氏　　　　　名	MOHAMED AHMED HASSAN ALI FARAHAT
博士の専攻分野の名称	博士（学術）
学 位 記 号 番 号	博理工甲第 834 号
学位授与年月日	平成 23 年 3 月 23 日
学位授与の条件	学位規則第 4 条第 1 項該当
学 位 論 文 題 目	Higher order Weierstrass points on genus two curves （種数２の曲線上の高次ワイエルシュトラス点）
論 文 審 査 委 員	委員長　　教　　授　　酒井　文雄
	委　員　　教　　授　　福井　敏純
	委　員　　准 教 授　　岸本　　崇
	委　員　　准 教 授　　下川　航也

論文の内容の要旨

Main idea of dissertation

We study the higher order Weierstrass points on genus two curves. In Chapter 2, we consider a 2-parameters genus two family $C_{a,b}$ of curves with extra involutions defined by

$$C_{a,b} : y^2 = x^6 + ax^4 +1, \ \ \Delta(a,b) \neq 0,$$

where $\Delta(a,b) = - 64\ (27 - 18ab + 4(a^3 + b^3) - a^2b^2)^2$ is the discriminant of the polynomial $h(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + 1$. Clearly, $h(x) = (x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2)(x^2 -\alpha_3^2)$, where α_1, α_2, α_3 are nonzero distinct complex numbers. Hence, the set of branch points is given by $\{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3\} \subset C$. Consequently, the corresponding set of the ramification points on $C_{a,b}$ is given by $\{R_1^{\pm} = (\pm\alpha_1,0), R_2^{\pm} = (\pm\alpha_2,0), R_3^{\pm} = (\pm\alpha_3,0)\}$. It is clear that the curves $C_{a,b}$ admit an extra involution $(x, y)\mapsto(-x, y)$ which differs from the hyperelliptic involution. It is well known that, for a hyperelliptic curve C of a genus $g \geq 2$, the set of ordinary Weierstrass points on C denoted by $W_1(C)$ are nothing but its set of the $(2g+2)$ -ramification points. Furthermore, $W_1(C)$ is contained in the set of the q -Weierstrass points on C , denoted by $W_q(C)$, for every $q \geq 2$. For a point $P \in C$, let let $w^{(q)}(P)$ denote the q -weight of P . For a genus two curve C , we have the equality $W_1(C) = W_2(C)$. For a point $P \in W_3(C)$, there occur three cases: $w^{(3)}(P) = 1,2$ and 3 . We have $w^{(3)}(P) = 3$ if and only if $P \in W_1(C)$. We can divide $W_3(C)$ as $W_3(C) = W_3(C)_1 \cup W_3(C)_2 \cup W_1(C)$ (disjoint union), where $W_3(C)_1$ (resp. $W_3(C)_2$) is the set of the 3- Weierstrass points P with $w^{(3)}(P) = 1$ (resp. $w^{(3)}(P) = 2$). We denote by N_1 (resp. N_2) the number of points in $W_3(C)_1$(resp. $W_3(C)_2$). We have the following formula: $N_1 + 2N_2 = 32$. We use the invariants

$$u = ab \quad \text{and} \quad v = a^3 + b^3,$$

which were discussed in [2]. Since the curves $C_{a,b}$ with the same invariants (u, v) are isomorphic, they have the same pairs (N_1, N_2) . We define the following curves in the (u, v) -plane:

S : $-1125 + 4v + 110u - u^2 = 0$, T : $v^2 - 4u^3 = 0$, M : $4v - u(u + 16) = 0$,

G : $20796875 - 13942500u - 571350u^2 - 98324u^3 - 3645u^4 + 3429000v - 235440uv + 1512vu^2 + 52272v^2 = 0$.

The curves S (resp. T) were introduced in [2], where it was shown that if $(u, v) \in S$ (resp. T), then there exists an automorphism of order three (resp. four) on $C_{a,b}$. The main result is stated as follows:

Theorem. *We classify the 3-* Weierstrass points on $C_{a,b}$ as follows:

(u, v)	N_1	N_2	*Geometry*	*Aut* $(C_{a,b})$
(25, -250)	0	16	$S \cap G \cap T$	$GL_2(3)$
A	12	10	$M \cap S \cap G$	D_{12}
$B_\pm$	16	8	$G \cap T$	D_8
Q	16	8	the node of G	V_4
$E_\pm$	20	6	$M \cap G$	V_4
(0, 0)	24	4	$M \cap T$	$Z_3 \times D_8$
(16,128)	24	4	$M \cap T$	D_8
General points on S	24	4		D_{12}
General points on G	24	4		V_4
General points on M	28	2		V_4
otherwise	32	0		V_4

Here, we used the following notations:

$$A = \left(\frac{125}{14}, \frac{43625}{784}\right), \qquad Q = \left(-\frac{25}{2}, -\frac{11125}{176}\right),$$

$$B_\pm = \left(\frac{1025}{729} \pm \frac{5200}{784}\sqrt{-2},\ -\frac{698750}{19683} \pm \frac{758000}{19683}\sqrt{-2}\right),$$

$$E_\pm = \left(-\frac{647}{256} \pm \frac{3519}{3328}\sqrt{-39},\ -\frac{33079811}{1703936} \pm \frac{4930119}{1703936}\sqrt{-39}\right).$$

論文の審査結果の要旨

射影代数曲線（コンパクト・リーマン面）上のワイエルシュトラス点は曲線の特別な点であり，重要な不変量である．ワイエルシュトラス点の概念は高次ワイエルシュトラス点に拡張されており，それらも曲線の特殊な点であり，興味深い研究対象である．本学位論文のテーマは種数２の平面曲線の３- ワイエルシュトラス点である．種数２の曲線は超楕円曲線の構造を持つことはよく知られている．

本学位論文の主結果は超楕円対合以外に余聞な対合を持つ種数２の平面曲線

$$C_{a,b} : y^2 = x^6 + ax^4 + bx^2 + 1 \ ; (\Delta(a, b) \neq 0).$$

における３- ワイエルシュトラス点の分類と幾何学的な研究である．ここで，$x^6 + ax^4 + bx^2 + 1$の判別式を$\Delta (a, b)$とした．

超楕円曲線のワイエルシュトラス点の集合 $W_1(C)$ は $\boldsymbol{P}^1$ 上の２重被覆写像の分岐点の集合に他ならない．さらに，$q \geq 2$ に対し，q- ワイエルシュトラス点の集合を $W_q(C)$ で表すとき，$W_1(C) \subset W_q(C)$ が成立する．点 $P \in C$ について，$w^{(q)}(P)$ で P の q- ウエイトとする．

種数２の曲線 C については，等式 $W_1(C) = W_2(C)$ が成立している．さて，$W_3(C)_k$ で, $w^{(3)}(P) = k$ となる 3- ワイエルシュトラスの集合とするとき，$W_3(C)_3 = W_1(C)$ であり，

$$W_3(C) = W_3(C)_1 \cup W_3(C)_2 \cup W_1(C)$$

と分割される．ここで，

$$N_1 = \# \{W_3(\mathrm{C})_1\} \quad N_2 = \# \ \{W_3(C)_2\}$$

とおくと，等式 $N_1 + 2N_2 = 32$ が成立する．

さて，Shaska と Völklein 両氏は曲線 $C_{a,b}$ の自己同型群を分類する研究において，不変量 $u = ab$, および $v = a^3 + b^3$ を導入した．この不変量を用いると，

$$\Delta(a, b) = -64\ \delta(u, v)^2 \quad (\delta(u, v) = 27 + 4v -18u -u^2)$$

と計算される．そこで $\Lambda : \delta(u, v) = 0$ とすると，補集合 $C^2 \setminus \Lambda$ は $C_{a,b}$ の概モジュライ空間になる．同じ (u, v) を持つ曲線 $C_{a,b}$ は同型であるので，組 (N_1, N_2) も等しい．

ここで，(u, v)- における次の曲線を定義する．

$$S : s(u, v) = -1125 + 4v + 110u - u^2 = 0,$$

$$T : t(u, v) = v^2 - 4u^3 = 0,$$

$$M: m(u, v) = 4v - u(u + 16) = 0,$$

$$\begin{aligned} G : g(u, v) = {} & 20796875 - 13942500u - 571350u^2 - 98324u^3 - 3645u^4 \\ & + 3429000v - 235440uv + 1512u^2v + 52272v^2 = 0. \end{aligned}$$

さて，３- ワイエルシュトラス点とその種類は３重微分形式の基底により定義されるロンスキアン形式Ω の零点とその重複度によって計算することができる．実自己同型の考察や，部分集結式を援用する計算など

随所に細かい工夫がなされている．分類結果の記述を簡潔にするため，パラメータ (a, b) ではなく，パラメータ (u, v) を用いている．

本学位論文の主結果は次の定理である．本学位論文の結果は Saitama Math. J. 28 (2011) に掲載されることが決定している．

定理. 種数２の平面曲線 $C_{a,b}$ 上の３- ワイエルシュトラス点は下記のように分類される.

<table>
<tr><th>N_1</th><th>N_2</th><th>(u, v)</th><th>Geometry</th><th>Aut($C_{a,b}$)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>16</td><td>(25, -250)</td><td>$S \cap G \cap T$</td><td>$GL_2(3)$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>10</td><td>A</td><td>$M \cap S \cap G$</td><td>D_{12}</td></tr>
<tr><td rowspan="2">16</td><td rowspan="2">8</td><td>$B_\pm$</td><td>$G \cap T$</td><td>D_8</td></tr>
<tr><td>Q</td><td>the node of G</td><td>V_4</td></tr>
<tr><td>20</td><td>6</td><td>$E_\pm$</td><td>$M \cap G$</td><td>V_4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">24</td><td rowspan="4">4</td><td>(0, 0)</td><td>$M \cap T$</td><td>$Z_3 \times D_8$</td></tr>
<tr><td>(16, 128)</td><td>$M \cap T$</td><td>D^8</td></tr>
<tr><td colspan="2">S の一般的な点</td><td>D_{12}</td></tr>
<tr><td colspan="2">G の一般的な点</td><td>V_4</td></tr>
<tr><td>28</td><td>2</td><td colspan="2">M の一般的な点</td><td>V_4</td></tr>
<tr><td>32</td><td>0</td><td colspan="2">その他の場合</td><td>V_4</td></tr>
</table>

ここで，点 $A, Q, B_\pm, \mathrm{E}_\pm$ の座標は下記で与えられる.

$$A = \left(\frac{125}{14}, \frac{43625}{784}\right), \qquad Q = \left(-\frac{25}{2}, -\frac{11125}{176}\right),$$

$$B_\pm = \left(\frac{1025}{729} \pm \frac{5200}{784}\sqrt{-2},\ -\frac{698750}{19683} \pm \frac{758000}{19683}\sqrt{-2}\right),$$

$$E_\pm = \left(-\frac{647}{256} \pm \frac{3519}{3328}\sqrt{-39},\ -\frac{33079811}{1703936} \pm \frac{4930119}{1703936}\sqrt{-39}\right).$$

以上見てきたように，本論文の内容は代数幾何のこの分野における最新の結果を含んだ優れた研究として高く評価することができる．よって，当審査委員会は本論文が博士（学術）の学位授与に相応しい研究内容を持つものと認定した.