

氏 名	阿部 翠空星
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学 位 記 号 番 号	博理工甲第 1015 号
学位授与年月日	平成 28 年 3 月 24 日
学位授与の条件	学位規則第 4 条第 1 項該当
学 位 論 文 題 目	On finite type invariants of knots and 3-manifolds (結び目と 3 次元多様体の有限型不変量の研究)
論 文 審 査 委 員	委員長 教 授 下川 航也 委 員 教 授 福井 敏純 委 員 教 授 長瀬 正義 委 員 准教授 小野 肇 委 員 教 授 長澤 壯之

## 論文の内容の要旨

結び目のイソトピー類全体がはるベクトル空間  $K$  に部分ベクトル空間が次のように定義される。 $d$  個の特異点もつような特異結び目がはる部分ベクトル空間を  $K_d$  とおく。 $K_d$  は  $K$  のフィルトレーション  $K=K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$  を定めている。結び目の  $d$  次の有限型不変量（バシリエフ不変量ともいう。）とは、アーベル群への絡み目の不変量線型写像であって、 $d+1$  個の特異点をもつ特異絡み目のベクトル空間  $K_{d+1}$  に制限すると 0 写像になるものをいう。一般に、 $d$  次の有限型不変量は、結び目  $K$  が  $n$  交点図式をもつとき  $v_d(K)$  の値は  $n^d$  のオーダーでおさえられることが分かっている。つまり、 $v_d(K)/n^d$  の値は有界である。 $v_2(K)$  と  $v_3(K)$  を 2 次と 3 次の実数に値をとる素なバシリエフ不変量とする。素なバシリエフ不変量とは  $v_d(K_1 \# K_2) = v_d(K_1) + v_d(K_2)$  をみたすバシリエフ不変量である。今、 $v_2$ （三葉結び目）=  $v_3$ （三葉結び目）= 1 であるようなものとする。次の有界な集合を考える。

$$\left\{ \left( \frac{v_2(K)}{n^2}, \frac{v_3(K)}{n^3} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid K \text{ は } n \text{ 交点図式} \right\}$$

この集合の形を決めることは次の例のように重要である。例）結び目  $K$  の素なバシリエフ不変量、 $v_2(K)$  と  $v_3(K)$  の値がわかったとき、集合の点からその結び目の最小交点数を評価することができる。このことから、まず申請者は  $K$  がトールス結び目と呼ばれる結び目のタイプに対して集合の形を完全に決定した。また、Willerton 予想とされている  $|v_3(K)| \leq \lfloor n(n^3 - 1)/24 \rfloor$  がトールス結び目に対しては正しいことも示した。William Thurston は結び目が、双曲結び目、サテライト結び目あるいはトールス結び目の三種類からなることを示している。従って、今回の結果は結び目の三種類のうち 1 つを解決したこととなり、大変重要なものであると言える。

カンドルとは、群の元の共役をとる操作の類似の公理を満たす二項演算を備えた集合である。群のコホモロジーの類似物でカンドルコホモロジーが計算されたときに、結び目の図式の交点全てに適切にカンドルコホモロジーの値を当て、カラリングと呼ばれる交点でのカンドルの値を適切に全ての交点にあてはめる。この結果の全ての和をカンドルコサイクル不変量という。このカンドルを用いた不変量から有限型不変量が

導くことは、今までなかった独創的な研究である。一方がカンドルを用いた不変量であるのに対して、他方は量子不変量の中でも特別な不変量であるからである。有限型不変量には2つの性質がある。1つ目はフィルトレーションをつくり、 $d$ 次の有限型不変量、すなわちアーベル群への絡み目の不変量線形写像が、フィルトレーションの  $K_{d+1}$  に制限すると0写像になることである。2つ目はフィルトレーションの各次数の商ベクトル空間  $K_d/K_{d+1}$  は有限次元であることである。申請者はこの2つの性質から新しく quasi finite type invariant を定義した。 $d$  次の quasi finite type invariant の性質は、1つ目はアーベル群への不変量線形写像である。2つ目は、ある結び目のクラスにフィルトレーション  $K=K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$  を空集合にならないように自由に定めて  $K_{d+1}$  に制限すると、0写像になることである。3つ目は、商ベクトル空間  $K_d/K_{d+1}$  が有限次元であることである。以上の性質からザイフェルトカンドルと望月3-コサイクルと呼ばれるカンドルホモロジーで計算されたカンドルシャドウコサイクル不変量から quasi finite type invariant を必ず導くことができる。しかし、任意の結び目に対してカンドルシャドウコサイクル不変量は計算されておらず綺麗な式となって導かれる結び目のクラスは限られており、今回は2橋絡み目とトーラス絡み目に対して quasi finite type invariant を導いた。さらに quasi finite type invariant は3次元多様体の一般的な有限型不変量(大槻型不変量とは異なる)を導くことができた。これは定義域が整ホモロジー球面に限られていた3次元多様体の有限型不変量より大きくなる。具体的には絡み目を  $S^3$  で2重巡回分岐被覆させた空間が定義域となる。2重巡回分岐被覆空間とは、 $S^3$  内の絡み目に対してザイフェルト曲面に沿って切り開くとできる新しい境界付き3次元多様体を、2つ用意して2つの境界を貼り付けた空間のことである。2橋絡み目の場合はレンズ空間となり、トーラス絡み目の場合はプリスコーン多様体となる。この2つについて新しい有限型不変量を定義した。それは、大槻型不変量ではデーン手術される絡み目の成分数を次数としていたが、より一般にフィルトレーションを自由に定義し、各次数についてその次数の有限型不変量全体は有限次元であることと再定義した。この定義はより広い定義域をもち、新しい理論かつ重要な定義となる。また、各次数についてその次数の有限型不変量全体が有限次元であることを、写像類群を使った新しい理論で示した。

ところで、カンドルコサイクル不変量から有限型不変量を導くという当初の研究課題はトリビアルカンドルに対して成立することが示された。さらに、0次の値は彩色数、1次の値はカンドルコサイクル不変量の値をとることも示され、これまで関係が全くわからなかった二つの不変量を繋ぐ新しい理論と言える。

## 論文の審査結果の要旨

当論文審査会は、当該論文発表会を平成 28 年 2 月 9 日に公開で開催し、質疑応答を行い、論文内容の審査を行った。その結果、本論文を博士（理学）の学位論文として合格と判定した。以下に審査結果の要約を記す。

この論文では、3 次元球面内の結び目と絡み目、および、3 次元多様体の有限型不変量（バシリエフ不変量）の研究を行っている。3 次元球面への 1 次元球面の埋め込み（のイソトピー類）を結び目と言ひ、1 次元球面の非交差和の埋め込み（のイソトピー類）を絡み目という。3 次元多様体とは、局所的には 3 次元ユークリッド空間と同相である空間である。結び目理論、3 次元多様体論はそれぞれトポロジーの一分野であり、100 年以上前から研究が続いている。結び目の不変量の研究も同様の歴史があり、前世紀前半から研究されているアレキサンダー多項式や、1980 年代に導入されたジョーンズ多項式は、現在でも各種の研究に重要な役割を果たしている。結び目の有限型不変量の研究は、バシリエフの研究等に基づくもので、量子不変量の研究とも関連し、1990 年代以降活発に研究が行われている。3 次元多様体は絡み目のデーン手術を用いて表されることが知られている。その表示を用いて、一部の 3 次元多様体にも有限型不変量が定義されている。

トーラス結び目とは、3 次元ユークリッド空間に標準的に埋め込まれたトーラス上に載せることが出来る結び目であり、これまでに多くの研究が行われている。この論文ではまずトーラス結び目について、結び目  $K$  の 2 次と 3 次の標準化されたバシリエフ不変量  $v_2(K), v_3(K)$  と交点数  $c(K)$  との関係を与えている。ここでは、 $v_2(K)$  と  $v_3(K)$  は結び目  $K$  のジョーンズ多項式の微分から得られるものを考えている。結び目の交点数は、結び目の図を描いた際に現れる 2 重点であり、結び目の複雑度の指標となる。この問題に関しては、様々な結び目に対し、 $(v_2(K)/n(K)^2, v_3(K)/n(K)^3)$  という平面内の点の集合の特徴付けが以前から問題として挙げられている。今回の論文ではトーラス結び目の場合に、その集合のある種の特徴付けを与えている。この研究では、トーラス結び目のジョーンズ多項式の公式と、交点数の公式を用いて結果を得ている。

次に、3 次元多様体の有限型不変量の概念の拡張の考察を行っている。これは、これまでの研究で知られている整係数ホモロジー球面について定義された有限型不変量を、より広いクラスの 3 次元多様体の不変量へと拡張を目指すものである。今回の研究では、2 橋結び目やトーラス結び目について計算されているカンドル・シャドー・コサイクル不変量を元にして、その 2 重分岐被覆として得られる 3 次元多様体であるレンズ空間やブリースコーン多様体について不変量を与えている。これは、ダイグラフ・ウィッテン不変量とも関連することが知られている。有限型不変量には 3 次元多様体の集合にフィルトレーションが付随する。今回の場合では、写像類群を用いて当該 3 次元多様体の集合にフィルトレーションを導入している。そのフィルトレーションに対して、不変量が有限型不変量と似た性質を持つものを擬有限型不変量と定義している。この研究では、扱っている 3 次元多様体、不変量は限られたものであるが、その概念の導入に意義があると思われる。

最後に、結び目のカンドル・シャドー・コサイクル不変量と、有限型不変量の関係を考察している。結び目のカンドル・コサイクル不変量から有限型不変量を得る道筋があることは既に知られていたが、今回の研究では、カンドル・シャドー・コサイクル不変量の場合も同様であることも確認し、トリビアル・カンドルの場合に考察している。

以上の成果は、既に研究集会で発表されている。さらに、一部は 1 編の学術論文として査読付きのジャーナルに投稿され、受理され出版が決定している。以上を総合的に審査した結果、当学位論文審査会は博士（理学）に値する論文であると認め、合格と判定した。