氏　　　名	石関　彩
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学位記号番号	博理工甲第1017号
学位授与年月日	平成28年3月24日
学位授与の条件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	Decomposition of the Möbius energy: the Möbius invariance and variational formulae of decomposed energies （メビウス・エネルギーの分解：分解されたエネルギーのメビウス不変性と変分公式）
論文審査委員	委員長　教　授　長澤　壯之
	委　員　准教授　櫻井　力
	委　員　准教授　町原　秀二
	委　員　教　授　下川　航也

論文の内容の要旨

メビウス・エネルギーは1991年に結び目のエネルギーの一種として今井淳氏（首都大学東京）によって導入された．与えられた結び目を，その結び目型を変えないように変形を施した時，もっとも最適な形は何か？という問題を考えることが目的である．何らかのエネルギーを定め，その最小値を実現する結び目が存在すれば，それをその結び目型の中で最適な形とする．すなわち結び目のエネルギーに関する変分問題を扱うことになる．今井氏は，帯電した物質に働くクーロンの反発力をもとにエネルギーを定義した．結び目上の2点間のユークリッド距離と結び目に沿った距離，それぞれの逆冪の差分がその密度であり，その二重積分をとったものがエネルギーの定義である．このエネルギーは，対角部分に見かけ上の特異性をもつため主値積分で表されるが，除去可能なものである．しかしながら，このエネルギーを元の表示のまま，変分計算や評価等の解析を行うことは容易ではない．

一般に変分問題を解く方法はいくつかあるが，結び目の変形のような連続的な変形による最小化問題には勾配流を用いた方法が最適と思われる．まず変分問題として考えるにあたって，もとのエネルギーの第一変分および第二変分を求める必要があるが，先に述べたように，このメビウス・エネルギーに対する解析は容易ではない．実際，メビウス・エネルギーに対する変分問題に関しては「自明な結び目が属する結び目型において，正円のみがエネルギー最小元を与える」ことが知られているが，その他の結び目型に対しては，具体的な解決には至っておらず，「素な結び目型にはエネルギー最小元が存在する」という抽象的な結果が知られているのみである．一方，「素でない結び目型（すなわち合成結び目型）にはエネルギー最小元が存在しない」という予想があり，本研究はこの問題を肯定的に解くことを目的としている．

この問題に対する新たなアプローチとして，本研究では，エネルギーにある分解を施した．メビウス・エネルギーは，結び目のエネルギーの中でも，特にメビウス不変性をもつエネルギーとして知られている．ここでは，その幾何学的な性質を保ったまま，3つのエネルギーに分解ができることを示す．この分解を行うことで，解析的な扱いが容易になり，さらにはこのエネルギーの解析的・幾何学的な構造が見えやすくなる．

2012 年に S. Blatt 氏によって，メビウス・エネルギーが有界になる必要十分条件は，曲線がある分数冪ソボレフ空間に入ることであるということが示された．分解されたエネルギーの第一エネルギーは，このメビウス・エネルギーの自然な定義域が，その分数冪ソボレフ空間であることを特徴付けている．第一エネルギーのメビウス不変性から，その最小元の存在を示すことができる．また，第二エネルギーは，今井氏と G. Solanes 氏によって幾何学的な観点から導入された結び目のエネルギーに，本質的に一致する．第三エネルギーは絶対定数 4 であり，これは正円のメビウス･エネルギーと一致する．変分計算の際は，第三エネルギーは無視して良いことになる．

第一エネルギーと第二エネルギーは見かけ上は大きく異なる形をしているが，ある作用素を定義し，表示を書き換えることで，実際には似た構造をもっていることがわかる．それにより，この 2 つのエネルギーを統一的に扱うことができ，さらにはエネルギー自身のみならず，その第一変分および第二変分もまた，類似の構造をしていることが分かった．

勾配流方程式を立てるにあたり，第一変分公式の L^2 表現が必要になる．メビウス・エネルギーに対するこの表現は既に 2000 年に He によって得られているが，ここでは第一エネルギー，第二エネルギーのそれぞれから主要部と低階項が得られ，主要部についてはその和が He のものと一致する．

この論文では，第 1 章で結び目のエネルギーの導入を行い，第 2 章で関連する先行結果を述べる．第 3 章で分解定理の証明を与え，第 4 章以降で分解されたエネルギーを扱う．第 4 章でそのメビウス不変性を示し，第 5 章で変分公式とその評価を与える．

論文の審査結果の要旨

当学位論文審査委員会は、当該論文の発表会を平成 28 年 2 月 8 日（月）10 時より公開で開催し、論文発表の後、活発な質疑を行った。その結果、提出論文を博士（理学）の学位論文として合格と判定した。以下に審査結果を記す。

本研究は、結び目のエネルギーの一つである Möbius エネルギーを扱ったものである。結び目のエネルギーは与えられた結び目型の中で標準的なものを定めるという目的で O'Hara により 1991 年に提唱されたものである。その中でも一つが Freedman-He-Wang (1994) によって Möbius 変換に関して不変である事が示され、Möbius エネルギーと呼ばれるようになった。他のエネルギーは持たない幾何学的な性質を有するという点で興味深い対象である。Möbius 変換の一つに相似変換がある。すなわち、このエネルギーは相似変換によって不変となる。これは、エネルギー密度の集中を起こす可能性を意味し、変分法の直接法が使えない。すなわち、解析的に困難な場合であり、その意味でも詳細な性質の解明が待たれる対象である。

Möbius エネルギーは、結び目（自己交叉を持たない閉曲線）の弧長に関する二重積分で定義される。非積分関数は 2 つの項からなるが、それらはいずれも単独では積分が収束しない。すなわち、2 つの項が特異性を打ち消しあうことでエネルギーが初めて有限値となって意味を持ってくる。従って、このエネルギーを解析的に取り扱う際には、非常な繊細さが要求される。例えば、形式的に変分公式を導くと、単独では積分が収束しない項が多数現れる。これは、積分記号下での微分を実行する事が可能であるかの確認が容易でない事を意味する。著者は、修士論文において、閉曲線が $C^{3+\alpha}$ 級である場合に、第二変分までこれを確認した。しかしながら、閉曲線の滑らかさはエネルギーが有界になる条件よりはるかに緩い上、方法も必ずしも見通しの良いものではなかった。

そこで、本研究では、Möbius エネルギーを変分公式を導きやすいようにあらかじめ分解する手法をとった。得られた分解は、その各々が Möbius 不変性をもつ。第一の分解エネルギーは、Möbius エネルギーが有界となる分数冪 Sobolev 空間のセミノルムの類似物で、解析的に極めて妥当である。第二のものは、O'Hara-Solanes エネルギーと本質的に等価である。後者は、O'Hara よりご指摘いただいた。

第一エネルギーと第二エネルギーのエネルギー密度は、一見すると全く異なるように見えるが、差分作用素の類似物を導入する事により、その構造が極めて似ていることが分かる。これを利用して、変分公式を統一的に導出する事が可能になった。

研究は、4 つの学術誌に投稿され、学位論文はこれらを纏めた形になっている。4 編のうち 3 編は出版済みである。

第一のものは、分解定理と分解エネルギーの Möbius 不変性を示したもので、Kodai Math. J. に掲載されている。

第二のものは、分解エネルギーの第一変分と第二変分の導出である。これらは、それぞれの導出を個々に行うのではない。上で述べたように、差分作用素の類似物を数種類導入することで、2 つのエネルギーの構造に類似性がある事を指摘する。その上で、2 つのエネルギーの変分公式を統一的に導出する。差分作用素の類似物を評価することで、様々な関数空間における変分公式の評価を得た。これは解析系の一流誌 Math. Ann. に掲載されたばかりでなく、MathSciNet のレヴューでも "In conclusion, the paper is well written and definitely contains hard work and significant results." と高く評価された。

第三のものは、分解されたエネルギーの Möbius 不変性に関するものである。Möbius 変換のなかに球面に関する鏡像がある。球面の中心が閉曲線上に無い場合は、第一の論文で取り扱った。球面の中心が閉曲線

上にある場合は、像が開曲線となるため、異なる扱いが必要である。この部分のみでも相当量の計算を必要とする。また、ここで得られた結果より元のMöbiusエネルギーの最小元と分解後の第一エネルギーの最小元に関する情報が得られる。これは結び目の専門誌 J. Knot Theory and Ramificationsに掲載されている。

第四のものは、分解されたエネルギーの第一変分公式のL^2表現を与えたものである。第二の論文で得られた変分公式は、閉曲線と試験関数が同じSobolev空間$H^{2/3} \cap W^{1,\infty}$に属する場合のものである。閉曲線を試験関数の方向に摂動するのであるから、同じ関数空間に属するという仮定は自然である。しかし、一旦変分公式が求められれば、形式的な部分積分でより広い関数空間L^2上の線形形式に拡張される。この形式的計算は容易ではない。それは、変分公式の密度関数の個々の項が必ずしも絶対可積分でないためである。この結果は、変分法の専門誌に投稿中である。レフェリーからは、"This paper is one of the rare analytical contributions to the field of strict mathematical rigor that settles one of the most fundamental questions for the decomposition of the Möbius energy. The presentation is well written and detailed and well certainly have its impact on the field of geometric knot theory."と極めて高く評価されている。現状では序文等に小修正を加えて再投稿中である。

提出論文は、第1章の序文に続き、第2章で結び目のエネルギーに関する従来の結果をまとめ、本研究の位置付けを明確にしている。第3章はMöbiusエネルギーの分解を示している。投稿論文の第一のものの前半の内容であるが、証明の一部はより簡潔なものに改良されている。第4章では、分解されたエネルギーのMöbius不変性について、投稿論文の第一のものの後半と第三のものからなる。第5章は、分解されたエネルギーの変分公式の導出や評価を投稿論文第二ものと第四のものを基にしている。

当学位論文審査委員会は、提出論文の内容の独自性と結果の有意性を高く評価し、博士（理学）の学位授与の相応しいものと判断した。