Correlation Functions in Two-Dimensional Dilaton Gravity

東京工業大学　松村陽一郎
東京工業大学　坂井典佑
埼玉大学　谷井義彰
東京工業大学　内野琢

最近、ブラックホールの蒸発と、その量子的反作用の効果について、二次元のディラトン重力理論のモデルを用いて活発に研究が行われている [1]-[4]。現在までのところブラックホールに関する議論は、おもに古典的あるいは半古典的になされており完全な量子論が望まれる。ディラトン重力の量子化は直接には困難であるが、最近共形場理論を用いた方法が提案されている [3][4]。我々もこの方法を用い、局所演算子の相関関数を求めた [5]。

アインシュタイン作用は二次元においては位相不変量であるが、以下のようにスカラー場ϕを導入すると力学的な意味を持つ。

$$
\begin{aligned}
S_{\text{classical}} &= S_{\text{dilaton}} + S_{\text{matter}} \\
S_{\text{dilaton}} &= \frac{1}{2\pi}\int d^2z\sqrt{\bar{g}}\,\left[-\mathrm{e}^{-2\phi}\bar{R}+2\mu\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int d^2z\sqrt{g}\,\mathrm{e}^{-2\phi}\left[-R-4g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+2\mu\right] \\
S_{\text{matter}} &= \frac{1}{8\pi}\int d^2z\sqrt{\bar{g}}\sum_{j=1}^{N}\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu f^j\partial_\nu f^j
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここでメトリックの符号はユークリッドであり、ϕはディラトン場と呼ばれ、物質場としてはN個の質量0のスカラー場を考える。また $g_{\mu\nu}$と$\bar{g}_{\mu\nu}$はローカルなワイル変換 $g_{\mu\nu}=e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu}$で結ばれている。

分配関数 Zは、種数 hを持つリーマン面からの寄与を Z_hとし、重み g_{st}^{2h-2}をかけて各トポロジーについてたし合わせると以下のようになる。

$$
Z=\sum_{h=0}^{\infty}g_{\text{st}}^{2h-2}Z_h,\qquad Z_h=\int\frac{\mathcal{D}_g g_{\mu\nu}\mathcal{D}_g\phi\mathcal{D}_g f}{V_{\text{gauge}}}\,\mathrm{e}^{-S_{\text{classical}}[g,\phi,f]}
\tag{2}
$$

ここで $V_{\rm gauge}$は一般座標変換の群の体積である。コンフォーマルゲージ $g_{\mu\nu}=e^{2\rho}\hat{g_{\mu\nu}}(\tau)$ をとると $g_{\mu\nu}$の汎関数積分はモデュライパラメータτ、リュービル場ρ、及びゴースト場 c 、b の積分に置き変わる [6]。

$$\frac{\mathcal{D}_g g_{\mu\nu}}{V_{\rm gauge}}=\frac{[d\tau]}{V_{\rm CKV}}\mathcal{D}_g\rho\mathcal{D}_g b\mathcal{D}_g c\ {\rm e}^{-S_{\rm ghost}[g,b,c]} \tag{3}$$

ここで $V_{\rm CKV}$はコンフォーマルキリングベクトルで生成される群の体積である。

我々は今 $g_{\mu\nu}$によって定義された測度 D_gを用いているが、これを $D_{\hat{g}}$に変えるとヤコビアンとしてワイルアノマリーが出てくる。物質場及びゴースト場に対しては

$$\mathcal{D}_{{\rm e}^{2\rho}\hat{g}}f\mathcal{D}_{{\rm e}^{2\rho}\hat{g}}b\mathcal{D}_{{\rm e}^{2\rho}\hat{g}}c=\mathcal{D}_{\hat{g}}f\mathcal{D}_{\hat{g}}b\mathcal{D}_{\hat{g}}c\ {\rm e}^{-S^{{\rm gh},f}_{\rm anomaly}},\quad S^{{\rm gh},f}_{\rm anomaly}=\frac{26-N}{12}S_{\rm L}[\rho,\hat{g}]$$

$$S_{\rm L}[\rho,\hat{g}]=\frac{1}{2\pi}\int d^2z\sqrt{\hat{g}}\left(\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\rho\partial_\nu\rho+\hat{R}\rho\right) \tag{4}$$

となることが分かっている [6]。しかしリュービル場ρ及びディラトン場ϕ にたいしてはヤコビアンを直接計算することができない。よってリュービル重力の場合 [7] と同じように以下のような仮設をたてる [3]-[5]。

$$S=S_{\rm kin}+S_{\rm cosm},\qquad S_{\rm kin}=S_{\rm dilaton}(\mu=0)+S_{\rm anomaly}+S_{\rm matter}$$

$$\begin{aligned}S_{\rm kin}=&\frac{1}{2\pi}\int d^2z\sqrt{\hat{g}}\Big[{\rm e}^{-2\phi}\left(-4\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+4\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\rho-\hat{R}\right)\\&-\kappa\left(\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\rho\partial_\nu\rho+\hat{R}\rho\right)+a\left(2\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\rho+\hat{R}\phi\right)\\&+b\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu f^j\partial_\nu f^j\Big]\end{aligned} \tag{5}$$

$\kappa\neq0$のとき、以下のように変数変換をする。

$$\begin{aligned}\omega&={\rm e}^{-\phi},\quad \chi=-\frac{\rho}{2}-\frac{\omega^2+a\ln\omega}{2\kappa}=\frac{\hat{\chi}}{4\sqrt{|\kappa|}}\\ d\Omega&=-\frac{1}{\kappa}d\omega\sqrt{\omega^2-\kappa+a+\frac{a^2+b\kappa}{4\omega^2}}=\frac{d\hat{\Omega}}{4\sqrt{|\kappa|}}\end{aligned} \tag{6}$$

これらを代入すると運動項 S_{kin}は自由場の作用になる。

$$S_{\rm kin}=\frac{1}{8\pi}\int d^2z\sqrt{\hat{g}}\left(\mp\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\hat{\chi}\partial_\nu\hat{\chi}\pm2\sqrt{|\kappa|}\hat{R}\hat{\chi}\pm\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\hat{\Omega}\partial_\nu\hat{\Omega}+\sum_{j=1}^{N}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu f^j\partial_\nu f^j\right) \tag{7}$$

$\kappa>0$のときは、$\hat{\chi}$が負のメトリックを持ち、$\kappa<0$のときは、$\hat{\Omega}$が負のメトリック持つことを除くと S_{kin}は $c=N+1$のリュービル理論と見なすことができる。$\kappa=0$のときも同様に以下のように変数変換をすると自由場の作用が与えられる。

$$\chi^{\pm}=Q\left(-\rho-\frac{b}{2a}\phi-\frac{2a+b}{4a}\log|\,{\rm e}^{-2\phi}+\frac{a}{2}|\right)\pm\frac{2}{Q}\left({\rm e}^{-2\phi}-a\phi\right) \tag{8}$$

$$S_{\rm kin} = \frac{1}{8\pi}\int d^2z\sqrt{\hat{g}}\left(\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\chi^+\partial_\nu\chi^+ - Q\hat{R}\chi^+ \right.$$
$$\left. -\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\chi^-\partial_\nu\chi^- + Q\hat{R}\chi^- + \sum_{j=1}^{N}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu f^j\partial_\nu f^j\right) \qquad (9)$$

κはコンフォーマル不変性から次のように求まる [4][5]。

$$\kappa = \frac{N-24}{12} \qquad (10)$$

相関関数を求めるにあたって、我々はこれらの自由場の並進不変な経路積分測度によって計算する。もともとの場ρ、ϕから見ると、これらの測度は非線形であり、積分範囲についても問題が残る。しかしディラトン重力はそのままでは量子化が困難である。よって我々はディラトン重力の量子化をこれらの自由場の並進不変な測度によって定義するという立場に立つ。

次に BRST チャージによるコホモロジーを求め、どのような物理的状態が存在するかを見てみる [5][8][9]。ここでは結果について簡単に述べるに留める。

まず $N=0$ のときはリュービル重力では $c=1$ に対応し、一般の運動量のときにはタキオンと呼ばれる状態が存在する。さらに運動量がある特別の値を持つときは離散状態 [10] と呼ばれる状態が存在する。離散状態は可算無限個存在する。$N\neq 0$ のときは一般の弦の振動状態の他に、$N=0$ のときの離散状態に対応するものが有限個存在する。

宇宙項は、BRST コホモロジー類に存在すること、また弱重力結合極限 $e^\phi\to 0$ でもともとの宇宙項に一致するという二つの条件を課すと、以下のように唯一に決まる。

$$S_{cosm} = \begin{cases} \frac{\mu}{\pi}\int d^2z\sqrt{\hat{g}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{|\kappa|}}(-\hat{\chi}+\hat{\Omega})} & \text{for } \kappa\neq 0 \\ \frac{\mu}{\pi}\int d^2z\sqrt{\hat{g}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{Q}(\chi^+ + \chi^-)} & \text{for } \kappa = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

とくに $N=0$ のときは、宇宙項の運動量が BRST コホモロジーのところで述べた特別な値になっている。

次に、BRST コホモロジー類の中で運動量固有状態、即ちリュービル重力でいうところのタキオン頂点演算子の相関関数を計算する [5]。まず $N\neq 24$ のときゼロモードの積分を実行すると以下のようになる。

$$\left\langle\prod_{k=1}^{n} O_{p_k}\right\rangle = \int\frac{[d\tau]\mathcal{D}_{\hat{g}}\hat{\chi}\mathcal{D}_{\hat{g}}\hat{\Omega}\mathcal{D}_{\hat{g}}f}{V_{\rm CKV}}\,\mathrm{e}^{-S[\hat{\chi},\hat{\Omega},f,\hat{g}]}\,O_{p_1}\cdots O_{p_n}$$

$$= (2\pi)^{N+1}\delta\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)\delta\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_{\Omega k}+\frac{s}{\sqrt{|\kappa|}}\right)\sqrt{|\kappa|}\,\Gamma(-s)\tilde{A}(p_1,\cdots,p_n)$$

$$\tilde{A}(p_1,\cdots,p_n) = \int\frac{[d\tau]\prod_{k=1}^{n}\left[d^2z_k\sqrt{\hat{g}(z_k)}\right]}{V_{\mathrm{CKV}}}\left\langle\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ip_k\cdot\tilde{X}(z_k)}\left(\frac{\mu}{\pi}\int d^2w\sqrt{\hat{g}}\ \mathrm{e}^{iq\cdot\tilde{X}}\right)^s\right\rangle_{\tilde{X}} \qquad (12)$$

ここで

$$O_p = \int d^2z\sqrt{\hat{g}}\ \mathrm{e}^{\beta_\chi\hat{\chi}+\beta_\Omega\hat{\Omega}+ip_jf^j}$$

$$\frac{1}{2}\beta_\chi\left(\beta^\chi+2\sqrt{|\kappa|}\right)-\frac{1}{2}\beta_\Omega\beta^\Omega+\frac{1}{2}p_jp^j = 1 \qquad (13)$$

である。また $s=\sqrt{|\kappa|}\sum_{k=1}^{n}\beta_{\chi k}-2\kappa(1-h)$ であり、$\tilde{X}^I$は X^Iのうちノンゼロモードの部分を表している。添え字の上げ下げは$\eta_{IJ}=\left(\frac{-\kappa}{|\kappa|},\frac{\kappa}{|\kappa|},+1,\cdots,+1\right)$で行う。保存則は次のようになる。

$$\sum_{k=1} p_k^I + sq^I = -Q^I(1-h) \qquad (14)$$

$p_I\equiv(-i\beta_\chi,-i\beta_\Omega,p_j)$ は各場 $X^I=(\hat{\chi},\hat{\Omega},f^j)$ に対応する、O_p の持つ運動量であり、$q_I=\left(\frac{i}{\sqrt{|\kappa|}},\frac{-i}{\sqrt{|\kappa|}},0,\cdots,0\right)$ は宇宙項の運動量であり、$Q^I=\left(-2\sqrt{|\kappa|}i,0,0,\cdots,0\right)$ はバックグラウンドソースである。

$N\neq 24,0$ のときは球面上での三点関数が計算でき次のようになる。

$$\tilde{A}(p_1,p_2,p_3) = [\mu\Delta(1+p_1\cdot q)\Delta(1+p_2\cdot q)\Delta(1+p_3\cdot q)]^s \qquad (15)$$

ここで$\Delta(x)\equiv\Gamma(x)/\Gamma(1-x)$ である。

$N=24$ のときも同様に球面上で三点関数は以下のようになる。

$$\left\langle\prod_{k=1}^{3}O_{p_k}\right\rangle = (2\pi)^{25}\delta\left(\sum_{k=1}^{3}p_k\right)\delta\left(\frac{1}{Q}\sum_{k=1}^{3}(\beta_{\chi+k}-\beta_{\chi-k})+2\right)\Gamma(-s)\tilde{A}(p_1,p_2,p_3) \qquad (16)$$

ここで $s=\frac{Q}{2}\sum_{k=1}^{3}(\beta_{\chi+k}+\beta_{\chi-k})$ であり$\tilde{A}$は (15) と同じものである。

$N=0$ のときは球面上で任意の n について n 点関数が計算できる。このとき、まえに述べたように宇宙項の運動量 q_Iが特別の値をとるので相関関数は特異になっている。そこで正則化のために q_Iの値をこの値から少しずらしたところに置いて計算を行う。$N=0$ のときオン·シェル状態の解は次のようになる。

$$\beta_\chi^{(\pm)} = -\sqrt{2}\pm\beta_\Omega \qquad (17)$$

$$\times [\mu\Delta(-\rho)]^s \frac{\pi^{n-3}}{\Gamma(n+s-2)} \prod_{k=2}^{n} \Delta(1-\sqrt{2}\beta_{\Omega k}) \tag{18}$$

ここで正則パラメータ$\rho = \frac{\alpha\alpha}{2}$は最終的には0にもっていく。$\Delta(-\rho)$の発散は以下のように宇宙項をくりこんでやることで吸収される。

$$\mu_r = \mu\Delta(-\rho) \tag{19}$$

今回、求められた局所演算子の相関関数はディラトン重力の量子論の第一歩であり、現在宇宙の波動関数などの研究を進行中である。

参考文献

[1] C.G. Callan, S.B. Giddings, J. Harvey and A. Strominger, *Phys. Rev.* **D45** (1992) R1005.

[2] J. Russo and A.A. Tseytlin, Stanford preprint SU-ITP-92-2 (1992); J. Russo, L. Susskind and L. Thorlacius, Stanford preprint SU-ITP-92-4 (1992); T. Banks, A. Dabholkar, M. Douglas, and M. O'Loughlin, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 3607; S. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 406; D. Cangemi and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* (1992) ; T.T. Burwick and A.H. Chamseddine, hep-th/9204002; S.W. Hawking and J.M. Stewart, hep-th/9207105 (1992).

[3] A. Strominger, Santa Barbara preprint UCSBTH–92–18 (1992).

[4] A. Bilal and C. Callan, Princeton preprint PUPT–1320 (1992); S.P. de Alwis, S.P. de Alwis, Colorado preprints COLO-HEP-280, 284, 288 (1992); S.B. Giddings and A. Strominger, UCSB-TH-92-28 (1992); A. Miković, QMW/PH/92/12.

[5] Y. Matsumura, N. Sakai, Y. Tanii and T. Uchino, Tokyo Inst. of Tech. and Saitama preprint TIT/HEP–204, STUPP–92–131 (1992).

[6] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* **B103** (1981) 207; D. Friedan, in *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics*, eds. J.B. Zuber and R. Stora, (North-Holland, Amsterdam, 1984).

[7] F. David, *Mod. Phys. Lett.* **A3** (1988) 1651; J. Distler and H. Kawai, *Nucl. Phys.* **B321** (1989) 509; J. Distler, Z. Hlousek and H. Kawai, *Int. J. of Mod. Phys.* **A5** (1990) 391; 1093.

[8] A. Bilal, *Phys. Lett.* **B282** (1992) 309.

[9] B.H. Lian and G.J. Zuckerman, *Phys. Lett.* **B254** (1991) 417; **B266** (1991) 21; S. Mukherji, S. Mukhi and A. Sen, *Phys. Lett.* **B266** (1991) 337; P. Bouwknegt, J. McCarthy and K.Pilch, *Commun. Math. Phys.* **145** (1992) 541; N. Ohta, Osaka preprint OS–GE 26–92 (1992).

[10] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B373** (1992) 187; J. Avan and A. Jevicki, *Phys. Lett.* **B266** (1991) 35; D. Minic, J. Polochinski and Z. Yang, *Nucl. Phys.* **B369** (1992) 324; S. Das, A. Dhar, G. Mandal and S. Wadia, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 71, 937; I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 3273; Y. Matsumura, N. Sakai and Y. Tanii, Tokyo Inst. of Tech. and Saitama preprint TIT/HEP–186, STUPP–92–124 (1992).