - \frac{\pi^*s^{\nabla^{hT}}}{8n(n+1)} - \frac{1}{2n}\big) \\ &- \frac{\xi^F}{2} \circ \sum \xi_B^F \circ \cdot e^{r(B)i\Theta}\pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)_{\bar{B}}^0(\xi) \\ &+ \frac{\Sigma}{2} \circ \sum \xi_A^F \circ \cdot \frac{e^{r(A)i\Theta}\pi^*\omega(\nabla^h)_0^A(\xi)}{2}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}\omega(\nabla^{\mathscr{g}})(s_{2n+2}) = \sum_{A,B} &\xi_B^F \circ \xi_A^F \circ \cdot \frac{e^{r(A,B)i\Theta}\pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)_{\bar{B}}^A(\xi)}{8} \\ &+ d\theta_F \circ \cdot \big(\frac{i\sum\pi^*\omega(\nabla^{hT})_\alpha^\alpha(\xi)}{4n} - \frac{\pi^*s^{\nabla^{hT}}}{8n(n+1)} + \frac{1}{2n}\big) \\ &- \frac{\xi^F}{2} \circ \sum \xi_B^F \circ \cdot e^{r(B)i\Theta}\pi^*\omega(\pi_*\nabla^h)_{\bar{B}}^0(\xi) \\ &+ \frac{\Sigma}{2} \circ \sum \xi_A^F \circ \cdot \frac{e^{r(A)i\Theta}\pi^*\omega(\nabla^h)_0^A(\xi)}{2}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

$\omega(\nabla^{\mathcal{S}})(s_{2n+1})$ と $\omega(\nabla^{\mathcal{S}})(s_{2n+2})$ はほとんど一致している．唯一，第二項の $\frac{1}{2n}$ の符号が異なるだけである．

4.2.2 標準ローレンツスピン構造のトゥイスタースピノール

トゥイスタースピノールの同値条件は，補題 3.7 で既に与えた．その条件に加えて，ローレンツ計量の場合は次の補題が成り立つ．

補題 4.8. スピノール場 $\Phi \in \Gamma(\mathcal{S})$ がトゥイスタースピノールになる必要十分条件は，ある $\Psi \in \Gamma(\mathcal{S})$ が存在して，任意の α について

$$\big(\xi^F_\alpha \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_{\bar\alpha}} + \xi^F_{\bar\alpha} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_\alpha}\big)\Phi = 2\Psi, \qquad \big(\xi^F_\alpha \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_\alpha} + \xi^F_{\bar\alpha} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_{\bar\alpha}}\big)\Phi = 0, \tag{4.38}$$

$$\epsilon_k \circ s_k \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{s_k}\Phi = \Psi \qquad (k = 2n+1, 2n+2). \tag{4.39}$$

証明. 補題 3.7 の (3) との同値性を示せばよい．枠の関係より

$$\begin{aligned} s_{2\alpha-1} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{s_{2\alpha-1}} &= \frac{1}{2}(\xi^F_\alpha \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_\alpha} + \xi^F_\alpha \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_{\bar\alpha}} + \xi^F_{\bar\alpha} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_\alpha} + \xi^F_{\bar\alpha} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_{\bar\alpha}}), \\ s_{2\alpha} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{s_{2\alpha}} &= -\frac{1}{2}(\xi^F_\alpha \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_\alpha} - \xi^F_\alpha \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_{\bar\alpha}} - \xi^F_{\bar\alpha} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_\alpha} + \xi^F_{\bar\alpha} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_{\bar\alpha}}) \end{aligned}$$

となる．これより，

$$s_{2\alpha-1} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{s_{2\alpha-1}}\Phi = \Psi, \quad s_{2\alpha} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{s_{2\alpha}}\Phi = \Psi \tag{4.40}$$

が

$$\big(\xi^F_\alpha \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_{\bar\alpha}} + \xi^F_{\bar\alpha} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_\alpha}\big)\Phi = 2\Psi, \quad \big(\xi^F_\alpha \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_\alpha} + \xi^F_{\bar\alpha} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\xi^F_{\bar\alpha}}\big)\Phi = 0 \tag{4.41}$$

と同値になることがわかる． □

次に，スピノール束 $\mathcal{S}$ の重要なスピノール場を導入する．まず，外積束 $\wedge^{0,*}(H^c)^*$ は，

$$1,\ \theta^{\bar 1}_F \wedge \cdots \wedge \theta^{\bar n}_F \in \Gamma(\wedge^{0,*}(H^c)^*) \tag{4.42}$$

をもつ．ここで，$\theta^{\bar\alpha}_F$ は $\xi^F_{\bar\alpha}$ の双対枠である．さらに，$\omega \coloneqq \theta^1_F \wedge \cdots \wedge \theta^n_F$ とすれば，

$$\psi_+ = 1 \otimes \sqrt{\omega},\ \psi_- = \theta^{\bar 1}_F \wedge \cdots \wedge \theta^{\bar n}_F \otimes \sqrt{\omega} \in \Gamma(\wedge^{0,*}(H^c)^* \otimes \pi^* K^{1/2}) \tag{4.43}$$

となる．よって，(4.18) より，二つの一次独立なスピノール場

$$\Phi_\pm = (0, \psi_\pm) \in \Gamma(\mathcal{S}) \tag{4.44}$$

が定まる．このスピノール場 $\Psi_\pm$ によって，底空間の構造である J の可積分条件の同値性やまた J が可積分の場合にトゥイスタースピノールになることがわかる．このことを以下で示していく．

命題 4.9. 次が成り立つ.

$$\epsilon_{\pm}\frac{\xi^F \pm \Sigma}{2} \circ \nabla^{\mathscr{S}}_{\frac{\xi^F \pm \Sigma}{2}} \Phi_+$$
$$= (\psi_+, 0) \cdot \frac{-i}{2} \pm \sum_{\alpha,\beta} (\theta_F^{\bar{\beta}} \wedge \theta_F^{\bar{\alpha}} \wedge \psi_+, 0) \cdot \frac{e^{2i\Theta/n}}{8(n+2)} \sum_{\nu} (\nabla^{hT}_{\xi_\nu} \mathcal{Q})^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\nu}}, \quad (4.45)$$

$$(\xi^F_\gamma \circ \nabla^{\mathscr{S}}_{\xi^F_{\bar{\gamma}}} + \xi^F_{\bar{\gamma}} \circ \nabla^{\mathscr{S}}_{\xi^F_\gamma})\Phi_+$$
$$= (\psi_+, 0) \cdot (-i) + \sum_{\alpha,\beta} (0, \theta_F^{\bar{\gamma}} \wedge \theta_F^{\bar{\beta}} \wedge \theta_F^{\bar{\alpha}} \wedge \psi_+) \cdot \frac{ie^{3i\Theta/n} \mathcal{Q}^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{2\sqrt{2}}, \quad (4.46)$$

$$(\xi^F_\gamma \circ \nabla^{\mathscr{S}}_{\xi^F_\gamma} + \xi^F_{\bar{\gamma}} \circ \nabla^{\mathscr{S}}_{\xi^F_{\bar{\gamma}}})\Phi_+ = \sum_{\alpha} (0, \theta_F^{\bar{\alpha}} \wedge \psi_+) \cdot \frac{-ie^{3i\Theta/n} \mathcal{Q}^{\alpha}_{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}}{\sqrt{2}}. \quad (4.47)$$

また,

$$\epsilon_{\pm}\frac{\xi \pm \Sigma}{2} \circ \nabla^{\mathscr{S}}_{\frac{\xi^F + \Sigma}{2}} \Phi_-$$
$$= (\psi_-, 0) \cdot \frac{i}{2} \mp \sum_{\alpha,\beta} (\theta_F^{\bar{\beta}} \vee \theta_F^{\bar{\alpha}} \vee \psi_-, 0) \cdot \frac{e^{-2i\Theta/n}}{8(n+2)} \sum_{\nu} (\nabla^{hT}_{\xi_{\bar{\nu}}} \mathcal{Q})^{\bar{\alpha}}_{\beta\nu}, \quad (4.48)$$

$$(\xi^F_\gamma \circ \nabla^{\mathscr{S}}_{\xi^F_{\bar{\gamma}}} + \xi^F_{\bar{\gamma}} \circ \nabla^{\mathscr{S}}_{\xi^F_\gamma})\Phi_-$$
$$= (\psi_-, 0) \cdot i + \sum_{\alpha,\beta} (0, \theta_F^{\bar{\gamma}} \vee \theta_F^{\bar{\beta}} \vee \theta_F^{\bar{\alpha}} \wedge \psi_-) \cdot \frac{ie^{-3i\Theta/n} \mathcal{Q}^{\bar{\alpha}}_{\beta\gamma}}{2\sqrt{2}}, \quad (4.49)$$

$$(\xi^F_\gamma \circ \nabla^{\mathscr{S}}_{\xi^F_\gamma} + \xi^F_{\bar{\gamma}} \circ \nabla^{\mathscr{S}}_{\xi^F_{\bar{\gamma}}})\Phi_- = \sum_{\alpha} (0, \theta_F^{\bar{\alpha}} \vee \psi_-) \cdot \frac{-ie^{-3i\Theta/n} \mathcal{Q}^{\bar{\alpha}}_{\gamma\gamma}}{\sqrt{2}}. \quad (4.50)$$

が成り立つ.

証明. Ψ_+ の定義と ξ^F_A の作用より, $\xi^F_{\bar{\alpha}} \circ \psi_+ = 0$ となることに注意する. クリフォード作用の性質 (命題 4.3) と系 4.7 より,

$$\begin{aligned}
&\nabla^{\mathscr{S}}_{\frac{\xi^F \pm \Sigma}{2}} \Phi_+ = \omega(\nabla^{\mathscr{S}})(\frac{\xi^F \pm \Sigma}{2})(0, \psi_+) \\
&= \sum \xi^F_{\bar{\alpha}} \circ \xi^F_\alpha \circ (0, \psi_+) \cdot \frac{e^{r(\alpha,\bar{\beta})i\Theta} \omega(\pi_* \nabla^h)^\alpha_\alpha(\xi)}{8} \\
&\quad + \sum \xi^F_\beta \circ \xi^F_\alpha (0, \psi_+) \circ \cdot \frac{e^{r(\alpha,\beta)i\Theta} \omega(\pi_* \nabla^h)^\alpha_{\bar{\beta}}(\xi)}{8} \\
&\quad + d\theta_F \circ (0, \psi_+) \cdot \big(\frac{i \sum \omega(\nabla^{hT})^\alpha_\alpha(\xi)}{4n} - \frac{s^{\nabla^{hT}}}{8n(n+1)} \mp \frac{1}{2n}\big) \\
&\quad - \frac{\xi^F}{2} \circ \sum \xi^F_\beta \circ (0, \psi_+) \cdot e^{r(\beta)i\Theta} \omega(\pi_* \nabla^h)^0_{\bar{\beta}}(\xi) \\
&\quad + \frac{\Sigma}{2} \circ \sum \xi^F_\alpha \circ (0, \psi_+) \cdot \frac{e^{r(\alpha)i\Theta} \omega(\nabla^h)^\alpha_0(\xi)}{2} \\
&= -(0, \psi_+) \cdot \frac{\sum \omega(\pi_* \nabla^h)^\alpha_\alpha(\xi)}{4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum(0,\theta_F^{\bar\beta}\wedge\theta_F^{\bar\alpha}\wedge\psi_+)\cdot\frac{e^{2i\Theta}\omega(\pi_*\nabla^h)^\alpha_{\bar\beta}}{4}\\
&-(0,\psi_+)\cdot in\Big(\frac{i\sum\omega(\nabla^{hT})^\alpha_\alpha(\xi)}{4n}-\frac{s^{\nabla^{hT}}}{8n(n+1)}\mp\frac{1}{2n}\Big)\\
&+\sum(\theta_F^{\bar\beta}\wedge\psi_+,0)\cdot e^{i\Theta/n}\omega(\pi_*\nabla^h)^0_{\bar\beta}(\xi)\\
=&-(0,\psi_+)\cdot\Big(\frac{\sum\omega(\pi_*\nabla^h)^\alpha_\alpha(\xi)}{4}-\frac{\sum\omega(\nabla^{hT})^\alpha_\alpha(\xi)}{4}-\frac{is^{\nabla^{hT}}}{8(n+1)}\mp\frac{i}{2}\Big)\\
&+\sum(0,\theta_F^{\bar\beta}\wedge\theta_F^{\bar\alpha}\wedge\psi_+)\cdot\frac{e^{2i\Theta}\omega(\pi_*\nabla^h)^\alpha_{\bar\beta}(\xi)}{4}\\
&+\sum(\theta_F^{\bar\beta}\wedge\psi_+,0)\cdot e^{i\Theta/n}\omega(\pi_*\nabla^h)^0_{\bar\beta}(\xi)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，命題 2.11 より，$\omega(\pi_*\nabla^h)^0_{\bar\beta}(\xi)=0$ と次の 2 式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\sum\big(\omega(\pi_*\nabla^h)^\alpha_\alpha(\xi)-\omega(\nabla^{hT})^\alpha_\alpha(\xi)\big)&=\sum\mathcal{F}(\sigma)(\xi_\alpha,\xi_{\bar\alpha})\\
&=\frac{i}{n+2}\sum\Big(\mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}}(\xi_\alpha,\xi_{\bar\alpha})+\frac{is^{\nabla^{hT}}}{2(n+1)}d\theta(\xi_\alpha,\xi_{\bar\alpha})\Big)\\
&=\frac{i}{n+2}\Big(s^{\nabla^{hT}}-\frac{ns^{\nabla^{hT}}}{2(n+1)}\Big)\\
&=\frac{is^{\nabla^{hT}}}{2(n+1)}
\end{aligned}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
\omega(\pi_*\nabla^h)^\alpha_{\bar\beta}(\xi)&=\omega(\nabla^T)^\alpha_{\bar\beta}(\xi)+\mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar\beta},\xi_{\bar\alpha})\\
&=\frac{i}{n+2}\mathrm{Ric}^{\nabla^{hT}}(\xi_{\bar\beta},\xi_{\bar\alpha})\\
&=\frac{-1}{2(n+2)}\sum(\nabla^{hT}_{\xi_{\bar\nu}}\mathcal{Q})^\alpha_{\bar\alpha\bar\nu}.
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，

$$
\nabla^{\mathcal{S}}_{\frac{\xi^F\pm\Sigma}{2}}\Phi_+=(0,\psi_+)\cdot(\pm\frac{i}{2})-\sum(0,\theta_F^{\bar\beta}\wedge\theta_F^{\bar\alpha}\wedge\psi_+)\cdot\frac{e^{2i\Theta}(\nabla^{hT}_{\xi_\nu}\mathcal{Q})^\alpha_{\bar\beta\bar\nu}}{8(n+2)}
$$

を得る．これより，(4.45) が成り立つ．同様にして，他も成り立つ． □

命題 4.10. 次が成り立つ．

$$
D^{\mathcal{S}}\Phi_\pm=(\psi_\pm,0)\cdot(-i(n+1)). \tag{4.51}
$$

証明. 簡単な計算より，ディラック作用素は

$$
\begin{aligned}
D^{\mathcal{S}}&=\sum\epsilon_ie_i^F\circ\nabla^{\mathcal{S}}_{e_i^F}\\
&=\sum_{A\neq 2n+1,2n+2}\xi_A^F\circ\nabla^{\mathcal{S}}_{\xi_A^F}+s_{2n+1}\circ\nabla^{\mathcal{S}}_{s_{2n+1}}-s_{2n+2}\circ\nabla^{\mathcal{S}}_{s_{2n+2}}
\end{aligned}
$$

と表される．これと命題 4.9 より

$$
\begin{aligned}
D^{\mathscr{g}}\Phi_+ &= \sum(\xi^F_\gamma \circ \nabla^{\mathscr{g}}_{\xi^F_{\bar\gamma}} + \xi^F_{\bar\gamma} \circ \nabla^{\mathscr{g}}_{\xi^F_\gamma})\Phi_+ \\
&\quad + \frac{\xi^F + \Sigma}{2} \circ \nabla^{\mathscr{g}}_{\frac{\xi^F+\Sigma}{2}}\Phi_+ - \frac{\xi^F - \Sigma}{2} \circ \nabla^{\mathscr{g}}_{\frac{\xi^F-\Sigma}{2}}\Phi_+ \\
&= (\psi_+, 0) \cdot (-i(n+1)) + \sum(0, \theta^{\bar\gamma}_F \wedge \theta^{\bar\beta}_F \wedge \theta^{\bar\alpha}_F \wedge \psi_+) \cdot \frac{ie^{3i\Theta/n}\mathcal{Q}^\alpha_{\bar\beta\bar\gamma}}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

となる．さらに，系 1.18 より

$$
\begin{aligned}
&\sum \theta^{\bar\gamma}_F \wedge \theta^{\bar\beta}_F \wedge \theta^{\bar\alpha}_F \cdot \mathcal{Q}^\alpha_{\bar\beta\bar\gamma} \\
&= \sum \theta^{\bar\gamma}_F \wedge \theta^{\bar\beta}_F \wedge \theta^{\bar\alpha}_F \cdot \frac{\mathcal{Q}^\alpha_{\bar\beta\bar\gamma}}{3} + \sum \theta^{\bar\alpha}_F \wedge \theta^{\bar\gamma}_F \wedge \theta^{\bar\beta}_F \cdot \frac{\mathcal{Q}^\beta_{\bar\gamma\bar\alpha}}{3} + \sum \theta^{\bar\beta}_F \wedge \theta^{\bar\alpha}_F \wedge \theta^{\bar\gamma}_F \cdot \frac{\mathcal{Q}^\gamma_{\bar\alpha\bar\beta}}{3} \\
&= \sum \theta^{\bar\gamma}_F \wedge \theta^{\bar\beta}_F \wedge \theta^{\bar\alpha}_F \cdot \frac{\mathcal{Q}^\alpha_{\bar\beta\bar\gamma} + \mathcal{Q}^\beta_{\bar\gamma\bar\alpha} + \mathcal{Q}^\gamma_{\bar\alpha\bar\beta}}{3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これより，$D^{\mathscr{g}}\Phi_+ = (\psi_+, 0) \cdot (-i(n+1))$ が成り立つ．同様にして，$D^{\mathscr{g}}\Phi_- = (\psi_-, 0) \cdot i(n+1)$ も示される． □

以上より，次の主定理が示される．

定理 4.11 ([20])**.** J が可積分のとき $\Phi_\pm$ はトゥイスタースピノールになる．また，逆に $\Phi_\pm$ がトゥイスタースピノールのとき J は可積分になる．

証明. 命題 4.9 と補題 4.8 から従う． □

4.3 フェファーマン・バウム空間

ここでは，先行研究である Baum の研究 ([5]) を紹介する．この節では，接触リーマン多様体がスピン構造をもつと仮定している．それを

$$\Phi : \mathrm{Spin}(TM) \to SO(TM) \tag{4.52}$$

と表す．また，直和分解 $TM = H \oplus \mathbb{R}_\xi$ より $SO(TM) \supset SO(H)$ に簡約する．このことから， $\mathrm{Spin}(H) := \Phi^{-1}(SO(H))$ かつ $\Phi_H = \Phi|_{\mathrm{Spin}(H)}$ とすることで，H のスピン構造

$$\Phi_H : \mathrm{Spin}(H) \to SO(H) \tag{4.53}$$

を得る．一方，H は標準複素スピン構造 $\Phi^c_H : \mathrm{Spin}^c(H) \to SO(H) \times U(K^{-1})$ をもっていた．この複素スピン束は，スピン束を用いて，

$$\mathrm{Spin}^c(H) = \mathrm{Spin}(H) \times_{\mathbb{Z}_2} U(K^{-1/2}) \tag{4.54}$$

と表される．この $K^{1/2}$ は，標準複素スピン構造とスピン構造から定まる K の平方根束である（$K^{1/2} \otimes K^{1/2} = K$）．

フェファーマン空間と同様にして，

$$\sqrt{F(M)} \coloneqq K_0^{1/2}/\mathbb{R}_{>0} \tag{4.55}$$

と定め，その射影を $\sqrt{\pi}$ と表す．

4.3.1 ローレンツスピン構造

まず，$\pi^* SO(H) = SO(\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} H)$ と $TF(M) = \sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} H \oplus \mathbb{R}^2_{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} xi, \Sigma}$ より

$$SO(T\sqrt{F(M)}) = \sqrt{\pi}^* SO(H) \times SO_0(2n+2) \tag{4.56}$$

と表せることに注意する．よって，

$$\mathrm{Spin}(T\sqrt{F(M)}) \coloneqq \sqrt{\pi}^* \mathrm{Spin}(H) \times \mathrm{Spin}_0(2n+2), \tag{4.57}$$

$$\Phi : \mathrm{Spin}(T\sqrt{F(M)}) \to SO(T\sqrt{F(M)}) \tag{4.58}$$

で定まる $(\mathrm{Spin}(T\sqrt{F(M)}, \Phi\checkmark)$ はスピン構造になる．

4.3.2 トゥイスタースピノール

§4.2.2 と同様の計算によって以下が成り立つ．

命題 4.12.

$$\begin{aligned} &\epsilon_{\pm} \frac{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi \pm \Sigma\checkmark}{2\sqrt{2}} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\frac{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi + \Sigma\checkmark}{2\sqrt{2}}} \Phi_+^{\checkmark} \\ &\quad = (\psi_+^{\checkmark}, 0) \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}} \pm \sum_{\alpha,\beta} (\sqrt{\pi}^* \theta^{\bar{\beta}} \wedge \sqrt{\pi}^* \theta^{\bar{\alpha}} \wedge \psi_+^{\checkmark}, 0) \cdot \frac{1}{8\sqrt{2}(n+2)} \sum_{\nu} (\nabla^{hT}_{\xi_\nu} \mathcal{Q})^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\nu}}, \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi_\gamma \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi_{\bar{\gamma}}} + \sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi_{\bar{\gamma}} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi_\gamma}) \Phi_+^{\checkmark} \\ &\quad = (\psi_+^{\checkmark}, 0) \cdot \frac{-2i}{\sqrt{2}} + \sum_{\alpha,\beta} (0, \sqrt{\pi}^* \theta^{\bar{\gamma}} \wedge \sqrt{\pi}^* \theta^{\bar{\beta}} \wedge \sqrt{\pi}^* \theta^{\bar{\alpha}} \wedge \psi_+^{\checkmark}) \cdot \frac{i\mathcal{Q}^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{2\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$(\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi_\gamma \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi_\gamma} + \sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi_{\bar{\gamma}} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}} \xi_{\bar{\gamma}}}) \Phi_+ = \sum_{\alpha} (0, \sqrt{\pi}^* \theta^{\bar{\alpha}} \wedge \psi_+) \cdot \frac{-i\mathcal{Q}^{\alpha}_{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}}{\sqrt{2}}. \tag{4.61}$$

また，

$$\epsilon_{\pm}\frac{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi \pm \Sigma\surd}{2\sqrt{2}} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\frac{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi+\Sigma\surd}{2\sqrt{2}}}\Phi^{\surd}_{-}$$
$$= (\psi^{\surd}_{-}, 0)\cdot\frac{-i}{\sqrt{2}} \pm \sum_{\alpha,\beta}(\sqrt{\pi}^*\theta^{\bar{\beta}} \wedge \sqrt{\pi}^*\theta^{\bar{\alpha}} \wedge \psi^{\surd}_{-}, 0)\cdot\frac{1}{8\sqrt{2}(n+2)}\sum_{\nu}(\nabla^{hT}_{\xi_\nu}\mathcal{Q})^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\nu}}, \tag{4.62}$$

$$(\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi_\gamma \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi_{\bar{\gamma}}} + \sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi_{\bar{\gamma}} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi_\gamma})\Phi^{\surd}_{-}$$
$$= (\psi^{\surd}_{-}, 0)\cdot\frac{-2i}{\sqrt{2}} + \sum_{\alpha,\beta}(0, \sqrt{\pi}^*\theta^{\bar{\gamma}} \wedge \sqrt{\pi}^*\theta^{\bar{\beta}} \wedge \sqrt{\pi}^*\theta^{\bar{\alpha}} \wedge \psi^{\surd}_{-})\cdot\frac{i\mathcal{Q}^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}}{2\sqrt{2}}, \tag{4.63}$$

$$(\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi_\gamma \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi_\gamma} + \sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi_{\bar{\gamma}} \circ \nabla^{\mathcal{S}}_{\sqrt{\pi}^*_{\mathcal{H}}\xi_{\bar{\gamma}}})\Phi_{-} = \sum_{\alpha}(0, \sqrt{\pi}^*\theta^{\bar{\alpha}} \wedge \psi_{-})\cdot\frac{-i\mathcal{Q}^{\alpha}_{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}}{\sqrt{2}}. \tag{4.64}$$

命題 4.13. 次が成り立つ．

$$D^{\mathcal{S}}\Phi^{\surd}_{\pm} = (\psi^{\surd}_{\pm}, 0)\cdot\sqrt{2}i(n+1) \tag{4.65}$$

定理 4.14. J が可積分のとき $\Phi_{\pm}$ はトゥイスタースピノールになる．また，逆に $\Phi_{\pm}$ がトゥイスタースピノールのとき J は可積分になる．

5　正定値フェファーマン空間

前節までは $F(M)$ にローレンツ計量 (2.13) を付随させて，その幾何的性質を調べてきた．ここでは，そのローレンツ計量を変形させたリーマン計量について調べていく．

フェファーマン計量を構成していた $\pi^*\theta$ と Σ が $F(M)$ 上の 1 形式になることに着目すると，次のリーマン計量が定まる．

$$\begin{aligned}\bar{g} &\coloneqq \pi^* g|_H + \pi^*\theta \otimes \pi^*\theta + \sigma \otimes \sigma \\ &= \pi^* g + \sigma \otimes \sigma.\end{aligned} \tag{5.1}$$

定義 5.1. $(F(M), \bar{g})$ を正定値フェファーマン空間と呼ぶ．

以下で，この正定値フェファーマン空間の幾何を調べていく．まず，底空間の擬概複素構造から誘導される概複素構造の性質を調べる．次に，射影 π がリーマン沈めこみになることを紹介し，その性質を調べていく．

この節では，主 S^1 束 $\pi : F(M) \to M$ の接続 $i(n+2)\sigma$ による水平リフト $\pi^*_{\mathcal{H}}X$ を，単純に X^* と表すことにする．また，M 上のベクトル場 X, Y に関して，

$$[X^*, Y^*] = [X, Y]^* - \mathcal{F}(\sigma)(X, Y)\Sigma, \quad [X^*, \Sigma] = 0 \tag{5.2}$$

が成り立つことに注意する（補題 2.8）．

5.1　正定値フェファーマン空間の概複素構造

主 S^1 束 $F(M)$ の接続 $i(n+2)\sigma$ によって，接束は $TF(M) = \pi^*_{\mathcal{H}}H \oplus \mathbb{R}^2_{\xi^*,\Sigma}$ と分解した（2.1 節を参照）．この部分束 $\pi^*_{\mathcal{H}}H = \pi^*H$ には, 底空間の擬概複素構造 J の引き戻しによって概複素構造 $\bar{J}_1$ が定まる（$\bar{J}_1 = \pi^*_{\mathcal{H}} \circ J \circ \pi_*$）．また，$\mathbb{R}^2_{\pi^*_{\mathcal{H}}\Sigma}$ には次で定まる概複素構造 $\bar{J}_2$ を入れる．

$$\bar{J}_2\xi^* = \Sigma, \quad \bar{J}_2\Sigma = -\xi^*. \tag{5.3}$$

この $\bar{J}_1$ と $\bar{J}_2$ を用いて，$F(M)$ の概複素構造を $\bar{J} = \bar{J}_1 + \bar{J}_2$ と定める．

補題 5.2. $(FM), \bar{g}, \bar{J})$ は概エルミート多様体である．

証明. $E \in \pi^*_{\mathcal{H}}H$ は，ある $X \in H$ によって $E = X^*$ と表されることに注意する．任意の $X^*, Y^* \in \pi^*_{\mathcal{H}}H$ に対して，

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{J}_1X^*, Y^*) &= g(\pi_*\bar{J}_1X^*, \pi_*Y^*) = g(JX, Y) \\ &= -g(X, JY) = -\bar{g}(X^*, \bar{J}_1Y^*)\end{aligned}$$

となる．よって，$(\pi_{\mathcal{H}}^* H, \pi^* g|_H, \bar{J}_1)$ はエルミート束である．また，$\bar{g}^e = \pi^*\theta \otimes \pi^*\theta + \sigma \otimes \sigma$ と表すと，簡単な計算より，$(\pi_{\mathcal{H}}^* H, \bar{g}^e, \bar{J}_2)$ もエルミート束になることがわかる．よって，

$$(TF(M), \bar{g}, \bar{J}) = (\pi_{\mathcal{H}}^* H, \pi^* g|_H, \bar{J}_1) \oplus (\mathbb{R}^2_{\xi^*,\Sigma}, \bar{g}^e, \bar{J}_2) \tag{5.4}$$

より，$(F(M), \bar{g}, \bar{J})$ が概エルミート多様体になることがわかる． □

5.1.1 基本 2 次形式

$(F(M), \bar{g}, \bar{J})$ の基本二次形式 $\bar{\omega}$ とは

$$\bar{\omega}(E_1, E_2) = \bar{g}(\bar{J}E_1, E_2) \qquad (E_1, E_2 \in TF(M)) \tag{5.5}$$

で定まるものである．

補題 5.3. $X, Y \in H$ とする．$\bar{\omega}$ に対して，

$$\bar{\omega}(X^*, Y^*) = \pi^* d\theta(X, Y), \tag{5.6}$$

$$\bar{\omega}(X^*, \xi^*) = \bar{\omega}(X^*, \Sigma) = 0, \tag{5.7}$$

$$\bar{\omega}(\xi^*, \Sigma) = 1 \tag{5.8}$$

が成り立つ．

証明． エルミート束 $(\pi_{\mathcal{H}}^* H, \pi^* g|_H, \bar{J}_1)$ と $(\mathbb{R}^2_{\xi^*,\Sigma}, \bar{g}^e, \bar{J}_2)$ の基本二次形式を，それぞれ $\bar{\omega}_1$ と $\bar{\omega}_2$ とすれば，$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ となる．よって，$\bar{\omega}(X^*, \xi^*) = \bar{\omega}(X^*, \Sigma) = 0$ が成り立つ．また，$\bar{J}X^* \in \pi_{\mathcal{H}}^* H$ に気を付けると，

$$\bar{\omega}_p(X^*, Y^*) = \bar{g}_p(\bar{J}X^*, Y^*) = g_{\pi(p)}(JX, Y) = d\theta_{\pi(p)}(X, Y)$$

がわかる．最後に，$\bar{\omega}(\xi^*, \Sigma) = \bar{g}(\Sigma, \Sigma) = 1$ である． □

補題の証明から，$F(M)$ の接束は基本二次形式を含めて

$$(TF(M), \bar{g}, \bar{J}, \bar{\omega}) = (\pi_{\mathcal{H}}^* H, \pi^* g|_H, \bar{J}_1, \bar{\omega}_1) \oplus (\mathbb{R}^2_{\xi^*,\Sigma}, \bar{J}_2, \bar{\omega}_2) \tag{5.9}$$

と分解していることがわかる．次に $\bar{\omega}$ の外微分に関する次の命題を紹介する．

命題 5.4. $X, Y, Z \in H$ とする．このとき次が成り立つ．

$$(d\bar{\omega})(X^*, Y^*, Z^*) = 0, \tag{5.10}$$

$$(d\bar{\omega})(X^*, Y^*, \xi^*) = \mathcal{F}(\sigma)(X, Y), \quad (d\bar{\omega})(X^*, Y^*, \Sigma) = d\theta(X, Y), \tag{5.11}$$

$$(d\bar{\omega})(X^*, \xi^*, \Sigma) = 0. \tag{5.12}$$

証明. 前補題とカッコ積の分解 (5.2)，式 (5.9) を用いて計算していく．また，$x=\pi(p)$ とする．

$$
\begin{aligned}
&(d\bar{\omega})_p(X^*,Y^*,Z^*)\\
&=X_p^*\bar{\omega}(Y^*,Z^*)-Y_p^*\bar{\omega}(Z^*,X^*)+Z_p^*\bar{\omega}(X^*,Y^*)\\
&\quad-\bar{\omega}_p([X^*,Y^*],Z^*)+\bar{\omega}_p([Y^*,Z^*],X^*)-\bar{\omega}_p([Z^*,X^*],Y^*)\\
&=X_p^*\pi^*(d\theta(Y,Z))-Y_p^*\pi^*(d\theta(Z,X))+Z_p^*\pi^*(d\theta(X,Y))\\
&\quad-\bar{\omega}_p([X,Y]^*,Z^*)+\bar{\omega}_p([Y,Z]^*,X^*)-\bar{\omega}_p([Z,X]^*,Y^*)\\
&=X_xd\theta(Y,Z)-Y_xd\theta(Z,X)+Z_xd\theta(X,Y)\\
&\quad-d\theta_x([X,Y],JZ)+d\theta_x([Y,Z],JX)-d\theta_x([Z,X],JY)\\
&=(d^2\theta)(X,Y,Z)=0.
\end{aligned}
$$

他も同様にして示される． □

この命題と $d\theta\neq 0$ から $d\bar{\omega}\neq 0$ がわかる．つまり，$(F(M),\bar{J})$ はシンプレクティック多様体にはならない．特にケーラー多様体にならない．

5.1.2 可積分性

ここでは，可積分性の同値条件であるナイエンハンステンソルの振る舞いを調べる．

命題 5.5. X,Y を M のベクトル場とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
&[\bar{J},\bar{J}](X^*,Y^*)\\
&=[J,J](X,Y)^*+d\theta(X,Y)\xi^*-\big(\mathcal{F}(\sigma)(JX,Y)+\mathcal{F}(\sigma)(X,JY)\big)\xi^*\\
&\quad+\big(\mathcal{F}(\sigma)(X,Y)-\mathcal{F}(\sigma)(JX,JY)\big)\Sigma, \qquad (5.13)\\
&[\bar{J},\bar{J}](X^*,\Sigma)=[J,J](X,\xi)^*+\mathcal{F}(\sigma)(X,\xi)\xi^*+\mathcal{F}(\sigma)(JX,\xi)\Sigma, \qquad (5.14)\\
&[\bar{J},\bar{J}](\xi^*,\Sigma)=0 \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

証明. (5.13) を示す．まず，

$$
\begin{aligned}
\bar{J}X^*&=\bar{J}(X-\theta(X)\xi)^*+\bar{J}\theta(X)\xi^*\\
&=(JX)^*+\theta(X)\Sigma \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

となることに注意する．さらに，Σ 方向との計算に注意すると，

$$
\begin{aligned}
&[\bar{J},\bar{J}](X^*,Y^*)\\
&=[(JX)^*+\theta(X)\Sigma,(JY)^*+\theta(Y)\Sigma]-[X^*,Y^*]\\
&\quad-\bar{J}[(JX)^*+\theta(X)\Sigma,Y^*]-\bar{J}[X^*,(JY)^*+\theta(Y)\Sigma]\\
&=[(JX)^*,(JY)^*]-[X^*,Y^*]-\bar{J}[(JX)^*,Y^*]-\bar{J}[X^*,(JY)^*]\\
&\quad+[\theta(X)\Sigma,(JY)^*]+[(JX)^*,\theta(Y)\Sigma]+[\theta(X)\Sigma,\theta(Y)\Sigma]\\
&\quad-\bar{J}[\theta(X)\Sigma,Y^*]-\bar{J}[X^*,\theta(Y)\Sigma]\\
&=[(JX)^*,(JY)^*]-[X^*,Y^*]-\bar{J}[(JX)^*,Y^*]-\bar{J}[X^*,(JY)^*]\\
&\quad-((JY)\theta(X))\Sigma+((JX)\theta(Y))\Sigma\\
&\quad+(Y\theta(X))\bar{J}\Sigma-(X\theta(Y))\bar{J}\Sigma\\
&=[(JX)^*,(JY)^*]-[X^*,Y^*]-\bar{J}[(JX)^*,Y^*]-\bar{J}[X^*,(JY)^*]\\
&\quad-(Y\theta(X))\xi^*+(X\theta(Y))\xi^*\\
&\quad-((JY)\theta(X))\Sigma+((JX)\theta(Y))\Sigma
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

となる．これを $\pi_{\mathcal{H}}^*H$ と ξ^*,Σ 成分に分けて計算する．$\bar{J}$ が $\pi_{\mathcal{H}}^*H$ を保つことと $[J,J]$ の言い換え (1.8) に気を付けると，

$$
\begin{aligned}
&[\bar{J},\bar{J}](X^*,Y^*)|_{\pi_{\mathcal{H}}^*H}\\
&=[(JX)^*,(JY)^*]|_{\pi_{\mathcal{H}}^*H}-[X^*,Y^*]|_{\pi_{\mathcal{H}}^*H}-\bar{J}[(JX)^*,Y^*]|_{\pi_{\mathcal{H}}^*H}-\bar{J}[X^*,(JY)^*]|_{\pi_{\mathcal{H}}^*H}\\
&=([JX,JY]|_H)^*-([X,Y]|_H)^*-(J[JX,Y])^*-(J[X,JY])^*\\
&=[J,J](X,Y)^*-\theta([JX,JY])\xi^*\\
&=[J,J](X,Y)^*+d\theta(X,Y)\xi^*
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

を得る．また，

$$
\begin{aligned}
&[\bar{J},\bar{J}](X^*,Y^*)|_{\xi^*}\\
&=(\pi^*\theta)[\bar{J},\bar{J}](X^*,Y^*)-Y\theta(X)+X\theta(Y)\\
&=(\pi^*\theta)([(JX)^*,(JY)^*])-(\pi^*\theta)([X^*,Y^*])+\sigma([(JX)^*,Y^*])+\sigma([X^*,(JY)^*])\\
&\quad-Y\theta(X)+X\theta(Y)\\
&=\theta([JX,JY])-\theta([X,Y])-Y\theta(X)+X\theta(Y)-\mathcal{F}(\sigma)(JX,Y)-\mathcal{F}(\sigma)(X,JY)\\
&=-\mathcal{F}(\sigma)(JX,Y)-\mathcal{F}(\sigma)(X,JY)
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

と

$$
\begin{aligned}
&[\bar{J},\bar{J}](X^*,Y^*)|_{\Sigma}\\
&=\sigma([(JX)^*,(JY)^*])-\sigma([X^*,Y^*])-(\pi^*\theta)([(JX)^*,Y^*])-(\pi^*\theta)([X^*,(JY)^*])\\
&\quad-(JY)\theta(X)+(JX)\theta(Y)
\end{aligned}
$$

$$= -\mathcal{F}(\sigma)(JX, JY) + \mathcal{F}(\sigma)(X, Y)$$
$$\quad - \theta([JX, Y]) - \theta([X, JY]) - (JY)\theta(X) + (JX)\theta(Y)$$
$$= -\mathcal{F}(\sigma)(JX, JY) + \mathcal{F}(\sigma)(X, Y) \tag{5.20}$$

を得る．よって，(5.18) と (5.19)，(5.20) を (5.17) に代入すれば，(5.13) が示される．他も同様にして示される． □

次に M のレーブ場 ξ がキリング場になる条件を紹介する．ξ がキリング場になるとは，任意のベクトル場 X, Y に対して

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = \xi g(X, Y) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) \tag{5.21}$$

が成り立つことである．

補題 5.6. ξ がキリング場になるための必要十分条件は，任意のベクトル場 X に対して

$$[X, \xi] + J[JX, \xi] = 0 \tag{5.22}$$

が成り立つことである．

補題 5.7. 以下は同値である．

(1) $[J, J](X, Y) + d\theta(X, Y)\xi = 0$.

(2) J は可積分かつ ξ はキリング場である．

命題 5.8. $(F(M), \bar{J})$ が複素多様体になるための必要十分条件は，以下の 4 条件をみたすときである．

- J が可積分である．
- ξ がキリングベクトル場である．
- $\xi \rfloor \mathcal{F}(\sigma) = 0$.
- $\mathcal{F}(\sigma)$ は J 不変である．

系 5.9. M が定スカラー曲率の佐々木多様体のとき，$(F(M), \bar{J})$ は複素多様体になる．

5.2 リーマン沈めこみ

ここでは，主に O'Neil [21] と Gray [10] を正定値フェファーマン空間に適用していく．参考文献としては，Besse [2] も挙げておく．

まず，リーマン沈めこみの定義を一般の形で述べる．

定義 5.10. $(N, \bar{g})$ と (B, g) をリーマン多様体とし，$\pi : N \to B$，$\mathcal{H} = (\ker \pi_*)^{\perp} \subset TM$ とする．さらに，各点 $x \in M$ で $\pi_{*x} : \mathcal{H}_x \to T_{\pi(x)}B$ が同相となるとする．このとき，$\pi : (N, \bar{g}) \to (B, g)$ とかき，リーマン沈めこみであるという．

命題 5.11. 正定値フェファーマン空間 $(F(M), \bar{g})$ に対して，射影 $\pi : (F(M), \bar{g}) \to (M, g)$ はリーマン沈めこみになる．

証明. 接続 $i(n+2)\sigma$ の水平分布を $\mathcal{H}$ とすると，$\mathcal{H} = (\ker \pi_*)^{\perp}$ となる．$\mathcal{H}$ と $\bar{g}$ の定義より，π がリーマン沈めこみとわかる． □

正定値フェファーマン空間の接束は，水平分布 $\mathcal{H}$ を用いることで $TF(M) = \mathcal{H} \oplus \mathbb{R}_\Sigma$ となることに注意する．ここで，$F(M)$ のベクトル場 E を $\mathcal{H}$ に射影したものを $E^{\mathcal{H}}$ とし，$\mathbb{R}_\Sigma$ に射影したものを $E^{\mathcal{V}}$ と表記する．

補題 5.12. Σ は測地ベクトルである．

$(F(M), \bar{g})$ のレヴィ＝チヴィタ接続 $\nabla^{\bar{g}}$ から $(2,1)$ テンソル T と A を

$$T_{E_1} E_2 = \left(\nabla^{\bar{g}}_{E_1^{\mathcal{V}}} E_2^{\mathcal{V}} \right)^{\mathcal{H}} + \left(\nabla^{\bar{g}}_{E_1^{\mathcal{V}}} E_2^{\mathcal{H}} \right)^{\mathcal{V}}, \tag{5.23}$$

$$A_{E_1} E_2 = \left(\nabla^{\bar{g}}_{E_1^{\mathcal{H}}} E_2^{\mathcal{V}} \right)^{\mathcal{H}} + \left(\nabla^{\bar{g}}_{E_1^{\mathcal{H}}} E_2^{\mathcal{H}} \right)^{\mathcal{V}} \tag{5.24}$$

で定める．

命題 5.13. 次が成り立つ．

$$T = 0, \tag{5.25}$$

$$A_{X^*} Y^* = \frac{1}{2}[X^*, Y^*]^{\mathcal{V}} = -\frac{1}{2}\pi^* \mathcal{F}(\sigma)(X, Y)\Sigma. \tag{5.26}$$

命題 5.14 ([21, 10])**.** X, Y, Z, W を M のベクトル場とする．次が成り立つ．

$$\bar{g}(F(X^*, \Sigma)Z^*, \Sigma) = \bar{g}(h^2(X^*), Z^*), \tag{5.27}$$

$$\bar{g}(F(X^*, Y^*)Z^*, \Sigma) = \frac{(\nabla^g_Z \mathcal{F}(\sigma))(X, Y)}{2}, \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}(F(X, Y)Z, W) = g(F(\nabla^g)(X, Y)Z, W) + \frac{\mathcal{F}(\sigma)(X, Y)\mathcal{F}(\sigma)(Z, W)}{2} \\ - \frac{\mathcal{F}(\sigma)(Y, Z)\mathcal{F}(\sigma)(X, W)}{4} - \frac{\mathcal{F}(\sigma)(X, Z)\mathcal{F}(\sigma)(Y, W)}{4}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

系 5.15.

$$\mathrm{Ric}(X^*, Y^*) = \pi^* \mathrm{Ric}(X, Y), \qquad \mathrm{Ric}(X^*, \Sigma) = 0, \tag{5.30}$$

$$\mathrm{Ric}(\Sigma, \Sigma) = \frac{\pi^* |\mathcal{F}(\sigma)|^2}{4}. \tag{5.31}$$

系 5.16.

$$s = \pi^* s(\nabla^g) + \frac{\pi^* |\mathcal{F}(\sigma)|^2}{4}. \tag{5.32}$$

参考文献

[1] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, Heat kernels and Dirac operators, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **298**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[2] A. L. Besse, Einstein manifolds, Reprint of the 1987 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[3] D. E. Blair, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Progress in Mathematics, 203. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2002.

[4] D. E. Blair and S. Dragomir, Pseudohermitian geometry on contact Riemannian manifolds, Rend. Mat. Appl. (7) **22** (2002), 275–341 (2003).

[5] H. Baum, Twistor spinors on Lorentzian manifolds, CR-geometry and Fefferman spaces, Differential geometry and applications (Brno, 1998), 29–37, Masaryk Univ., Brno, 1999.

[6] C. L. Fefferman, Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains, Ann. of Math. (2) **103** (1976), no. 2, 395–416.

[7] T. Friedrich, Dirac operators in Riemannian geometry, Graduate Studies in Mathematics, **25**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[8] H. Geiges, Contact geometry, arXiv:math/03037242v2.

[9] N. Ginoux, The Dirac spectrum, Lecture Notes in Mathematics, **1976**. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[10] A. Gray, Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions, J. Math. Mech. **16** (1967) 715–737.

[11] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry. Vol I, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London 1963.

[12] H. B. Lawson, Jr. and M.-L. Michelsohn, Spin geometry, Princeton Mathematical Series, **38**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[13] J. M. Lee, The Fefferman metric and pseudo-Hermitian invariants, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), no. 1, 411–429.

[14] J. Lewandowski, Twistor equation in a curved spacetime, Classical Quantum Gravity **8** (1991), no. 1, 11–17.

[15] J. W. Morgan, The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds, Mathematical Notes, **44**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[16] M. Nagase, Dirac operators on the Fefferman spin spaces in almost CR-geometry, Osaka J. Math. **56** (2019), no. 3, 507–524.

[17] M. Nagase, On the curvature of the Fefferman metric of contact Riemannian manifolds, Tohoku Math. J. (2) **71** (2019), no. 3, 425–436.

[18] M. Nagase, The heat equation for the Kohn-Rossi Laplacian on contact Riemannian manifolds, preprint.

[19] M. Nagase and D. Sasaki, Hermitian Tanno Connection and Bochner type curvature tensors of contact Riemannian manifolds, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **25** (2018), no. 2, 149–169.

[20] M. Nagase and T. Ohyama, Canonical Lorentzian spin structure and twistor spinors on the Fefferman space of a contact Riemannian manifold, Differential Geom. Appl. **71** (2020), 101634.

[21] B. O'Neill, The fundamental equations of a submersion, Michigan Math. J. **13** (1966), 459–469.

[22] R. Petit, Spin^c-structures and Dirac operators on contact manifolds, Differential Geom. Appl. **22** (2005), no. 2, 229–252.

[23] J. Roe, Elliptic operators, topology and asymptotic methods, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **179**. Longman, Harlow, 1988.

[24] S. Tanno, Variational problems on contact Riemannian manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), no. 1, 349–379.