

539.382 : 539.4.013

数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題\*

(第1報, 2球かを有する弾性体)

土田栄一郎\*\*, 中原 一郎\*\*\*, 小玉正雄\*\*

1. 緒 言

鍛造品に存在する砂傷, ろう接あるいは溶接部に存在する多数の空か, 鋳物の巣などにみられるように欠陥として空かが存在する場合がしばしばあり, これらの欠陥をもつ部材に種々の荷重が作用すれば欠陥近傍に応力集中を生じ, 往々破損の原因となっている. それゆえに球かによる応力集中の問題は重要であり, 今日まで理論的にも実験的にも多くの研究が行われてきた. 特に無限に広がっている弾性体中に存在する1個の球かによる応力集中の問題は有名であり, その後二つ以上の球かあるいは球状介在物が存在する場合の応力解析が行われ, 球か相互間の干渉による応力集中が明らかにされてきた. 1952年 E. Sternberg-M. A. Sadowsky<sup>(1)</sup> が回転双極座標を用い, 2球かを有する弾性体が球か中心を結ぶ方向に一樣引張りを受ける場合を解析したのが最初である.

この手法を用い, 1965年に R. A. Eubanks<sup>(2)</sup> は2球かの中心線回りにねじりを受ける場合を解析し, さらに1966年 J. L. Hill<sup>(3)</sup> が二つの剛体球を含む無限体のねじり問題を解析し同年 J. F. Shelley-Yi-Yuan Yu<sup>(4)</sup> は二つの球状剛介在物をもつ無限体が中心線方向に一樣引張りを受ける場合および3軸一樣引張りを受ける場合を解析している. また1967年には J. G. Goree-H. B. Wilson<sup>(5)</sup> が母材と部分接着した二つの球状剛介在物のねじり問題を解析した. これらの研究と解析方法を異にして, 1957年宮本<sup>(6)</sup>は球座標を用い二つ以上の球かを有する無限体の問題を解析する方法を示し, 2球かおよび3球かの中心線方向に一樣引張りを受ける場合について応力分布を明らかにしている. さらに1960年渥美<sup>(7)</sup>は無限に並んだ球かを有する円柱が軸線方向に一樣引張りを受ける問題を解析している. 以上の研究はすべて球か中心を結ぶ方向に関して応力状態が軸対称となる問題であり,

非軸対称問題に関する研究はほとんどなく, わずかに西田ら<sup>(8)</sup>が光弾性実験によって解析しているだけである. 本研究は宮本の解法を非軸対称問題に拡張したもので, 1軸上に並んだ数個の球かを有する弾性体が無限遠方で中心線を結ぶ方向に垂直に1軸引張りを受ける問題を, 三次元弾性理論に基づいて厳密に解析する方法を示し, 本報では特に2球かの場合について計算を行った. 解析では Neuber<sup>(9)</sup> の4個の調和応力関数  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  を用いて解を表示し, さらにこの解を (i) 2軸一樣引張荷重を受ける軸対称解と (ii) 純粋せん断荷重を受ける非軸対称解の二つに分解し, それらを重ね合わせて境界条件を満足させた. そして数値計算を行って球か近傍の応力分布を明らかにし, 2円孔を有する無限板の結果および2軸一樣引張荷重を受ける場合と比較検討した.

2. 解 法

中心が一直線上にある  $k$  個の球かをもつ無限体の問題については宮本の議論がある. 一般に  $k$  個の空かを有する無限体における変位ベクトル  $u$  は (図1)

$$u = u_1 + \dots + u_k \dots \dots \dots (1)$$

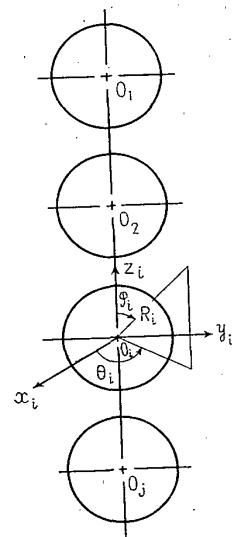


図1 一直線上にならんだ空か

\* 昭和48年10月17日 第51期全国大会講演会において講演, 原稿受付 昭和49年11月25日.  
 \*\* 正員, 埼玉大学工学部 (浦和市下大久保255).  
 \*\*\* 正員, 東京工業大学.

で与えられる。ここで  $u_i$  はノイバーによれば

$$2Gu_i = \text{grad}(\varphi_{0i} + x_i\varphi_{1i} + y_i\varphi_{2i} + z_i\varphi_{3i}) - 4(1-\nu)[\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{3i}] \dots\dots\dots (2)$$

で表される。ただし直角座標  $(x_i, y_i, z_i)$  の原点は  $i$  番めの空か内の任意の点にとり、 $\varphi_{0i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \varphi_{3i}$  は空かの外の領域で正則な調和関数である。また  $G$  は横弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。特に軸対称問題の場合には  $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}$  は不用であり式 (2) は Bousinesq の応力関数と全く同じになる。そこで  $k$  個の球かを有する弾性体の問題では、まず各球かの中心を原点とする調和関数で応力関数を表し、各座標での調和関数の間の関係を用いてある球か中心  $O_i$  に関する座標ですべてを表し境界条件を満足させればよい。本報では球かの数を 2 個に限定して以下に詳述する。

### 3. 2 球かを有する無限体

**3.1 応力関数と境界条件** 図 2 に示すように 2 個の球かが無限体中に存在し、無限遠方で  $x$  軸方向に単位面積当たり  $p$  の一様引張荷重を受ける場合を考える。二つの球かの中心  $O_1, O_2$  を原点として中心線を  $z$  軸とする二つの直角座標  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  および球座標  $(R_1, \theta, \varphi_1), (R_2, \theta, \varphi_2)$  をとる。一般性を失うことなく中心間距離  $\overline{O_1O_2} = 1$  とすることができ、両球かの半径をそれぞれ  $a_1, a_2$  とする。二つの直角座標と球座標の関係は

$$\begin{aligned} x_i &= R_i \sin \varphi_i \cos \theta, & y_i &= R_i \sin \varphi_i \sin \theta \dots (3) \\ z_i &= R_i \cos \varphi_i & (i=1, 2) \end{aligned}$$

で与えられ二つの直角座標の間の関係は

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2 + 1 \dots\dots\dots (4)$$

である。

2 球かの場合には変位の式 (2) で  $u_1, u_2$  は次のように書ける。

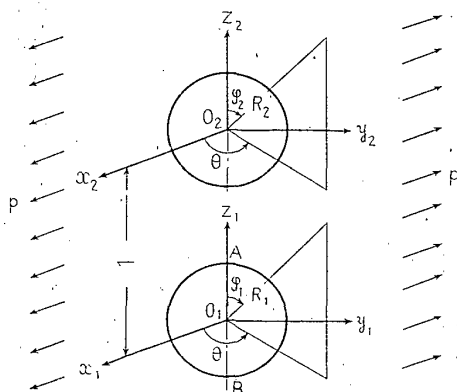


図 2 座標系

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_1 &= \text{grad}(\varphi_{01} + x_1\varphi_{11} + y_1\varphi_{21} + z_1\varphi_{31}) \\ &\quad - 4(1-\nu)[\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}] \\ 2Gu_2 &= \text{grad}(\varphi_{02} + x_2\varphi_{12} + y_2\varphi_{22} + z_2\varphi_{32}) \\ &\quad - 4(1-\nu)[\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

球面  $S_1(R_1=a_1)$  の境界条件を満足させるためには式 (5) を  $(x_1, y_1, z_1), (R_1, \theta, \varphi_1)$  で表す。  $x_1=x_2, y_1=y_2, z_2=z_1-1$  であるから式 (5) の下式を変形して

$$2Gu_2 = \text{grad}(\varphi_{02} + x_1\varphi_{12} + y_1\varphi_{22} + z_1\varphi_{32}) - \text{grad} \varphi_{32} - 4(1-\nu)[\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}] \dots\dots\dots (6)$$

と書く。式 (6) をみると  $-\text{grad} \varphi_{32}$  は形式上式 (5) の  $\text{grad} \varphi_{01}$  に相当するものであり、変位ベクトル  $u_2$  を  $u_2^1, u_2^2$  に分け  $2Gu_2^2 = -\text{grad} \varphi_{32}$  とおけば式 (5) は次のように書き直される。

$$\left. \begin{aligned} 2G(u_1 + u_2^2) &= \text{grad}(\varphi_{01} - \varphi_{32} + x_1\varphi_{11} \\ &\quad + y_1\varphi_{21} + z_1\varphi_{31}) - 4(1-\nu)[\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}] \\ 2Gu_2^1 &= \text{grad}(\varphi_{02} + x_1\varphi_{12} + y_1\varphi_{22} + z_1\varphi_{32}) \\ &\quad - 4(1-\nu)[\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

同様に球面  $S_2(R_2=a_2)$  の境界条件を満足させるためには、式 (5) を  $(x_2, y_2, z_2), (R_2, \theta, \varphi_2)$  で表し  $z_1 = z_2 + 1$  を考えれば式 (7) と全く同様にして変位ベクトル  $u_1$  を  $u_1^1, u_1^2$  に分け  $2Gu_1^2 = \text{grad} \varphi_{31}$  とおけば

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_1^1 &= \text{grad}(\varphi_{01} + x_2\varphi_{11} + y_2\varphi_{21} + z_2\varphi_{31}) \\ &\quad - 4(1-\nu)[\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}] \\ 2G(u_1^2 + u_2) &= \text{grad}(\varphi_{02} + \varphi_{31} + x_2\varphi_{12} \\ &\quad + y_2\varphi_{22} + z_2\varphi_{32}) - 4(1-\nu)[\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

を得る。

まず  $O_1$  点を原点として  $\varphi_{01}, \varphi_{31}$  に次の球調和関数を与える。

$$[I] \left\{ \begin{aligned} \varphi_{01} &= -\frac{p}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} R_1^2 P_2(\mu_1) \\ &\quad + \frac{p}{12} R_1^2 P_2^2(\mu_1) \cos 2\theta \\ \varphi_{31} &= -\frac{p}{2(1+\nu)} R_1 P_1(\mu_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで  $p$  は単位面積当たりの引張荷重、 $P_n(\mu)$  および  $P_n^m(\mu)$  はそれぞれ  $n$  次のルジャンドル関数ならびにルジャンドル陪関数であり  $\mu = \cos \varphi$  である。これより導かれる変位および応力成分を直角座標で表すと

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{p}{E} x_1, & v_y &= -\nu \frac{p}{E} y_1, & w_z &= -\nu \frac{p}{E} z_1, \\ \sigma_x &= p, & \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

となり, これは球かのない無限体を  $x$  軸方向に  $p$  の力で一様に引張った場合の解である.

式(10)の応力成分を球座標で表すと仮想した球面  $R_i = a_i$  ( $i=1, 2$ ) においては

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R_i=a_i} &= \frac{1}{3}[P_0(\mu_i) - P_2(\mu_i)] \\ &+ \frac{P_2^2(\mu_i)}{6} \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p \sin \varphi_i}\right)_{R_i=a_i} &= \frac{P_2'(\mu_i)}{6} - \frac{P_2^{2'}(\mu_i)}{12} \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\theta}}{p}\right)_{R_i=a_i} &= -\frac{P_2^2(\mu_i)}{6} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots(11)$$

なる応力が生じている. それゆえに2球かを有する無限体が  $x$  軸方向に一様な引張荷重を受ける場合の解は, 応力関数 [I] に以下の境界条件を満足する解を重ね合わせて得られる.

(i) 球か面  $R_i = a_i$  で

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R_i=a_i} &= -\frac{1}{3}[P_0(\mu_i) - P_2(\mu_i)] \\ &- \frac{P_2^2(\mu_i)}{6} \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p}\right)_{R_i=a_i} &= -\frac{P_2'(\mu_i)}{6} \sin \varphi_i \\ &+ \frac{P_2^{2'}(\mu_i)}{12} \sin \varphi_i \cos 2\theta \\ \left(\frac{\tau_{R\theta}}{p}\right)_{R_i=a_i} &= \frac{1}{6} \frac{P_2^2(\mu_i)}{\sin \varphi_i} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots(12)$$

(ii)  $R_i > a_i$  ( $i=1, 2$ ) の無限遠方の領域ですべての変位および応力が零

この境界条件は軸対称部分と非軸対称部分に分離できるから,  $\theta$  に無関係な境界条件

$$\left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R_i=a_i} = -\frac{1}{3}[P_0(\mu_i) - P_2(\mu_i)],$$

$$\left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p}\right)_{R_i=a_i} = -\frac{P_2'(\mu_i)}{6} \sin \varphi_i$$

を満足する軸対称解と  $\theta$  に関する境界条件

$$\left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R_i=a_i} = -\frac{P_2^2(\mu_i)}{6} \cos 2\theta,$$

$$\left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p}\right)_{R_i=a_i} = \frac{P_2^{2'}(\mu_i)}{12} \sin \varphi_i \cos 2\theta,$$

$$\left(\frac{\tau_{R\theta}}{p}\right)_{R_i=a_i} = \frac{1}{6} \frac{P_2^2(\mu_i)}{\sin \varphi_i} \sin 2\theta$$

$$\left(\frac{\sigma_R}{p}\right)_{R_1=a_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n^1 \frac{(n+1)(n+2)}{a_1^{n+3}} + B_{n-1}^1 \frac{n(n(n+3)-2\nu)}{(2n-1)a_1^{n+1}} + B_{n+1}^1 \frac{(n+1)(n+2)(n+5-4\nu)}{(2n+3)a_1^{n+3}} \right. \\ \left. + \sum_{s=0}^{\infty} \left[ (A_s^2 - B_s^2) d_{s,n}' n(n-1) a_1^{n-2} + B_s^2 \left\{ d_{s,n+1}' \frac{(n+1)}{2n+3} \{(n+1)(n-2)-2\nu\} a_1^n \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + d_{s,n-1}' (n-1)n \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} \right\} \right] \right] P_n(\mu_1) = -\frac{1}{3}[P_0(\mu_1) - P_2(\mu_1)] \quad \dots\dots\dots(15)$$

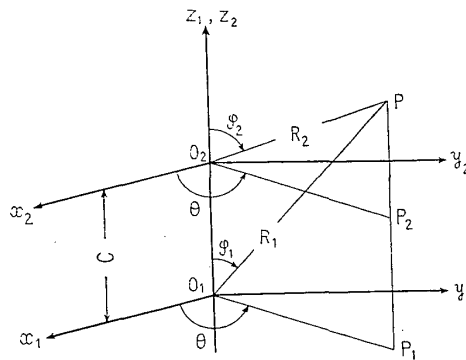


図 3

を満足する非軸対称解を別々に求めて両者を重ね合わせれば本問題の解が得られる.

3.2 軸対称解 軸対称解に対する応力関数として,

各球かの中心に原点を有する球調和関数を用いて次のように表す.

$$[II] \left\{ \begin{aligned} \varphi_{0i} &= p \sum_{n=0}^{\infty} A_n^i \frac{P_n(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \\ \varphi_{si} &= p \sum_{n=0}^{\infty} B_n^i \frac{P_n(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここで  $A_n^i, B_n^i$  ( $i=1, 2$ ) は境界条件より決定される未定係数である.

まず球か面  $S_1(R_1=a_1)$  の境界条件を満足させるために次のような球調和関数の関係式<sup>(10)</sup>(図3)を用いる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_n^m(\mu_2)}{R_2^{n+1}} \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta} &= \sum_{s=m}^{\infty} m d_{n,s}' \\ &\times \frac{R_1^s P_s^m(\mu_1)}{c^{n+s+1}} \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta} \\ \frac{P_n^m(\mu_1)}{R_1^{n+1}} \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta} &= \sum_{s=m}^{\infty} m d_{n,s}'' \\ &\times \frac{R_2^s P_s^m(\mu_2)}{c^{n+s+1}} \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta} \\ m d_{n,s}' &= (-1)^{n-m} m d_{n,s}, \\ m d_{n,s}'' &= (-1)^{s-m} m d_{n,s}, \\ m d_{n,s} &= \frac{(n+s)!}{(n-m)!(s+m)!} \quad 0 < R_1, R_2 < c \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

ただし  $c$  は中心間距離でここでは  $c=1$  であり  $m=0$  のときは添字を省くことにする. 式(7), (14)を用い応力関数 [II] を  $O_1$  を原点とする座標で表し応力成分を求め, 球か面  $S_1(R_1=a_1)$  の条件を満足させると以下のようになる.

$$\left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p \sin \varphi_1}\right)_{R_1=a_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \frac{(n+2)}{a_1^{n+3}} + B_{n-1} \frac{n^2-2+2\nu}{(2n-1)a_1^{n+1}} + B_{n+1} \frac{(n+2)(n+5-4\nu)}{(2n+3)a_1^{n+3}} \right. \\ \left. - \sum_{s=0}^{\infty} \left[ (A_s^2 - B_s^2) d_{s,n'} (n-1) a_1^{n-2} + B_s^2 \left\{ d_{s,n+1}' \frac{(n^2+2n-1+2\nu)}{2n+3} a_1^n \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + d_{s,n-1}' \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} \right\} \right] \right] P_n'(\mu_1) = -\frac{P_2'}{6}(\mu_1) \dots\dots\dots(16)$$

式 (15), (16) でそれぞれルジャンドル関数およびその微係数の係数を零に等置すれば以下のようになる。

$$A_n \frac{(n+1)(n+2)}{a_1^{n+3}} + B_{n-1} n \frac{\{n(n+3)-2\nu\}}{(2n-1)a_1^{n+1}} + B_{n+1} \frac{(n+1)(n+2)(n+5-4\nu)}{(2n+3)a_1^{n+3}} \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \left[ (A_s^2 - B_s^2) d_{s,n'} n(n-1) a_1^{n-2} + B_s^2 \left\{ d_{s,n+1}' (n+1) \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} a_1^n \right. \right. \\ \left. \left. + d_{s,n-1}' (n-1) \frac{n(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} \right\} \right] = -\frac{1}{3} \delta_n^{(0)} + \frac{1}{3} \delta_n^{(2)} \dots\dots\dots(17)$$

$$A_n \frac{(n+2)}{a_1^{n+3}} + B_{n-1} \frac{n^2-2+2\nu}{(2n-1)a_1^{n+1}} + B_{n+1} \frac{(n+2)(n+5-4\nu)}{(2n+3)a_1^{n+3}} - \sum_{s=0}^{\infty} \left[ (A_s^2 - B_s^2) d_{s,n'} (n-1) a_1^{n-2} \right. \\ \left. + B_s^2 \left\{ d_{s,n+1}' \frac{(n^2+2n-1+2\nu)}{2n+3} a_1^n + d_{s,n-1}' \frac{(n-1)(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} \right\} \right] = -\frac{1}{6} \delta_n^{(2)} \dots\dots\dots(18)$$

ただし  $\delta_n^{(m)}$  はクロネッカーのデルタ関数であり  $\delta_n^{(m)}=1$  ( $n=m$ ),  $\delta_n^{(m)}=0$  ( $n \neq m$ ) を表す。

次に球面  $S_2$  ( $R_2=a_2$ ) の境界条件を満足させるためには式 (8) を使って変位成分, 応力成分を求め, 境界条件から未定係数を決定すればよいが, その方法は全く球面  $S_1$  に対するものと同じである。そこで同径 2 球かで中心間距離の 2 等分面に対して対称なる応力状態の場合には, 対称性を考慮して境界条件の一方を満足させれば他方は自然に満足される。すなわち

$$a_1=a_2=a, \quad A_n^1=(-1)^n A_n^2=A_n, \quad B_{n-1}^1=(-1)^{n+1} B_{n-1}^2=B_n \dots\dots\dots(19)$$

とおけば式 (17), (18) は次のようになる。

$$A_n \frac{(n+1)(n+2)}{a^{n+3}} + B_{n-1} n \frac{\{n(n+3)-2\nu\}}{(2n-1)a^{n+1}} + B_{n+1} \frac{(n+1)(n+2)(n+5-4\nu)}{(2n+3)a^{n+3}} \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \left[ (A_s + B_s) d_{s,n} n(n-1) a^{n-2} - B_s \left\{ d_{s,n+1}' \frac{n+1}{2n+3} \{(n+1)(n-2)-2\nu\} a^n \right. \right. \\ \left. \left. + d_{s,n-1}' (n-1) n \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-2} \right\} \right] = -\frac{1}{3} \delta_n^{(0)} + \frac{1}{3} \delta_n^{(2)} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(20)$$

$$A_n \frac{(n+2)}{a^{n+3}} + B_{n-1} \frac{n^2-2+2\nu}{(2n-1)a^{n+1}} + B_{n+1} \frac{(n+2)(n+5-4\nu)}{(2n+3)a^{n+3}} - \sum_{s=0}^{\infty} \left[ (A_s + B_s) d_{s,n} (n-1) a^{n-2} \right. \\ \left. - B_s \left\{ d_{s,n+1}' \frac{(n^2+2n-1+2\nu)}{2n+3} a^n + d_{s,n-1}' (n-1) \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} a^{n-2} \right\} \right] = -\frac{1}{6} \delta_n^{(2)} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ \dots\dots\dots(21)$$

式 (20), (21) で  $n=1$  とおいた関係より  $B_0=0$  となることが分かる。式 (20), (21) の無限連立一次方程式を解けば未定係数  $A_n, B_n$  は完全に決まる。

**3.3 非軸対称解** 非軸対称解に対する応力関数は, 境界面における応力が  $\cos 2\theta, \sin 2\theta$  に比例して分布することに注目して次のようにおく。

$$\text{[III]} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{0i} = p \sum_{n=2}^{\infty} C_n^i \frac{P_n^2(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \cos 2\theta, \quad \varphi_{1i} = p \sum_{n=1}^{\infty} D_n^i \frac{P_n^1(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \cos \theta, \\ \varphi_{2i} = -p \sum_{n=1}^{\infty} D_n^i \frac{P_n^1(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \sin \theta, \quad \varphi_{3i} = p \sum_{n=1}^{\infty} E_n^i \frac{P_n^2(\mu_i)}{R_i^{n+1}} \cos 2\theta \quad (i=1, 2) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

ここで  $C_n^i, D_n^i, E_n^i$  ( $i=1, 2$ ) は境界条件より決定される未定係数である。

まず球か面  $S_1$  ( $R_1=a_1$ ) の境界条件を満足させるために式 (14), (7) を用い, 応力関数 [III] を  $O_1$  を原点とする座標で表し応力成分を求め, さらにルジャンドル陪関数の漸化式を用いて球か面  $S_1$  の条件を満足させること次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_R}{p \cos 2\theta}\right)_{R_1=a_1} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (n+1)(n+2) \frac{C_n^1}{a_1^{n+3}} + \frac{\{n(n+3)-2\nu\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} - \frac{(n+2)(n+5-4\nu)}{(2n+3)} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} \right. \\ &+ \frac{(n-2)}{2n-1} \{n(n+3)-2\nu\} \frac{E_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} + \frac{(n+2)(n+3)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} \\ &+ \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) {}_2d_{s,n}' n(n-1) a_1^{n-2} + \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 \left\{ {}_1d_{s,n-1}' (n-1) \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} \right. \\ &- {}_1d_{s,n+1}' \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} a_1^n \left. \right\} + \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{s,n-1}' \frac{(n-1)(n-2)(n-4+4\nu)}{(2n-1)} a_1^{n-2} \right. \\ &\left. + {}_2d_{s,n+1}' \frac{(n+3)}{(2n+3)} \{(n+1)(n-2)-2\nu\} a_1^n \right\} \Big] P_n^2(\mu_1) = -\frac{P_2^2}{6}(\mu_1) \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{R\varphi}}{p \sin \varphi, \cos 2\theta}\right)_{R_1=a_1} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (n+2) \frac{C_n^1}{a_1^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} - \frac{\{1+\nu(n+1)\}}{2n+3} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} \right. \\ &+ \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} + \frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} - \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) {}_2d_{s,n}' (n-1) a_1^{n-2} \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 \left\{ {}_1d_{s,n-1}' \frac{(1-\nu n)}{2n-1} a_1^{n-2} - {}_1d_{s,n+1}' \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} a_1^n \right\} \\ &- \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{s,n-1}' \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} + {}_2d_{s,n+1}' (n+3) \frac{(n-1+2\nu)}{2n+3} a_1^n \right\} \Big] P_n^{2'}(\mu) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (1-\nu)(n+2) \frac{D_n^1}{a_1^{n+2}} - 2(1-\nu)(n+2) \frac{E_n^1}{a_1^{n+2}} - (1-\nu) \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 {}_1d_{s,n}' (n-1) a_1^{n-1} \right. \\ &\left. + 2(1-\nu) \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 {}_2d_{s,n}' (n-1) a_1^{n-1} \right] P_n^2(\mu_1) = \frac{P_2^{2'}}{12}(\mu_1) \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{R\varphi} \sin \varphi_1}{p \sin 2\theta}\right)_{R_1=a_1} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (n+2) \frac{C_n^1}{a_1^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} - \frac{\{1+\nu(n+1)\}}{2n+3} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} \right. \\ &+ \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} + \frac{(n+3)(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} - \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) {}_2d_{s,n}' (n-1) a_1^{n-2} \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 \left\{ {}_1d_{s,n-1}' \frac{(1-\nu n)}{2n-1} a_1^{n-2} - {}_1d_{s,n+1}' \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} a_1^n \right\} \\ &- \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \left\{ {}_2d_{s,n-1}' \frac{(n-2)(n-3+2\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} + {}_2d_{s,n+1}' \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} a_1^n \right\} \Big] P_n^2(\mu_1) = \frac{P_2^2}{12}(\mu_1) \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

式 (23)~(25) でそれぞれルジャンドル陪関数およびその微係数の係数を零に等置すれば,  $C_n^i, D_n^i, E_n^i$  ( $i=1, 2$ ) に関する無限連立一次方程式が得られる. そして式 (24) で  $P_n^{2'}(\mu_1)$  の係数を零に等置して得られる係数方程式は, 式 (25) で  $P_n^2(\mu_1)$  の係数を零に等置した式と同一であるから結局以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2) \frac{C_n^1}{a_1^{n+3}} + \frac{\{n(n+3)-2\nu\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} - (n+2) \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} + \frac{(n-2)}{2n-1} \{n(n+3) \\ - 2\nu\} \frac{E_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} + (n+2)(n+3) \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} + \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) {}_2d_{s,n}' n(n-1) a_1^{n-2} \\ + \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 \left[ {}_1d_{s,n-1}' (n-1) \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} - {}_1d_{s,n+1}' \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} a_1^n \right] + \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \\ \times \left[ {}_2d_{s,n-1}' (n-1)(n-2) \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} + {}_2d_{s,n+1}' (n+3) \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} a_1^n \right] = -\frac{1}{6} \delta_n^{(2)} \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n+2) \frac{C_n^1}{a_1^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} - \frac{\{1+\nu(n+1)\}}{2n+3} \frac{D_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} + \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}^1}{a_1^{n+1}} \\ + (n+3) \frac{(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}^1}{a_1^{n+3}} - \sum_{s=2}^{\infty} (C_s^2 - E_s^2) {}_2d_{s,n}' (n-1) a_1^{n-2} \\ + \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 \left[ {}_1d_{s,n-1}' \frac{(1-\nu n)}{2n-1} a_1^{n-2} - {}_1d_{s,n+1}' \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} a_1^n \right] \\ - \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 \left[ {}_2d_{s,n-1}' (n-2) \frac{(n-3+2\nu)}{2n-1} a_1^{n-2} + {}_2d_{s,n+1}' \frac{(n+3)(n-1+2\nu)}{2n+3} a_1^n \right] = \frac{1}{12} \delta_n^{(2)} \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

$$(n+2) \frac{D_n^1}{a_1^{n+2}} - 2(n+2) \frac{E_n^1}{a_1^{n+2}} - \sum_{s=1}^{\infty} D_s^2 d_{s,n} (n-1) a_1^{n-1} + \sum_{s=2}^{\infty} E_s^2 d_{s,n} 2(n-1) a_1^{n-1} = 0 \dots \dots \dots (28)$$

次に球面  $S_2$  ( $R_2=a_2$ ) の境界条件を満足させるためには、式 (8), (14) を用いて応力成分を求め境界条件から未定係数を決定すればよいが、その方法は全く球面  $S_1$  に対するものと同じである。

そこで同径 2 球かで中心間距離の垂直 2 等分面に対して対称な応力状態の場合には、対称性を考慮して境界条件の一方を満足させれば他方は自然に満足される。

すなわち

$$a_1 = a_2 = a, \quad C_n^1 = (-1)^{n-2} C_n^2 \equiv C_n, \quad D_n^1 = (-1)^{n-1} D_n^2 \equiv D_n, \quad E_n^1 = (-1)^{n-1} E_n^2 \equiv E_n \dots \dots \dots (29)$$

とおけば式 (26)~(28) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & (n+1)(n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} + \frac{\{n(n+3)-2\nu\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} - (n+2) \frac{(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} + \frac{(n-2)}{2n-1} \{n(n+3)-2\nu\} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} \\ & + \frac{(n+2)(n+3)(n+5-4\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} + \sum_{s=2}^{\infty} (C_s + E_s) 2d_{s,n} n(n-1) a^{n-2} + \sum_{s=1}^{\infty} D_s \left[ 1d_{s,n-1} \frac{(n-1)}{2n-1} \right. \\ & \times (n-4+4\nu) a^{n-2} - 1d_{s,n+1} \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} a^n \left. - \sum_{s=2}^{\infty} E_s \left[ 2d_{s,n-1} (n-1)(n-2) \right. \right. \\ & \times \frac{(n-4+4\nu)}{2n-1} + 2d_{s,n+1} (n+3) \frac{\{(n+1)(n-2)-2\nu\}}{2n+3} a^n \left. \left. \right] = -\frac{1}{6} \delta_n^{(2)} \quad (n \geq 2) \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (n+2) \frac{C_n}{a^{n+3}} + \frac{\{1+\nu(n-1)\}}{2n-1} \frac{D_{n-1}}{a^{n+1}} - \frac{\{1+\nu(n+1)\}}{2n+3} \frac{D_{n+1}}{a^{n+3}} + \frac{(n-2)(n+2-2\nu)}{2n-1} \frac{E_{n-1}}{a^{n+1}} \\ & + (n+3) \frac{(n+4-2\nu)}{2n+3} \frac{E_{n+1}}{a^{n+3}} - \sum_{s=2}^{\infty} (C_s + E_s) 2d_{s,n} (n-1) a^{n-2} + \sum_{s=1}^{\infty} D_s \left[ 1d_{s,n-1} \frac{(1-\nu n)}{2n-1} a^{n-2} \right. \\ & - 1d_{s,n+1} \frac{\{1-\nu(n+2)\}}{2n+3} a^n \left. + \sum_{s=2}^{\infty} E_s \left[ 2d_{s,n-1} (n-2) \frac{(n-3+2\nu)}{2n-1} a^{n-2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2d_{s,n+1} (n+3) \frac{(n-1+2\nu)}{2n+3} a^n \right] = \frac{1}{12} \delta_n^{(2)} \quad (n \geq 2) \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

$$(n+2) \frac{D_n}{a^{n+2}} - 2(n+2) \frac{E_n}{a^{n+2}} - \sum_{s=1}^{\infty} D_s 1d_{s,n} (n-1) a^{n-1} - \sum_{s=2}^{\infty} E_s 2d_{s,n} 2(n-1) a^{n-2} = 0 \quad (n \geq 2) \dots \dots \dots (32)$$

式 (30)~(32) の無限連立一次方程式を解けば未定係数  $C_n, D_n, E_n$  は完全に決まる。そして全体の変位および応力は応力関数 [I]~[III] を重ね合わせて得られる。

#### 4. 数 値 計 算

2 球かの半径が同じ場合を考え、ポアソン比を  $\nu=0.3$  とし球か半径を  $a=0.05 \sim 0.4$  まで変えて数値計算を行った。係数方程式 (20), (21) および式 (30)~(32) から未定係数  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n$  を求める場合、最終的に得られる応力値が有効数字 3 けた以上になるように  $n=11 \sim 31$  で打ち切って連立一次方程式を解いた。応力計算においては 2 球かの半径が等しいことから、応力状態が 2 球かの中心間距離の 2 等分面に対称であることを考慮し、 $O_1$  を原点とする球かを含む半空間における応力分布を求めた。

球か面の応力  $\sigma_\varphi$  は  $P_n(\mu), P_n^m(\mu)$  をそれぞれ  $P_n, P_n^m$  で表すと

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma_\varphi}{p} \right)_{R=a} &= \frac{1}{6} (P_0 + 2P_2) (1 + \cos 2\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{a^{n+3}} \{ -(n+1)^2 P_n + \mu P_n' \} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+2}} \frac{1}{2n+1} \\ & \times [ (n+1) \{ (n+1)(n-2) + 3 - 2\nu \} P_{n+1} + n(n+1)(n+4-4\nu) P_{n-1} - (2n+1) P_n ] \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n) \sum_{s=0}^{\infty} d_{n,s} a^{n-2} \{ -s^2 P_s + \mu P_s' \} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sum_{s=0}^{\infty} d_{n,s} \frac{a^{s-1}}{2s+1} [ s(s^2 + 3s + 3 - 2\nu) P_{s-1} \\ & + s(s+1)(s-3+4\nu) P_{s+1} - (2s+1) P_s ] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{a^{n+3}} \left\{ \mu P_n^{2'} - (n+1)^2 P_n^2 + \frac{4}{1-\mu^2} P_n^2 \right\} \cos 2\theta \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{a^{n+2}} \left[ \sin \varphi \{ -(n+1)(n+1-2\nu) P_n^1 + (3-2\nu) \mu P_n^{1'} \} + (1+2\nu) \frac{P_n^1}{\sin \varphi} \right] \cos 2\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{E_n}{a^{n+2}} \left[ P_n^{2'} - \frac{(n+1)(n+2)(n+4-4\nu)}{2n+1} P_{n-1}^2 - (n-1) \frac{\{n(n-1)+1-2\nu\}}{2n+1} P_{n+1}^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4\mu}{1-\mu^2} P_n^2 \Big] \cos 2\theta + \sum_{n=2}^{\infty} (C_n + E_n) \sum_{s=2}^{\infty} {}_2d_{n,s} a^{s-2} \left\{ \left( \frac{4}{1-\mu^2} - s^2 \right) P_s^2 + \mu P_s^{2'} \right\} \cos 2\theta \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sum_{s=1}^{\infty} {}_1d_{n,s} a^{s-1} \left[ \sin \varphi \{ -s(s+2\nu) P_s^1 + (3-2\nu) \mu P_s^{1'} \} + (1+2\nu) \frac{P_s^1}{\sin \varphi} \right] \cos 2\theta \\
 & - \sum_{n=2}^{\infty} E_n \sum_{s=2}^{\infty} {}_2d_{n,s} a^{s-1} \left[ P_s^{2'} - \frac{s(s-1)}{2s+1} (s-3+4\nu) P_{s+1}^2 \right. \\
 & \left. - \frac{(s+2)}{2s+1} \{ (s+1)(s+2) + 1 - 2\nu \} P_{s-1}^2 + \frac{4\mu}{1-\mu^2} P_s^2 \right] \cos 2\theta \dots\dots\dots(33)
 \end{aligned}$$

で与えられ  $\theta=0$  の場合が図4に示される。球か半径  $a$  を 0.1 から 0.4 まで増加させると、 $\sigma_\varphi$  の分布は  $\varphi=0^\circ$  および  $180^\circ$  に引張応力の極大値があつて  $\varphi=90^\circ$  付近に負の極大値がある。そして応力  $\sigma_\varphi$  は  $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$  では球かの大きさによってかなり影響を受けるが、 $\varphi$  が  $60^\circ$  を越えるとほとんど影響されない。これに対し図5に示す  $\theta=\pi/2$  の場合の  $\sigma_\varphi$  の分布では応力  $\sigma_\varphi$  は引張応力であり、図4に比べてその値は小さい。この場合  $\sigma_\varphi$  は  $\varphi=0^\circ$  で引張応力の極小値をまた  $\varphi=50^\circ$  付近で極大値をとる。同様にして球か面の応力  $\sigma_\theta$  は

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\sigma_\theta}{p} \right)_{R=a} &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{a^{n+3}} P_{n+1}' - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+2}} \{ (1-2\nu)(n+1) P_{n+1} + P_n' \} \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n) \sum_{s=0}^{\infty} d_{n,s} a^{s-2} P_{s-1}' - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sum_{s=0}^{\infty} d_{n,s} a^{s-1} \{ (1-2\nu) s P_{s-1} - P_s' \} \\
 & - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{a^{n+3}} \left[ \left\{ \frac{4}{1-\mu^2} + (n+1) \right\} P_n^2 + \mu P_n^{2'} \right] \cos 2\theta - (1-2\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{a^{n+2}} \left[ \sin \varphi \{ (n+1) P_n^1 + \mu P_n^{1'} \} \right. \\
 & \left. - \frac{P_n^1}{\sin \varphi} \right] \cos 2\theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{E_n}{a^{n+2}} \left[ P_n^{2'} + (1-2\nu)(n-1) P_{n+1}^2 + \frac{4\mu}{1-\mu^2} P_n^2 \right] \cos 2\theta \\
 & - \sum_{n=2}^{\infty} (C_n + E_n) \sum_{s=2}^{\infty} {}_2d_{n,s} a^{s-2} \left[ \left( \frac{4}{1-\mu^2} - s \right) P_s^2 + \mu P_s^{2'} \right] \cos 2\theta + (1-2\nu) \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sum_{s=1}^{\infty} {}_1d_{n,s} a^{s-1} \\
 & \times \left\{ \sin \varphi (s P_s^1 - \mu P_s^{1'}) + \frac{P_s^1}{\sin \varphi} \right\} \cos 2\theta - \sum_{n=2}^{\infty} E_n \sum_{s=2}^{\infty} {}_2d_{n,s} a^{s-1} \left\{ (1-2\nu) s \mu P_s^{2'} \right. \\
 & \left. - P_s^{2'} + (1-2\nu)(1-\mu^2) P_s^{2'} - \frac{4\mu}{1-\mu^2} P_s^2 \right\} \cos 2\theta \dots\dots\dots(34)
 \end{aligned}$$

で与えられ  $\theta=0$  の場合の  $\sigma_\theta$  の分布が図6に示される。 $\sigma_\theta$  の分布は図4と同様  $\varphi=0^\circ, 180^\circ$  で引張応力の極大値をとり  $\varphi=90^\circ$  近傍で圧縮応力の極大値をとる。球か半径の大きさによる影響は  $\varphi=130^\circ$  付近ま

で及んでいるが応力値は  $\sigma_\varphi$  の場合よりも小さい。図7は  $\theta=\pi/2$  における  $\sigma_\theta$  の分布を示したもので、 $a=0.1 \sim 0.3$  では最大引張応力が  $\varphi=60^\circ$  近傍に生じ、その値は  $A, B$  いずれかの値に近いが、 $a=0.4$  では  $\varphi=0$  に生ずる。 $z$  軸上では円柱座標における応力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  は  $\sigma_1, \sigma_2$  をそれぞれ軸対称部分、非軸対称部分とすれば

$$(\sigma_r/p)_{r=0} = \sigma_1 + \sigma_2 \cos 2\theta \dots\dots\dots(35)$$

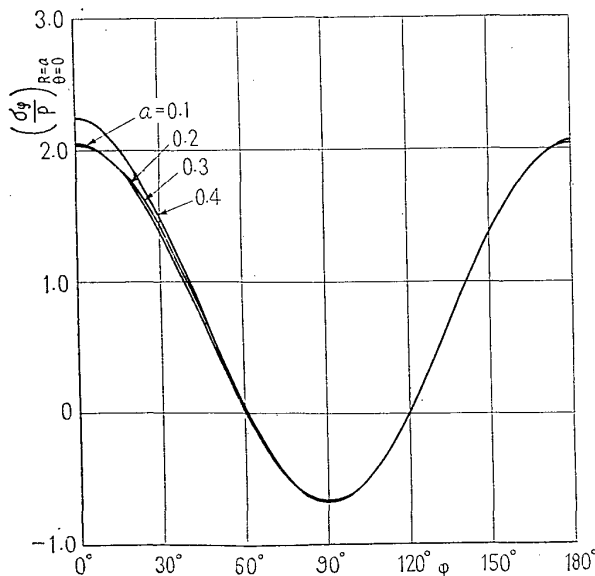


図4 球か面の  $\sigma_\varphi$  の分布 ( $\theta=0$ )

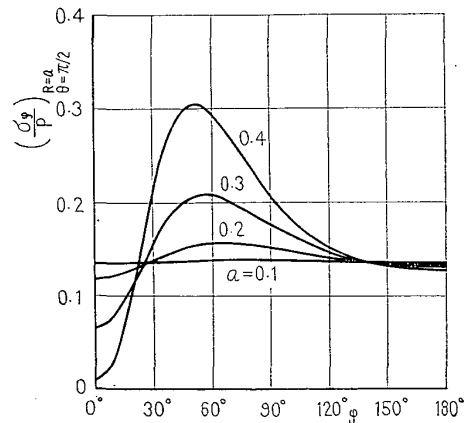


図5 球か面の  $\sigma_\varphi$  の分布 ( $\theta=\pi/2$ )

$$(\sigma_\theta/p)_{r=0} = \sigma_1 - \sigma_2 \cos 2\theta \quad (r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}) \dots \dots \dots (36)$$

で表され、かつ  $z$  軸上で  $\sigma_r$  と  $\sigma_\varphi$  は等しいことを考えて以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_r}{p}\right)_{\substack{z_1 > 0 \\ z_2 < 0 \\ \varphi_1 = 0}} = & \left(\frac{\sigma_\varphi}{p}\right)_{\substack{z_1 > 0 \\ z_2 < 0 \\ \varphi_1 = 0}} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left[ \frac{1}{z_1^{n+3}} + \frac{1}{|z_2|^{n+3}} \right] \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(n+1)(n+2-4\nu)}{2} \left[ \frac{1}{z_1^{n+2}} + \frac{1}{|z_2|^{n+2}} \right] + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} C_n (n-1)n(n+1)(n+2) \left[ \frac{1}{z_1^{n+3}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{|z_2|^{n+3}} \right] \cos 2\theta - (1-2\nu) \sum_{n=1}^{\infty} D_n n(n+1) \left[ \frac{1}{z_1^{n+2}} + \frac{1}{|z_2|^{n+2}} \right] \cos 2\theta \\ & + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} E_n (n-1)n(n+1)(n+2) \left[ \frac{1}{z_1^{n+2}} + \frac{1}{|z_2|^{n+2}} \right] \cos 2\theta \dots \dots \dots (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_r}{p}\right)_{\substack{z_1 < 0 \\ z_2 < 0 \\ \varphi_1 = \pi}} = & \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left[ \frac{(-1)^n}{|z_1|^{n+3}} + \frac{1}{|z_2|^{n+3}} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(n+1)(n+2-4\nu)}{2} \\ & \times \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{|z_1|^{n+2}} + \frac{1}{|z_2|^{n+2}} \right] + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} C_n (n-1)n(n+1)(n+2) \left[ \frac{(-1)^{n-2}}{|z_1|^{n+3}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{|z_2|^{n+3}} \right] \cos 2\theta - (1-2\nu) \sum_{n=1}^{\infty} D_n n(n+1) \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{|z_1|^{n+2}} + \frac{1}{|z_2|^{n+2}} \right] \cos 2\theta \\ & + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} E_n (n-1)n(n+1)(n+2) \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{|z_1|^{n+2}} + \frac{1}{|z_2|^{n+2}} \right] \cos 2\theta \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

$\theta=0$  における  $z$  軸上の応力  $\sigma_r$  を  $\varphi_1=0$  および  $\varphi_1=\pi$  の場合について図 8, 9 に示した。図 8 によれば引張応力は球か面上 A 点で最大で、応力  $\sigma_r$  は  $z_1$  が大きくなるにつれて急速に減少するが、球か半

径が大きくなるにつれてこの減少の割合は緩慢になり干渉の効果が顕著になる。また A 点の応力は球か半径が大きくなるにつれしだいに減少するが、さらに大きくなると増加する。これに対し図 9 では球か面上 B 点で引張応力は極大値をとり、球かから離れるにつれ図 8 の場合よりもさらに減少する。B 点の応力は球かの大きさが増すにつれて増加するが、その増加量はわずかである。以上の結果から最大引張応力は球か面上のある場所に生じるがその値がほぼ A, B 点に生ずる

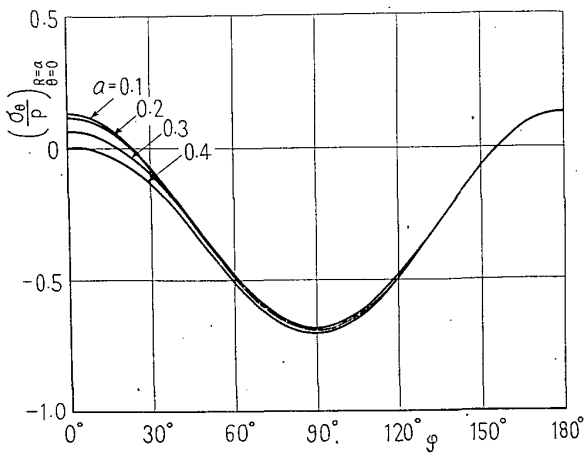


図 6 球か面の  $\sigma_\theta$  の分布 ( $\theta=0$ )

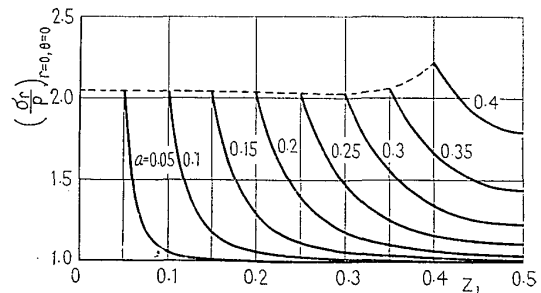


図 8  $z$  軸上の  $\sigma_r$  の分布 ( $\theta=0$ )

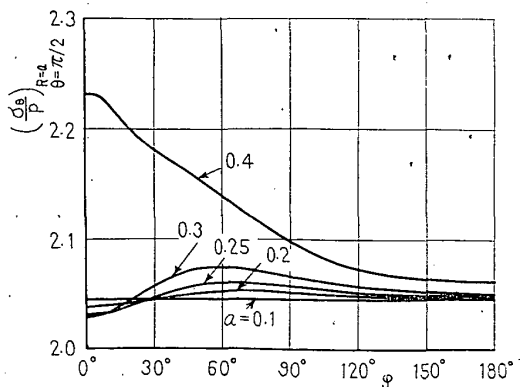


図 7 球か面における  $\sigma_\theta$  の分布 ( $\theta=\pi/2$ )

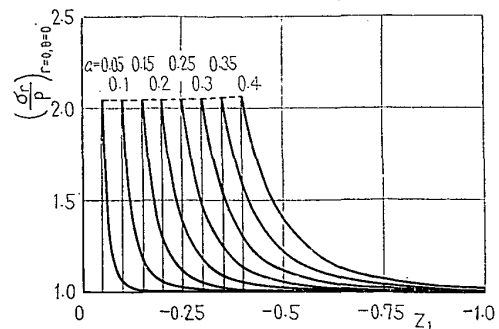


図 9  $z$  軸上の  $\sigma_r$  の分布 ( $\theta=0$ )



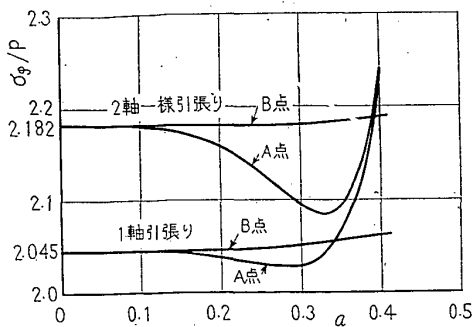


図 10 球か半径による最大引張応力の変化

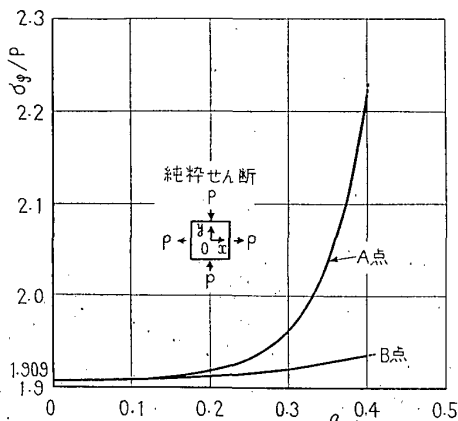


図 11 球か半径による最大引張応力の変化

値で近似されるので、この応力が球か半径によってどのように変化するかを求めたのが図 10 である。B 点の応力が球か半径が増大するにつれ漸増するのに対し、A 点の応力は球か半径が小さい範囲では無限体中に 1 個の球かが存在する場合の  $2.045p$  ( $\nu=0.3$ ) より減少して応力緩和の現象を生ずるが、球か半径が 0.3 以上になると球かどうしの干渉により急激に増加する。また 3.2 節の軸対称解から得られた 2 軸一様引張りの結果を同図に併せ示したが、この場合応力値は 1 軸引張りの場合よりも大きくなる。そして分布傾向は 1 軸引張りと同様であるが、A 点の応力緩和現象はより顕著に現れ、極値をもつのは球か半径  $a$  が 0.33 近傍である。ところで西田ら<sup>(9)</sup>は本問題を光弾性実験によって解析している。その結果はポアソン比の相違を考慮すれば B 点の応力分布は本結果と一致するが、A 点については本結果と全く異なり、球か半径が大きくなるにつれて A 点の応力緩和現象はそのまま持続し、2 球かが接する極限状態において A 点の応力は無限遠方の引張応力に等しくなるという結果を得ている。本研究の結果は類似の二次元状態である 2 円孔を有する無限板の場合と比べると、応力値は小さくなるがその傾向はよく似ている。図 11 は 3.3 節の非軸対称解より得られた純粋せん断荷重を受ける場合の A、B 点に生ずる最大引張応力と球か半径の関係を示したも

ので、A、B 点の最大引張応力が球か半径が増すにつれ単調に増加する傾向は、二次元問題の結果<sup>(11)</sup>とよく相似している。

## 5. 結 言

二つ以上の球かを有する弾性体の軸対称問題に対する宮本の解法を拡張し、2 球かを有する無限体が球かの中心線に対し直角な面に 1 軸一様引張荷重を受ける非軸対称問題をノイバーの応力関数を用いて厳密に解析する方法を示し数値計算を行った。本解析で得られた主な結果は次のとおりである。

(1) 最大引張応力は球か面上に生じ、A、B 点のいずれかの応力で近似される。A 点に生じる引張応力は球か半径が小さいときは 1 個の球かの場合より単調に減少し応力軽減作用を示すが、球か半径がさらに大きくなると最大引張応力は急激に増加する。

(2) 2 軸一様引張荷重を受ける場合には、A 点に生ずる最大引張応力は 1 軸引張荷重を受ける場合よりもその値は大きく、球か半径が増すと同様にまず応力緩和現象を示し、その後急速に増大するがその傾向はより顕著であり、極小値は  $a=0.33$  付近に生じ 0.4 を越えると 1 軸引張りの場合との差は小さくなる。

(3) 応力分布は類似の二次元問題である 2 円孔を有する無限板の場合とよく相似している。

終わりにあたり本研究の結果について種々のご討論をいただいた東京理科大学 西田正孝教授に深く謝意を表します。なお本研究の一部は昭和 47 年度文部省科学研究費の補助により行われたものであり、数値計算には東京工業大学情報処理センターの HITAC 8700 を使用した。ここに記して謝意を表する。

## 文 献

- (1) Sternberg, E. and Sadowsky, M.A., *J. Appl. Mech.*, 19-1 (1952-3), 19.
- (2) Eubanks, R.A., *Trans. ASME, Ser. E*, 32-1 (1965-3), 21.
- (3) Hill, J.L., *Trans. ASME, Ser. E*, 33-1 (1966-3), 201.
- (4) Shelley, J.F. and Yi-Yuan Yu, 文献 (3) の 68 ページ.
- (5) Goree, J.G. and Wilson, H.B., *Trans. ASME, Ser. E*, 34-2 (1967-6), 313.
- (6) 宮本, 機論, 23-131 (昭 32-7), 431; Miyamoto, H., *Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1956), 27.
- (7) Atsumi, A., *Trans. ASME, Ser. E*, 27-1 (1960-3), 87.
- (8) 西田・金, 理化学研究所講演会前刷, (昭 39); 西田, 応力集中, (昭 42), 733, 森北書店.
- (9) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1958), 24, Springer-Verlag.
- (10) Robin, L., *Fonctions Spheriques de Legendre et Fonctions Spheroidales*, Tome 1 (1957), 164, Gauthier-Villars.
- (11) 西田, 応力集中, (昭 42), 442, 森北書店.