

## AR プレフィルタを用いた IIR 型適応等化器と IIR 型ウィーナーフィルタ

島村 徹也<sup>†a)</sup>(正員)      鈴木 誠史<sup>††</sup>(正員)

IIR-Type Adaptive Equalizer with AR Prefilter and IIR-Type Wiener Filter

Tetsuya SHIMAMURA<sup>†a)</sup> and Jouji SUZUKI<sup>††</sup>, *Regular Members*

<sup>†</sup> 埼玉大学工学部情報システム工学科, 浦和市

Faculty of Engineering, Saitama University, Urawa-shi, 338-8570 Japan

<sup>††</sup> 日本工業大学工学部情報工学科, 埼玉県

Faculty of Engineering, Nippon Institute of Technology, Minamisaitama-gun, Saitama-ken, 345-8501 Japan

a) E-mail: shima@sie.ics.saitama-u.ac.jp

あらまし 筆者らは、先に AR プレフィルタを用いた IIR 型の適応等化器を提案している。本論文では、その IIR 型適応等化器の特性を解析し、IIR 型ウィーナーフィルタとの関係を明らかにする。

キーワード 通信路推定, 通信路等化, AR プレフィルタ, IIR 型等化器, IIR 型ウィーナーフィルタ

### 1. まえがき

符号間干渉を取り除くために、多くの通信システムは受信側に等化器を用いている。通信路特性の変動を追従するために、等化器には通常適応フィルタが用いられる。システムが常に安定となり、かつ係数更新が容易であることから、フィルタ構成としては FIR 型フィルタが採用される。また、フィルタ係数の更新には、その計算の容易性から平均最小 2 乗 (LMS) アルゴリズムがしばしば適用される。しかし、このような LMS アルゴリズムに基づく FIR 型適応等化器は、通信路が悪条件となる場合、収束特性が急激に劣化してしまう。この問題を克服するために、筆者らは先に、自己回帰 (AR) プレフィルタを FIR 型等化器に縦続するフィルタ構成を提案している [1]。その適応処理は基本的に FIR フィルタに委ねられるが、プレフィルタが IIR 型であるため、全体としては IIR 型の適応等化器として構成される。

通信路の伝達関数が単位円に近い零点を有する場合、FIR 型等化器では、良好な結果を得るために極めて多くのタップ数を要する。これは、本来、通信路等化の問題が、通信路の逆特性を有するフィルタの設計問題に帰着されるためである。したがって、本質的には、通信路の逆特性を自然に表現できる IIR 型等化器が望ましい。文献 [1] の IIR 型適応等化器は、カルマンフィルタに基づく IIR 型適応等化器 [2], [4] に比

べ計算が容易であり、かつ安定性が保証できる点に特徴がある。しかし、文献 [1] では、FIR 型等化器への入力信号が形成する相関行列の固有値のばらつきを調べ、従来において主流とされる FIR 型等化器に対して、AR プレフィルタを用いることが優位であることを示すにとどまった。つまり、FIR 型等化器のための FIR 型ウィーナーフィルタのみが文献 [1] では考察された。そこで、本論文では、全体としてのフィルタ構成が IIR 型の場合、平均 2 乗誤差 (MSE) を最小にする最適フィルタは IIR 型のウィーナーフィルタ解となり得ることに着目し、文献 [1] の適応等化器に対する IIR 型ウィーナーフィルタの解釈を与えることにする。そして、AR プレフィルタと FIR 型等化器の縦続構成が最適フィルタとなる条件を導く。

### 2. IIR 型適応等化器

符号間干渉を伴うデジタル通信路が

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)x(n) + v(n) \quad (1)$$

のような離散時間モデルで表されるとする。ここで、 $h(m)$  は通信路のインパルス応答、 $x(n)$  と  $y(n)$  は通信路の入出力、 $v(n)$  は付加される白色雑音である。 $x(n)$  は、+1, -1 の値をとる擬似ランダム系列と仮定する。また、通信路の伝達関数は、インパルス応答  $h(m)$  の Z 変換で

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} h(i)z^{-i} \quad (2)$$

と表されるとする。すなわち、通信路インパルス応答はその長さが  $M$  である。

文献 [1] の IIR 型適応等化器は、次に示すような通信路推定と通信路等化の 2 ステップからなる。図 1 はそのシステム構成の図を示している。ここではトレーニングモードについて記述することにする。

[ステップ 1: 通信路推定]

まず、スイッチを SA に接続する。そして、伝達関数  $H_a(z)$  で表される FIR 型適応フィルタを用いて、通信路のインパルス応答を推定する。トレーニングモードにおいては、受信側で送信データと同期されたデータを得ることができるため、受信側のみで通信路の入出力信号が得られる。したがって、ここでの通信路推定は、入出力信号が与えられた場合のシステム同定問題に帰着される。 $H_a(z)$  の次数を  $H(z)$  と等しく

$M - 1$  と設定し, LMS アルゴリズムにより係数を更新することにする.

[ステップ 2: 通信路等化]

ステップ 1 の終了後, スイッチを SB に切り換える. そして, 縦続される二つのフィルタ  $P(z)$  と  $C(z)$  を用いて通信路を等化する.

ステップ 1 で推定された通信路のインパルス応答を  $h_a(m)$  とすると, 通信路推定器の伝達関数は

$$H_a(z) = \sum_{i=0}^{M-1} h_a(i)z^{-i} \quad (3)$$

である. この  $H_a(z)$  をもとにまずプレフィルタ  $P(z)$  を設計する. 基本的には,  $P(z)$  は  $H_a(z)$  の逆フィルタとなるように設計される. しかし, このとき, 分母の根  $z_i$  のうち大きさが 1 より大きいものは, その逆数  $1/z_i$  を根として用い, 多項式の係数を計算し直して用いる. すなわち, 計算し直された多項式を  $H'_a(z)$  とすると, プレフィルタ  $P(z)$  は

$$P(z) = \frac{1}{H'_a(z)} \quad (4)$$

として設計されることになる. このプレフィルタ  $P(z)$  は, 縦続される適応フィルタの係数更新中, 係数を固定して用いられる.

$P(z)$  と縦続されるフィルタ  $C(z)$  は, FIR 型の適応フィルタである. その伝達関数を

$$C(z) = \sum_{i=0}^N c(i)z^{-i} \quad (5)$$

で表すことにする. これは,  $N + 1$  個のタップ係数

を有する FIR 型等化器に対応する.  $C(z)$  の係数  $c(i)$  は, LMS アルゴリズムを用いて更新される.

上記の二つのフィルタを縦続する適応等化器は, 全体として

$$G_E(z) = P(z)C(z) \quad (6)$$

の伝達関数を有し, IIR 型の構成となる. したがって, IIR 型の等化器である. しかし, 分母の係数, すなわち  $P(z)$  の係数が  $C(z)$  の係数更新中に固定されるところに特徴がある. このため, 多くの IIR 型適応フィルタの抱える不安定性の問題は容易に回避される.

3. IIR 型ウィーナーフィルタによる解釈

等化器は, 一般に, 所望信号と等化器出力との MSE を最小とするように設計される. 今, 遅延量  $D$  を考慮すると, 所望信号は

$$u(n) = x(n - D) \quad (7)$$

である.

FIR 型フィルタの場合, MSE を最小とする最適フィルタすなわちウィーナーフィルタは, フィルタ長が有限で, 因果的であり, かつ安定であるという条件下で導出される. しかし, IIR 型フィルタの場合は, 因果的かつ安定であるという条件が課されるのみである. この緩和された条件を通信路等化の問題にあてはめれば, ウィーナーフィルタは IIR 型となり, その伝達関数は

$$G_W(z) = \frac{1}{R_{yy}^+(z)} \left[ \frac{R_{uy}(z)}{R_{yy}(z)} \right]_+ \quad (8)$$

で与えられる [3]. ここで,  $[\cdot]_+$  は因果的な部分を表している (そのインパルス応答は正の時間のみに値を有する). また

$$R_{yy}(z) = Z[\phi_{yy}(k)] \quad (9)$$

$$\phi_{yy}(k) = E[y(n+k)y(n)] \quad (10)$$

$$R_{uy}(z) = Z[\phi_{uy}(k)] \quad (11)$$

$$\phi_{uy}(k) = E[u(n+k)y(n)] \quad (12)$$

である.  $Z$  は  $Z$  変換,  $E$  は集合平均である.  $[\cdot]^+$  は極零点がすべて  $Z$  平面の単位円の中に存在し,  $[\cdot]^-$  はすべて外に存在することを意味する.

式 (8) は, 通信路の伝達関数  $H(z)$  を用いると

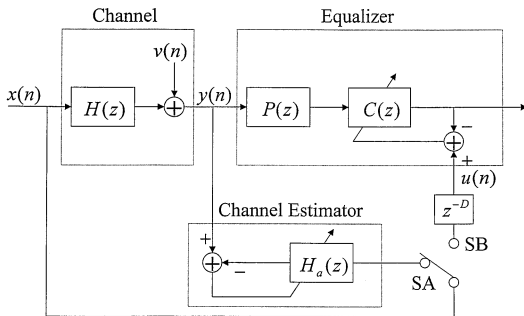


図 1 AR プレフィルタを用いた IIR 型適応等化器のブロック図  
Fig. 1 Block diagram of the IIR adaptive equalizer with AR prefilter.

$$G_W(z) = \frac{1}{R_{yy}^+(z)} \left[ \frac{z^{-D} H(z^{-1})}{R_{yy}^-(z)} \right]_+ \quad (13)$$

と書き換えられる [4] . したがって ,

$$W(z) = \frac{1}{R_{yy}^+(z)} \quad (14)$$

$$B(z) = \frac{z^{-D} H(z^{-1})}{R_{yy}^-(z)} \quad (15)$$

とおくと , 式 (13) は

$$G_W(z) = W(z)[B(z)]_+ \quad (16)$$

となる .

$R_{yy}(z)$  には

$$R_{yy}(z) = R_{yy}^+(z)R_{yy}^-(z) \quad (17)$$

の関係があるため ,  $R_{yy}^+(z)$  は最小位相の  $M-1$  次 FIR フィルタとなる . したがって , 式 (14) の  $W(z)$  は  $M-1$  の AR フィルタとなる . また , 式 (15) の  $B(z)$  は原点に  $D$  個の極 , 単位円外に  $M-1$  個の極を有する . したがって , そこに因果性の条件を課すことにより ,  $[B(z)]_+$  は  $D$  次の FIR フィルタとなる . 結局 , 式 (16) で与えられる IIR 型ウィナーフィルタの伝達関数は , AR フィルタと FIR フィルタの縦続構成となる .

さて , ここで式 (6) を考えてみる . 通信路推定器は ,  $M$  の正確な設定のもとに , 不偏推定量を与え得る . このとき

$$H(z) = H_a(z) \quad (18)$$

となる . 大きさが 1 より大きい根が存在する場合には , その根を逆数にして入れ直す必要があるが , この処理は ,  $v(n) = 0$  のとき , 関係式

$$R_{yy}^+(z) = H_a'(z) \quad (19)$$

を導く . なぜなら ,  $R_{yy}(z)$  と  $H(z)$  の間には

$$R_{yy}(z) = H(z)H(z^{-1})\sigma_x^2 + \sigma_v^2 \quad (20)$$

の関係があるためである . ここで ,  $\sigma_x^2, \sigma_v^2$  はそれぞれ通信路入力及び付加雑音の分散を表している . 送信信号は  $+1, -1$  の値をとる擬似ランダム系列と仮定されるので ,  $\sigma_x^2 = 1$  である . したがって ,  $\sigma_v^2 = 0$  であれば , 式 (18) を式 (20) に代入し , 式 (17) の多項式分解を施すことにより , 式 (19) が導ける .

式 (19) が成り立てば , 式 (4) と式 (14) の関係から

$$P(z) = W(z) \quad (21)$$

となる . このとき , 縦続される FIR 型等化器  $C(z)$  の次数  $N$  を

$$N = D \quad (22)$$

と設定すれば , 式 (6) と式 (16) は結局等しくなる . したがって , 文献 [1] の IIR 型適応等化器は ,  $v(n) = 0$  のとき , 式 (22) の条件のもとに , IIR 型ウィナーフィルタと同じ伝達関数を与えることになる .

#### 4. 数 値 例

通信路が最小位相であり , かつ  $v(n) = 0$  の場合 , ウィナーフィルタの伝達関数 (式 (16)) は

$$G_W(z) = \frac{1}{H(z)} z^{-D} \quad (23)$$

となることが容易に示せる . したがって , ここでは通信路が非最小位相の場合を取り上げることにする .

今 , 通信路伝達関数が

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} \quad (24)$$

で与えられる場合を考えよう . このとき , 通信路推定器が不偏推定量を与えれば , 式 (4) の分母は

$$H_a'(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \quad (25)$$

となる . 一方 , 式 (20) より ,  $\sigma_x^2 = 1, \sigma_v^2 = 0$  において

$$\begin{aligned} R_{yy} &= (1 + 2z^{-1}) \cdot (1 + 2z) \\ &= 2z(1 + 2z^{-1}) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \end{aligned} \quad (26)$$

であるから , 式 (17) を施せば

$$\begin{aligned} R_{yy}^+(z) &= 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \\ &= H_a'(z) \end{aligned} \quad (27)$$

が得られる (式 (19) が成立) . また ,

$$R_{yy}^-(z) = 2z(1 + 2z^{-1}) \quad (28)$$

となる . したがって , 遅延量を  $D = 1$  と設定するとすると , 式 (15) は

$$B(z) = \frac{z^{-1} \cdot (1 + 2z)}{2z(1 + 2z^{-1})} \quad (29)$$

となり , 分母の  $2z$  をはらって展開すると

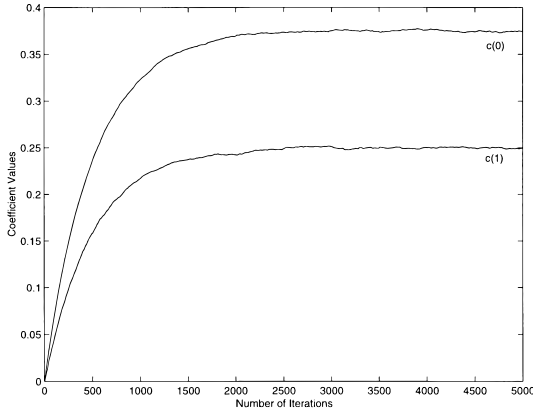


図2 タップ係数の収束特性  
Fig. 2 Convergence characteristics of tap coefficients.

$$B(z) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8} \frac{1}{1+2z^{-1}} \quad (30)$$

となる。ここで、極が単位円の外にある項を取り除けば、因果的な部分が残るので、結局

$$[B(z)]_+ = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}z^{-1} \quad (31)$$

となる。したがって、ウィーナーフィルタは式(16)であるから、式(27)を式(14)に代入し、また式(31)を用いて

$$G_W(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}}(0.375 + 0.25z^{-1}) \quad (32)$$

となる。

文献[1]でのIIR型適応等化器におけるプレフィルタ  $P(z)$  を上記の  $H'_a(z)$  から設計したときの、縦続されるFIR型適応フィルタ  $C(z)$  の収束特性を計算機シ

ミュレーションで調べた。図2は、式(22)、すなわち  $N=1$  の設定のもとに、LMSアルゴリズムのステップサイズを0.0005としたときの、独立した20回の試行の平均結果を示している。 $C(z)$  が有する二つの係数  $c(0)$  と  $c(1)$  が、それぞれ0.375と0.25に収束していく様子が見てとれる。このとき、明らかに  $C(z)$  は式(31)の  $[B(z)]_+$  と一致し、得られるIIR型適応等化器の伝達関数は式(32)となる。

## 5. むすび

本論文では、先に筆者らが提案したARプレフィルタを用いたIIR型の適応等化器を、IIR型のウィーナーフィルタを用いて表現した。そして、そのIIR型等化器は、付加雑音がない場合に、縦続されるFIRフィルタの次数を遅延量と等しく設定することにより、IIR型ウィーナーフィルタを最適フィルタとする構成になることを示した。

## 文 献

- [1] 伊藤克子, 島村徹也, 八嶋弘幸, 鈴木誠史, “全極型プレフィルタを用いたIIR型適応等化器,” 信学論(A), vol. J76-A, no.9, pp.1279–1285, Sept. 1993.
- [2] R.E. Lawrence and H. Laufman, “The Kalman filter for the equalization of a digital communications channel,” IEEE Trans. Commun. Technol., vol. CT-19, no.6, pp.1137–1141, Dec. 1971.
- [3] C.W. Therrien, Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.
- [4] B. Mulgrew and C.F.N. Cowan, “An adaptive Kalman equalizer: Structure and performance,” IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Process., vol. ASSP-35, no.12, pp.1727–1735, Dec. 1987.

(平成12年1月24日受付, 5月8日再受付)