

ロープづりされた荷の振動*

大滝英征*¹, 琴坂信哉*², 長坂保美*³

Vibration of the Load Hung with Rope

Hideyuki OHTAKI*⁴, Sinya KOTOSAKA and Yasumi NAGASAKA

*⁴ Department of Mechanical Engineering, Saitama University,
255 Shimo Okubo, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

Authors are aiming at system construction to make the load descent to the bottom of the hole and to make it turn for decided direction. The load is hung with two ropes, and the direction is done by rotating the top part where the rope is installed. In that case, the situation that a rope each other intersects along with the rotation of the top part. Therefore, the gyration is caused on the load. It is thought that such behavior is the same one caused by the winch. However, most of the report for the winch is the one that the optimum conditions when the swing is not caused, and it transports it to the load in the straight line are induced. The rope for hanging temporarily causes intersection mutually, and when an irregular movement is caused, it is not analyzed. In this report, the gyration of the load for this case was analyzed.

Key Words: Vibration, Rope, Gyration, Load, Swing

1. ま え が き

著者らは、深い穴の底に品物(荷)を降下させ、定方向に向けさせるシステムの構築を図ってきている。荷は2本のロープでつり下げられ、その方向制御は、ロープを取付けた上端部を回転させて行う。その際、上端部の回転に伴い、互いのロープが交差するような事態も発生する。そのため、つり下げられた荷には複雑な回転運動が生じる。

このような挙動は、一般の巻上げ機の場合にも共通して生じる現象であると考えられる。しかし、巻上げ機の場合についての研究報告を検討してみると、荷に揺動を起こさず、直線的に搬送する場合の最適条件を誘導するものがほとんどである⁽¹⁾⁻⁽³⁾。つり下げ用ロープどうしが一時的にでも交差を起こし、荷に不規則な運動を起こす場合については解析されていないようである。そこで本報では、このような場合の、荷の回転運動について解析した。ただし本来は、上端部に

設けたローカル座標系と地上に設けたグローバル座標系との相対的な挙動を含めて解析する必要がある。本報では荷の挙動をとりあえず把握する必要性から、ローカル座標系は回転させず、グローバル座標系に固定された形態で解析した。すなわち、上端部は固定とし、荷側のみが回転するものとして解析した。本論文で用いた主な記号は

α : ロープと荷が存在する鉛直面とのなす角

β : ロープと鉛直方向との角

θ : 荷の初期位置からの回転角

ϕ : ロープと荷の初期位置とのなす角(O'B, O'Aのなす角)

T : ロープの張力

T_1 : T の回転中心方向への分力

T_2 : T の鉛直方向分力

T_{tr} : 荷を回転させようとする力

T_{01} : ロープがねじれた場合、ねじれ部より上部におけるロープに掛かる張力

T_{nr} : ロープがねじれた場合、ねじれ部より下部におけるロープに掛かる張力

2. つり荷の運動方程式の誘導

2-1 ロープどうしに交差を生じない場合

* 原稿受付 2005年12月16日。

¹ 正員, 埼玉大学工学部(☎338-8570 さいたま市桜区下大久保255)。

² 埼玉大学工学部。

³ 正員, 日本工業大学機械工学科(☎345-8501 埼玉県南埼玉郡宮代町学園台4-1)。

E-mail: ohtaki@post.saitama-u.ac.jp

1(a)に示したように、ロープどうしの接触は発生しない状態である。したがって荷の回転角は $(-\pi \sim \pi)$ の範囲内で、図1(b)に示したように、荷は水平面内の回転運動と上下方向の運動を起こす。本来、荷の上下方向運動により慣性力が生じ、張力にも影響が及

び非線形問題となる。しかしここでは、荷の回転に伴う上下方向の加速度はそれほど大きくないものと考えられるので、張力に及ぼす影響は省略した。図1(a)より、ロープに加わる力は、

$$T = \frac{T_1}{\cos \alpha} = \frac{T_2}{\cos \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$T_{tr} = T \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\cos \beta} T_2$$

$$T_2 = mg/2 \dots\dots\dots (1)$$

一方つり荷の上昇量 Δh は、図1(b-1)より

$$\Delta h = \sqrt{l^2 - (b-a)^2} (1 - \cos \varphi)$$

ここで、 $(1 - \cos \varphi)$ については、図1(b-2)に示した幾何学的な関係より

$$l \sin \frac{\varphi}{2} = b \sin \frac{\theta}{2}$$

であるから

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

したがって、上式に代入すると

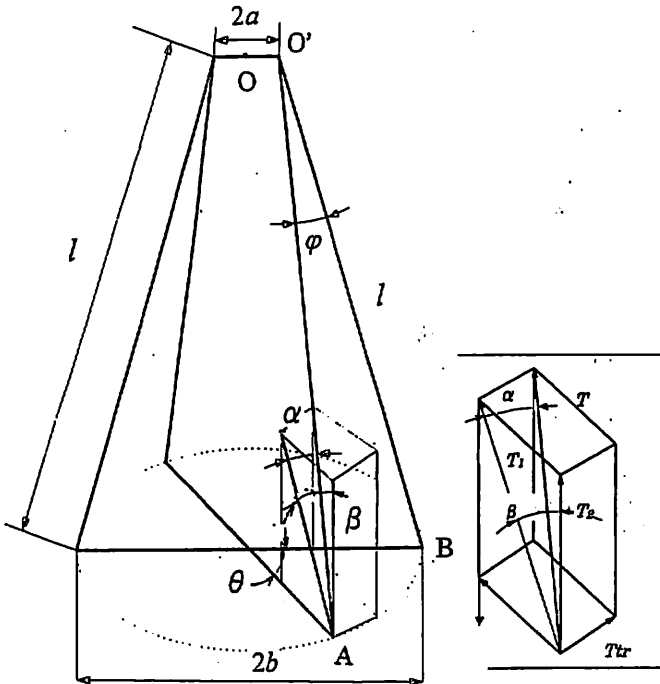
$$\Delta h = 2 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \sqrt{l^2 - (b-a)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \dots\dots\dots (2)$$

また、 α は T を含む面と T_1 を含む面との交角であるから、図1(b-3)に示した投影図を参照すると

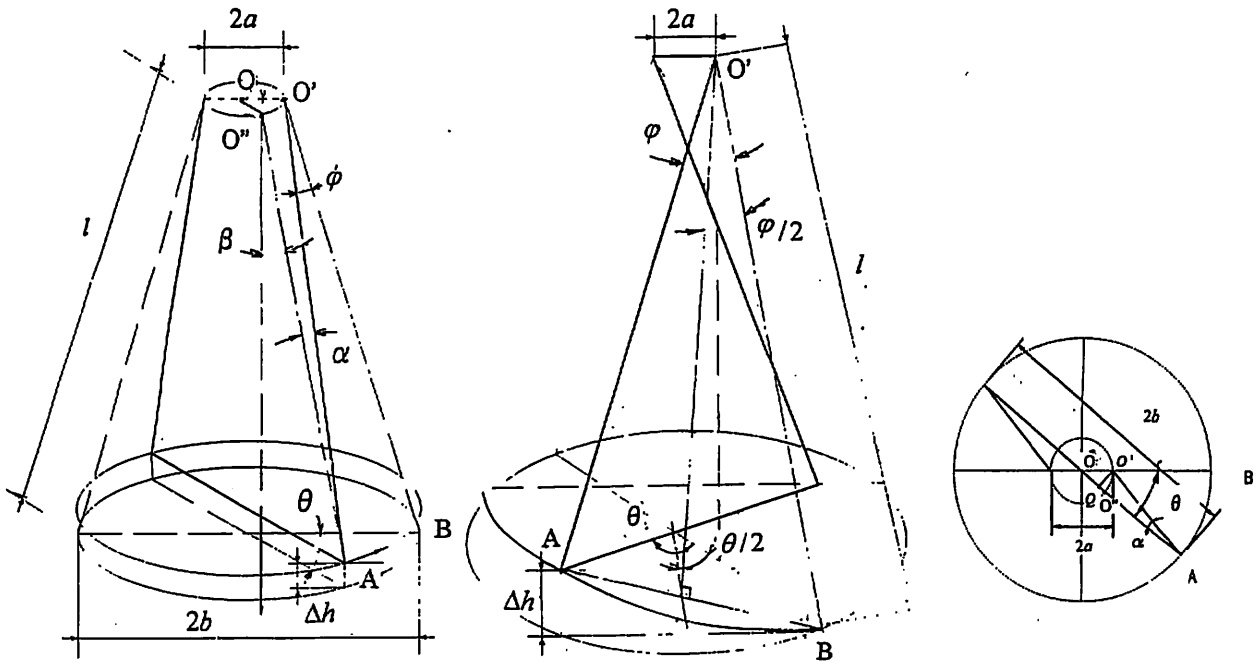
$$\tan \alpha = \frac{O'Q}{QA} = \frac{a \sin \theta}{b - a \cos \theta}$$

ただし、 Q は AO に O' から下ろした垂線の脚である。

図1(b)(i)に示した幾何学的な関係より



(a) Tension which acts on the rope



(b-1) Situation seen from side

(b-2)

(b-3) Situation seen from the upper part

(b) Rotation situation of the load

Fig. 1 Gyration of the load when the rope doesn't intersect

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{l^2 - (a-b)^2} - \Delta h}{O''A}$$

$$O''A = \sqrt{O'A^2 - O'O''^2} = \sqrt{O'A^2 - [2a \sin(\theta/2)]^2}$$

$$= \sqrt{l^2 - 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

の関係があるので、荷を回転させようとするモーメント M は

$$M = 2T_{tr}b$$

$$= \frac{ab \cdot mg \cdot \sin \theta \cdot \sqrt{l^2 - 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{(b-a \cos \theta) \sqrt{l^2 - (b-a)^2} \left(1 - \frac{2b^2}{l^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}$$

..... (3)

これらより、ラグランジュの方程式を利用して運動方程式を誘導すると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$L = \bar{T} - U - M\theta$$

$$\bar{T} = \frac{1}{2} m \Delta \dot{h}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$U = mg \Delta h$$

であるから

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{m \Phi^2 \theta^2 (\sin 2\theta - \sin \theta) + mg \frac{\Phi}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{(m \Phi^2 \sin^2 \theta + J)} = 0$$

$$\Phi = \frac{2b^2}{l^2} \sqrt{l^2 - (b-a)^2}$$

$$J = b^2 m / 12 \dots \dots \dots (4)$$

2-2 ロープどうしの交差を生じる場合 図

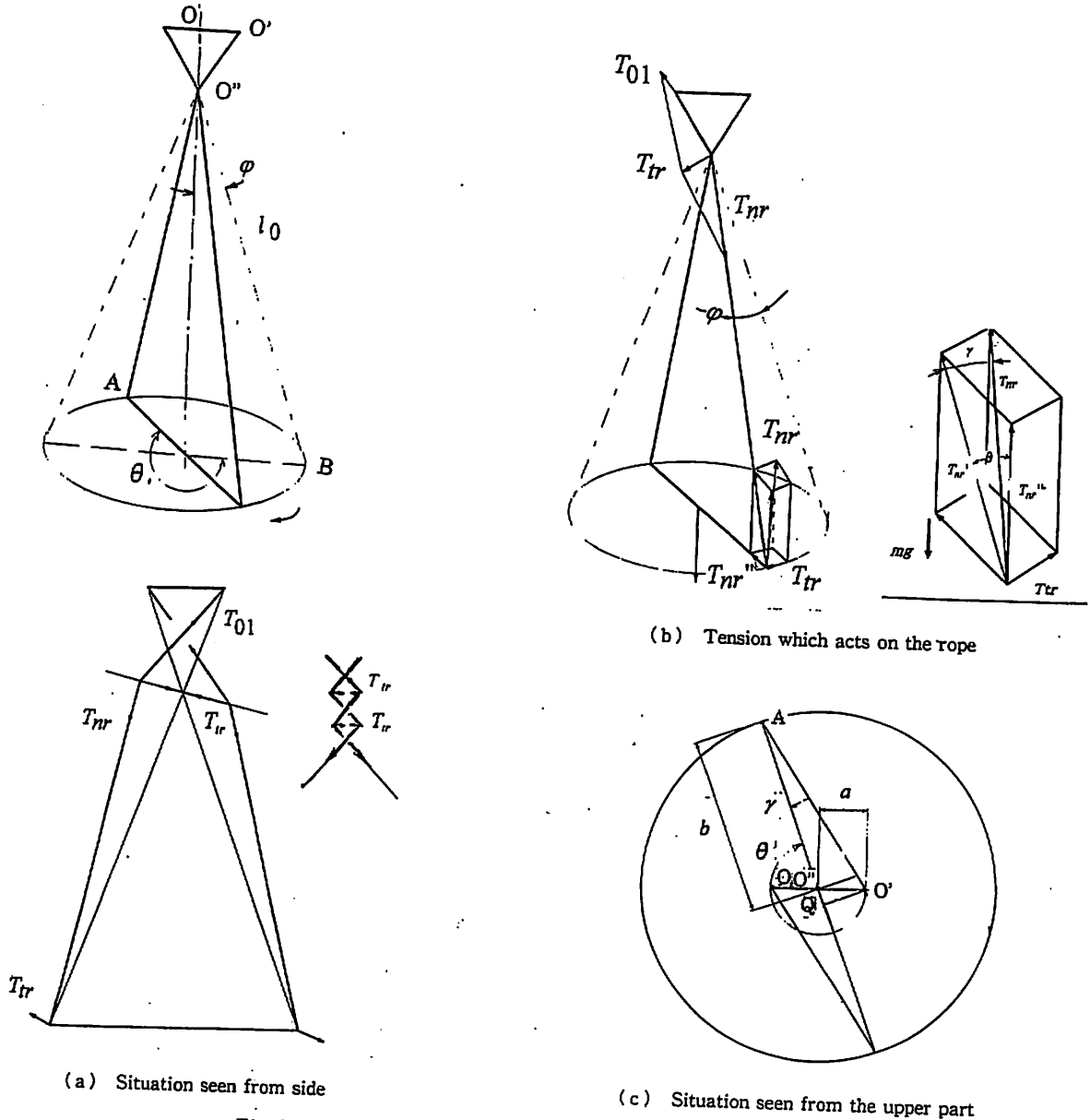


Fig. 2 Gyration of the load when the rope intersects

2(a)に示したように、ロープどうしが接触した状態で運動する場合である。荷の1回転に伴って、接触部にはこぶ状のねじれが1個生じる。2回転すれば2個生じる。このこぶ部(ねじれ部)では、図中に示したようにロープどうしの接触圧 T_{tr} が生じ、どのねじれ部でも同じ大きさの値と考えられる。ねじれが解けていく過程は、いっせいにねじれ部が解けるのではなく、下のねじれ部から順次行われ、それより上のねじれ部はその状態を維持したままである。順次解き放たれていく T_{tr} が、荷の回転運動を引き起こす。したがってねじれ部がいくつあろうと、最下部のねじれ部が解放されていく過程を解析すれば、荷の回転特性を把握できる。

ロープどうしが接触しているときの回転角の範囲は、 $(2\pi \sim \pi)$ あるいは $(-\pi \sim -2\pi)$ である。その場合における荷の上下方向の移動量は微小であるので、無視することとした。ロープに作用する力は、2・1節と同様にして解析でき、図2(b)より

$$\begin{aligned} T_{01} &= T_{nr} \\ T_{tr} &= \frac{T_{nr} \sin \gamma}{\cos \gamma} \\ T_{nr} &= T''_{nr} / \cos \beta \\ T''_{nr} &= mg/2 \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

一方、図2(c)に示した幾何学的な関係より

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{O'Q}{O'A} = \frac{a \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}} \\ \cos \beta &= \frac{a+b}{l} \\ l_0 &= \frac{b}{a+b} l \end{aligned}$$

荷を回転させようとする回転モーメント M は

$$M = 2T_{tr}b = \frac{2lab \sin \theta}{(a+b)(b+a \cos \theta)} T''_{nr} \dots\dots (6)$$

これらより、ラグランジュの方程式を利用して、運動方程式を求めると

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2lab \sin \theta}{(a+b)(b+a \cos \theta)} T''_{nr} = 0 \dots\dots (7)$$

3. 解析結果および考察

3・1 ロープどうしの交差を生じない場合

3・1・1 回転角加速度的時間的経過 式(4)をルンゲクッタ法により数値解析した。図3、4は、荷を π まで回転させ、静止させた状態から解き放った場合の回転角 θ 、および角加速度 $\omega (=d\theta/dt)$ を示したものである。自由振動をする角加速度を見てみるといくつかの変極点(5個)を持っている。この変極点とロープとの位置関係は以下のようなのである。

最初の変極点は、初期状態でロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B とが平行な位置関係($\theta = \pi$)にあり、初期の状態である(Bは紙面左側)。

1番めの変極点から2番めの変極点にかけては、角加速度は増大し続ける。そして2番めの変極点は、ロープのつり下げ部 a-b と荷 B-A との方向が互いに直角($\theta = \pi/2$)となった時点で生じ(Bの位置は紙面手前側)、角加速度は最大となる。

3番めの変極点は、つり下げ部 a-b と荷 B-A とが平行な位置関係($\theta = 0$)になったときに生じる(Aは紙面左側)。この位置で角加速度は零を示す。

4番めの変極点は、さらに荷の回転が進み、ロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに直角($\theta = -\pi/2$)となった時点である(Bの位置は紙面手前側)。この時点で角加速度は最小となる。その後角加速度は増加に転じる。

5番めの変極点は、ロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに並行となった時点($\theta = -\pi$)である(Bは紙面左側)。この時点で角加速度は零を示す。

以後の回転は、5番めの位置関係から初期の位置関係へと逆に進んでいく。

ただし、1番めと5番めとはロープの位置の前後関係が異なる。初期の位置では面手前側に位置していた

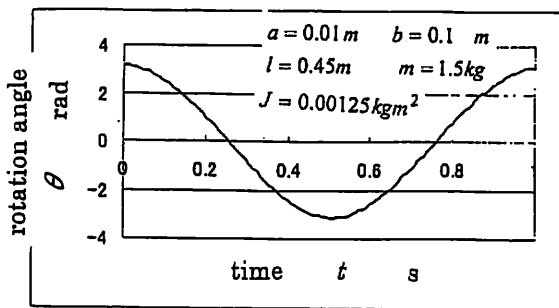


Fig. 3 Rotation angle of the load

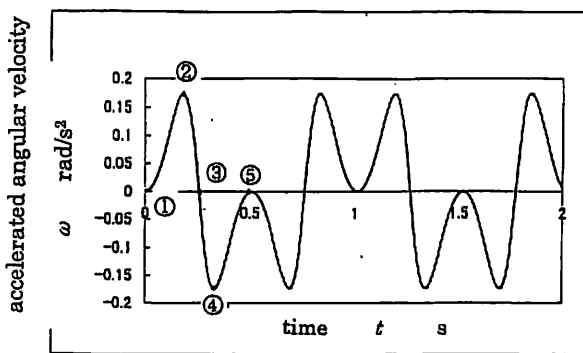


Fig. 4 Accelerated angular velocity of the load

ロープが、5番めでは背後側に位置するようになる。

図3, 4において、ロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに直角となった時点で、角加速度 ω が極値を示すことがわかる。また、つり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに並行となった時点で零となる。

3.1.2 回転モーメント M の時間的経過 図5は回転モーメントの時間的経過を示したものである。回転モーメントも、角加速度に応じた5個の変極点を持っている。ロープが解れていった場合、モーメントは徐々に小さくなっていく。そして、最初につり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに平行となった時点(3番めの変極点)で、モーメントの絶対値は最大値を示す。そして、荷 A-B が一回転し、ロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B とが互いに逆方向で平行となった時点(5番めの変極点)で、モーメント M は零を示すことがわかる。

3.1.3 ロープの長さが回転モーメントに及ぼす影響 図6はロープ長さを種々に変化させた場合に、荷がある一定の回転角まで回転した瞬間における回転モーメントと、ロープ長さとの関係を示したものである。ロープ長さが長いほど回転モーメントは小さくなる。

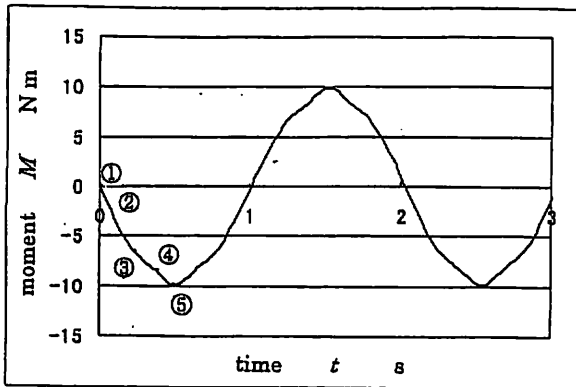


Fig. 5 Rotation moment of the load

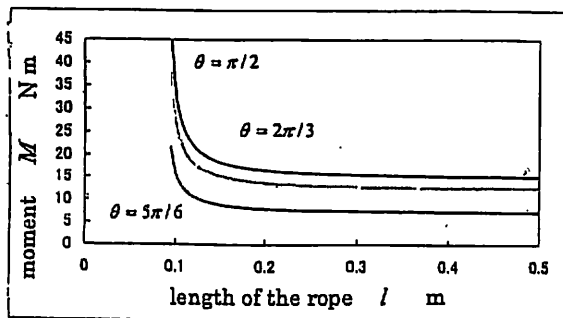


Fig. 6 Influence that the length of rope exerts on the rotation moment

るが、本解析例では、0.2 m 以上の場合はほとんど差異がないようである。

3.2 ロープどうしに交差を生じる場合

3.2.1 回転角加速度の時間的経過 式(4), (7)をルンゲクッタ法により数値解析した。荷を 2π まで回転し静止させた状態から離れた場合、荷が回転し始めて π の位置までは、ロープはねじれた状態にあり、徐々にねじれが解れていく。その際の挙動は、方程式(7)を用いて解析する。 π 以下となると接触がなくなるので、式(4)を用いて解析する。そして $-\pi$ に至ると、ロープどうしが再び接触しながらねじれ上がっていき状態となる。式(4)を用いて解析する際の初期条件には、方程式(7)を用いて解析した π の位置における速度を当てた。図7, 8は、この1周期内における角度、角加速度の変化状態を示したものである。1周期はほぼ3秒であり、その間にいくつかの変極点(9個)を持っている。ロープとの位置関係は以下になる。

最初の変極点は、初期状態でロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B とが平行な位置関係 ($\theta=2\pi$) にある(ねじれあり, A は紙面左側)。

2番めの変極点は、ロープのつり下げ部 a-b と荷 B-A との方向が互いに直角となった時点 ($\theta=3\pi/2$) である(B の位置は、紙面手前側)。

3番めの変極点は、ロープどうしの接触が外れた瞬

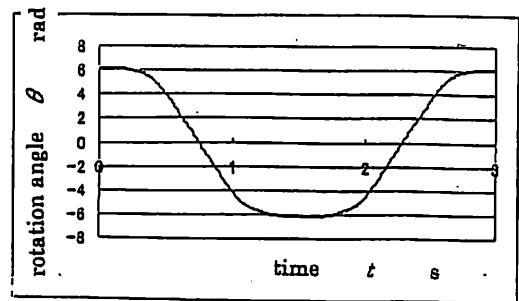


Fig. 7 Rotation angle of the load

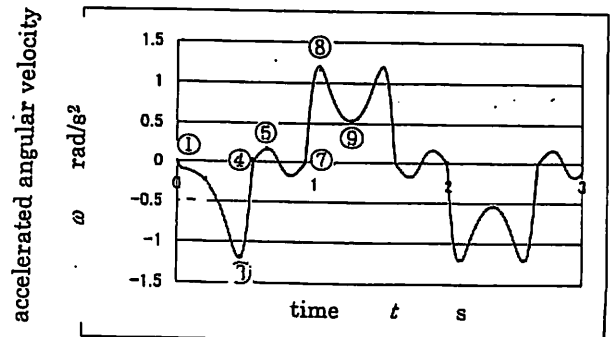


Fig. 8 Accelerated angular velocity of the load

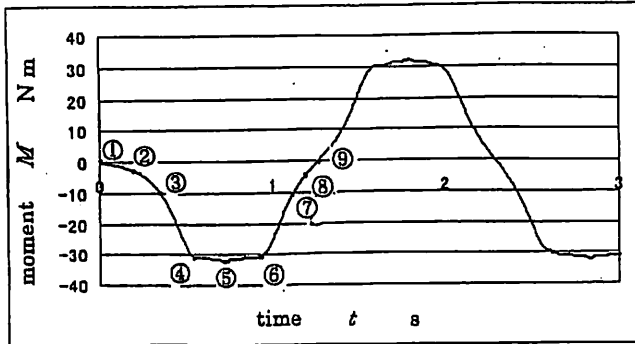


Fig. 9 Rotation moment of the load

間で、つり下げ部 a-b と荷 B-A とが平行な位置関係 ($\theta = \pi$) にある (B は紙面左側)。

4 番めの変極点は、ロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに直角となった時点 ($\theta = \pi/2$) である (A の位置は紙面手前側)。

5 番めの変極点は、ロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに並行となった時点 ($\theta = \pi$) である (ねじれなし, A は紙面左側)。

6 番めの変極点は、ロープのつり下げ部 a-b と荷 B-A との方向が互いに直角となった時点 ($\theta = -\pi/2$) である (ねじれなし, B の位置は紙面手前側)。

7 番めの変極点は、ロープどうしの接触が再び始まった瞬間で、つり下げ部 a-b と荷 B-A とが平行な位置関係 ($\theta = -\pi$) にある (B は紙面左側)。

8 番めの変極点は、ロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに直角となった時点 ($\theta = -3\pi/2$) である (A の位置は紙面手前側)。

9 番めの変極点は、ロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B とが平行な位置関係 ($\theta = -2\pi$) にある (ねじれを生じ, A は紙面左側)。

以後の回転は、9 番めの位置関係から初期の位置関係へと逆に進んでいく。

ただし、1 番めと 9 番めとは、ねじれているロープの位置関係が異なる。初期のねじれで紙面手前側に位置していたロープは、9 番めでは背後側に位置するようになる。図 7, 8 において、ロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに並行となった時点 (③, ⑦) では、角加速度 $\dot{\omega}$ が零となることがわかる。また、ねじれが解れていってつり下げ部 a-b と荷 A-B とが最初に直角となった時点、(②) およびねじれ上がっていき最初に直角となった時点 (⑧) で、角加速度は最大

値を示す。④, ⑥でも極値を示すが、値は小さい。

3.2.2 回転モーメント M の時間的経過 図 9 は回転モーメントの時間的経過を示したものである。回転モーメントも角加速度の場合と同様に、9 個の変極点を持っている。解れていった場合、モーメントの絶対値は徐々に大きくなっていく。そして、最初につり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに直角となった時点 (3.2.1 項で述べた 4 番めの位置) で、モーメントの増加は抑えられる。そして、ロープのつり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに並行となった時点 (3.2.1 項で述べた 5 番めの位置) では、モーメント M は極大値を示すことがわかる。その後、つり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに平行 (3.2.1 項で述べた 7 番めの位置) となるまで減少を続け、さらに、つり下げ部 a-b と荷 A-B との方向が互いに直角 (3.2.1 項で述べた 8 番めの位置) になるまで減少を続ける。そして、3.2.1 項で述べた 9 番めの位置では、回転モーメントは零となる。

これより先は、ロープのねじれ関係がそれまでとは逆になって、ねじれ上がっていく (したがって、上記と逆の過程をたどってねじれ上がっていくことになる)。これにより、回転モーメントは、それまでの過程での値を逆符号にしたものとなる。

4. まとめ

ロープどうしが交差したり、交差が解れたりすると、それに伴って 1 周期中にも、角加速度回転モーメントには数多くの変極点が生じる。得られた解析結果はつり荷の回転運動に関する基礎的な資料として、荷のつり下げ制御に有用なものであると考えられる。ちなみに、上端部の回転制御を行う場合には、変極点近傍でフィードフォワードのような制御を行わなくては、荷が安定的に位置決めできない恐れがある。制御法に関しては今後の課題である。

文 献

- (1) Shirai, T., *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 59, No. 561 (1993), pp. 1443-1447.
- (2) Yoshida, Y. and Hukao, T., *Proceeding of the Japan Society of Mechanical Engineers*, No. 013-1 (2001), pp. 57-61.
- (3) Yoshida, Y. and Hukao, T., *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 70, No. 694 (2004), pp. 1695-1699.