Soryushiron Kenkyu

Dilaton Gravity in $2+\epsilon$ Dimensions

埼玉大・理　谷井義彰

1. 序論

4次元時空で重力の量子論を定式化するさいの困難の1つは，理論がくりこみ可能でないことである．しかし，次元解析によると，2次元時空における重力理論はくりこみ可能であるようにみえる

$$S_{\mathrm{Einstein}} = \frac{1}{16\pi G}\int d^dx\sqrt{-g}R, \qquad [G] = (\mathrm{mass})^{-d+2}. \tag{1}$$

したがって，2次元の近く ($d = 2+\epsilon$ 次元) で量子論を考えることができ，それを ϵ について解析接続することによって高次元の量子重力理論を構成しようという試みがある [1], [2], [3]. このような $2+\epsilon$ 次元の方法は，非線形シグマ模型などに使われているが，重力理論では次のような固有の困難 (oversubtraction の問題) があることが論文 [3] で指摘された．

2次元では，Einstein 作用は位相不変量 (Euler 数) であり，Lagrangian 密度は全微分になっている．このことから，$2+\epsilon$ 次元では，全微分の項を無視すると，計量の共形モード (Liouville 場) ρ を含む項は，$O(\epsilon)$ のオーダーになっている．特に，運動項が $O(\epsilon)$ であることから，Liouville 場のプロパゲータは，$1/\epsilon$ という特異性をもつ

$$\langle\rho(x)\rho(y)\rangle_0 = O(\epsilon^{-1}). \tag{2}$$

この $1/\epsilon$ の因子は，通常のループ積分の紫外発散による特異性の他に，余分な特異性を生じさせる可能性がある．この余分な特異性の係数は，一般に，非局所的な関数であり，通常のくりこみの操作によって取り除くことができない．

具体的に摂動論の計算をしてみると，1-ループのオーダーでは，このような余分な特異性は現れないことがわかる．これは，Liouville 場を含んだ相互作用項が，$O(\epsilon)$ のオーダーで，これがプロパゲータの $1/\epsilon$ を相殺するためである．実際，すべての $1/\epsilon$ の特異性は，局所的な相殺項

$$S_{\mathrm{counter}} = \mathrm{constant}\ \times \frac{1}{\epsilon}\int d^dx\sqrt{-g}R \tag{3}$$

NII-Electronic Library Service

Soryushiron Kenkyu

によって取り除くことができる．この相殺項の中で，Liouville 場を含む項は $O(\epsilon^0)$ のオーダーで，引きすぎ (oversubtraction) になっているが，一般座標変換不変性のために必要である．高次ループのオーダーでは，相殺項 (3) の中の $O(\epsilon^0)$ の相互作用項を使ったダイアグラムを考える必要があり，その場合は，Liouville プロパゲータの $1/\epsilon$ の因子のために余分な非局所的な特異性が現れてしまう．これが，論文 [3] で指摘された oversubtraction の問題である．

論文 [3] では，一般座標変換不変性を持たない作用を使うことによって，この困難を避けている．しかし，一般座標変換不変性は非常に基本的な対称性であり，これを常に保つように理論を構成するほうがより自然で望ましい．

$2+\epsilon$ 次元における dilaton 重力 [4] は，一般座標変換不変性を保ちながら oversubtraction の問題を解決する可能性を与える．$d>2$ 次元では，dilaton 重力と Einstein 重力は等価である．したがって，$2+\epsilon$ 次元の dilaton 重力を，高次元の Einstein 重力を定義するための出発点として考えることができる．また，dilaton 重力では，すべての場のプロパゲータは，$\epsilon\to 0$ の極限で有限であり，oversubtraction の問題は現れない．以下では，$2+\epsilon$ 次元における dilaton 重力の量子化を議論した論文 [4] の内容を紹介する．

2. モデル

ここで考えるモデルは，計量 $g_{\mu\nu}$ とスカラー場 ϕ, X^i $(i=1,\cdots,N)$ からなる．作用としては，

$$S=\int d^dx\sqrt{-g}\left[\frac{\mu^\epsilon}{16\pi G}R\,\mathrm{e}^{-2\phi}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu X^i\partial_\nu X^j\delta_{ij}\,\mathrm{e}^{-2\Phi(\phi)}\right],\quad \Phi(0)=0 \tag{4}$$

を考える．ここで，G, μ は，それぞれ，重力定数，くりこみのスケールである．この作用は，場の再定義の自由度を除いては，(i) 一般座標変換不変であり，(ii) X^i の N 次元 Euclid 変換不変であり，(iii) $d\to 2$ の極限で無次元の相互作用だけを含む最も一般的な作用である．

この作用は，Weyl 変換 $g'_{\mu\nu}=\mathrm{e}^{-4\phi/\epsilon}g_{\mu\nu}$ によって，Einstein 重力の作用に変形することができる

$$\begin{aligned}S=\int d^dx\sqrt{-g'}\Bigg[&\frac{\mu^\epsilon}{16\pi G}\left(R'-\frac{4(1+\epsilon)}{\epsilon}g'^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right)\\&-\frac{1}{2}g'^{\mu\nu}\partial_\mu X^i\partial_\nu X^j\delta_{ij}\,\mathrm{e}^{-2\Phi(\phi)+2\phi}\Bigg].\end{aligned} \tag{5}$$

NII-Electronic Library Service

Soryushiron Kenkyu

このとき, $2+\epsilon$ 次元の方法では, 変数変換による汎関数積分のヤコビアンは現れない. したがって, $d>2$ 次元では, dilaton 重力は Einstein 重力と等価である. (計量の変換性と作用 (5) に現れる $1/\epsilon$ の因子からわかるように, $d=2$ では, この等価性は成り立たない.) このように, dilaton 重力は Einstein 重力と等価であるから, $2+\epsilon$ 次元の dilaton 重力を, 高次元の Einstein 重力を定義するための出発点として考えることができる.

3. 1−ループのくりこみ

次に, 背景場の方法を使って1−ループのくりこみを考える. そのために, 計量を背景場 $\hat{g}_{\mu\nu}$ と量子場 $h^{\mu}{}_{\nu}$, ρ に分解する

$$g_{\mu\nu}=\hat{g}_{\mu\lambda}(\mathrm{e}^{\kappa h})^{\lambda}{}_{\nu}\,\mathrm{e}^{-2\kappa\rho}, \qquad \kappa=\sqrt{\frac{16\pi G}{\mu^{\epsilon}}}. \tag{6}$$

量子場 $h^{\mu}{}_{\nu}$ と ρ は, それぞれ, 対称トレースレスな場と共形モード (Liouville 場) を表す. スカラー場も背景場と量子場に分解する $\phi=\hat{\phi}+\kappa\phi_q$, $X^i=\hat{X}^i+X^i_q$. ゲージ固定項は,

$$S_{\mathrm{GF}}=-\frac{1}{2}\int d^dx\sqrt{-\hat{g}}\,\mathrm{e}^{-2\hat{\phi}}\left[\hat{D}^{\nu}h_{\mu\nu}+\partial_{\mu}(\epsilon\rho_q+2\phi_q)\right]^2 \tag{7}$$

という形を選ぶ. Einstein 重力の場合と違い, すべての場のプロパゲータは $\epsilon\to 0$ の極限で特異性を持たない.

1−ループの発散を計算すると, それは, 相殺項

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{counter}}&=-\mu^{\epsilon}\int d^dx\sqrt{-g}\left[\frac{24-N}{24\pi\epsilon}R+g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi B(\phi)\right],\\ B(\phi)&=-\frac{1}{\pi\epsilon}+\frac{N}{4\pi\epsilon}\left[(\Phi'(\phi))^2-\Phi''(\phi)-2\Phi'(\phi)\right]\end{aligned} \tag{8}$$

によってすべて取り除けることがわかる. 作用 (4) と相殺項 (8) の和は, 相互作用定数と場のくりこみにより, もとの作用の形にもどすことができる

$$\begin{aligned}S_0&=S+S_{\mathrm{counter}}\\ &=\int d^dx\sqrt{-g_0}\left[\frac{1}{16\pi G_0}R_0\,\mathrm{e}^{-2\phi_0}-\frac{1}{2}g_0^{\mu\nu}\partial_{\mu}X_0^i\partial_{\nu}X_0^i\,\mathrm{e}^{-2\Phi_0(\phi_0)}\right].\end{aligned} \tag{9}$$

ここで, $g_{0\mu\nu}$, ϕ_0, X_0^i ははだかの場, G_0, Φ_0 ははだかの相互作用定数であり, くりこまれた場と相互作用定数 $g_{\mu\nu}$, ϕ, X^i, G, Φ を使って表すことができる.

NII-Electronic Library Service

Soryushiron Kenkyu

4. ベータ関数と固定点

ベータ関数は，はだかの量がくりこみのスケール μ によらないことから

$$\beta_G \equiv \mu \frac{\partial G}{\partial \mu} = \epsilon G - \frac{2}{3}(24-N)\, G^2,$$

$$\beta_\Phi(\phi_0) \equiv \mu \frac{\partial \Phi(\phi_0)}{\partial \mu} = \frac{1}{3}(24-N)\, G \left(e^{2\phi_0} - 1 \right) \Phi'(\phi_0)$$

$$+ \frac{2\pi\epsilon^2 G}{\epsilon + 1} \left(\Phi'(\phi_0) - 1 \right) \int_0^{\phi_0} d\phi' \, e^{2\phi'} B(\phi') \tag{10}$$

と求めることができる．重力定数 G に対するベータ関数 β_G は，Einstein 重力の場合 [3] とよく似ている．$N < 24$, $\epsilon > 0$ のときには，$G = 0$ は 赤外安定な固定点であり，

$$G = G^*, \qquad G^* = \frac{3\epsilon}{2(24-N)} \tag{11}$$

は，紫外安定な固定点である．ベータ関数 β_Φ の固定点をみつけるために ansatz として $\Phi(\phi) = \lambda\phi$ ($\lambda = \mathrm{constant}$) とおくと，固定点

$$\Phi(\phi) = \lambda^* \phi, \qquad \lambda^* = -\frac{3\epsilon}{24-N} + O(\epsilon^2) \tag{12}$$

が得られる．

次に，固定点 (11), (12) の紫外領域での安定性を考える．固定点の近くの相互作用定数 $G = G^* + \delta G$, $\Phi = \lambda^* \phi + \delta\Phi$ に対するベータ関数は，δG, $\delta\Phi$ の 1 次まで考えると

$$\beta_G = -\epsilon \delta G,$$

$$\beta_{\tilde{\Phi}} = -\frac{1}{2}\epsilon (1 - e^{2\phi}) \frac{d}{d\phi} \delta\tilde{\Phi} + O(\epsilon^2) \tag{13}$$

となる．ここで，

$$\tilde{\Phi}(\phi) \equiv \Phi(\phi) + \left(1 + \frac{2\phi\, e^{2\phi}}{1 - e^{2\phi}} \right) G \tag{14}$$

とおいた．(13) の初めの式は，固定点が，G の方向に紫外安定であることを示している．2 番目の式の右辺の微分演算子の固有関数は，$\delta\tilde{\Phi} = (e^{-2\phi} - 1)^\Lambda$ ($\Lambda = \mathrm{constant}$) で，その固有値は，

$$\beta_{\tilde{\Phi}} = \epsilon \Lambda \delta\tilde{\Phi}. \tag{15}$$

NII-Electronic Library Service

Soryushiron Kenkyu

(4) の条件 $\delta\Phi(\phi=0)=0$ から, $\Lambda>0$ が要求される. したがって, 固定点は $\delta\tilde{\Phi}$ の方向に紫外安定ではない.

紫外極限 $\mu\to\infty$ である決まった固定点に近づくモデルを得るためには, 相互作用関数 Φ を

$$\Phi(\phi)=\lambda^*\phi-\left(1+\frac{2\phi\,\mathrm{e}^{2\phi}}{1-\mathrm{e}^{2\phi}}\right)(G-G^*) \tag{16}$$

のように fine tuning する必要がある. その場合には, $\mu\to\infty$ の極限で, G と Φ は, 固定点 (11), (12) に近づく.

参考文献

[1] S. Weinberg, in General Relativity, an Einstein Centenary Survey, eds. S.W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, 1979) p. 790; R. Gastmans, R. Kallosh and C. Truffin, *Nucl. Phys.* **B133** (1978) 417; S.M. Christensen and M.J. Duff, *Phys. Lett.* **B79** (1978) 213.

[2] H. Kawai and M. Ninomiya, *Nucl. Phys.* **B336** (1990) 115.

[3] H. Kawai, Y. Kitazawa and M. Ninomiya, *Nucl. Phys.* **B393** (1993) 280; *Nucl. Phys.* **B404** (1993) 684; T. Aida, Y. Kitazawa, H. Kawai and M. Ninomiya, preprint TIT/HEP–256, KEK–TH–395, YITP/U–94–13, hep–th/9404171.

[4] S. Kojima, N. Sakai and Y. Tanii, preprint TIT/HEP–254, STUPP–94–136, hep–th/9405072, to appear in *Nucl. Phys.* **B**.

NII-Electronic Library Service