

コンパクトな台をもつ直交ウェーブレットの構成

埼玉大学大学院理工学研究科博士前期課程

数理電子情報系専攻数学コース二年

岡本 麻里

平成 20 年 2 月 4 日

目次

1	序文	3
2	主要結果	4
2.1	準備	4
2.2	主要結果	5
3	ウェーブレットと多重解像度解析	9
3.1	直交スケーリング関数	9
3.2	スケーリング関数とツースケールシンボル	10
3.3	定理 2.6 の証明	14
3.4	ウェーブレットとその共役	17
3.5	コンパクトな台をもつウェーブレット	27
4	直交ウェーブレットの構成	33
4.1	定理 2.8 の証明	33
4.2	コンパクトな台をもつ直交ウェーブレットの構成	39
5	メイエの直交ウェーブレット	46
6	ドベシーの直交ウェーブレット	48
6.1	Strichartz の方法	48
6.2	${}_2\phi^D(x), {}_2\psi^D(x)$	49
6.3	${}_3\phi^D(x), {}_3\psi^D(x)$	50
6.4	カスケードアルゴリズムによる ${}_N\phi^D(x), {}_N\psi^D(x)$ の近似	51

1 序文

ウェーブレット理論は1980年代初め、フランスの石油探査技師 J.Morlet が、信号の精密な時間周波数解析のために考案したのが始まりであり、時間と周波数の両方を同時に解析できる新しい方法として、近年ますます脚光を浴びている。

まず、周波数解析の手法としてはフーリエ変換がある。しかし、フーリエ変換は時間に関する情報が失われてしまうため、時間の経過とともにデータの周波数特定の変化を把握することができない。そこで、ウェーブレットの登場である。このウェーブレットは周波数に応じてダイナミックに時間間隔を変化させ、時間周波数解析を行う。つまり、周波数に反比例させ、低域では観測する時間間隔を長く、また高域では短くするのである。これは自然の摂理にかなっており、多くの信号解析が合理的に行えるようになった。

本論文では多重解像度解析を定めるツースケール関係式を考察の中心に研究を進めた。以下、三つの定理を紹介する。第一の定理は直和分解に関する定理である。ウェーブレット ψ はヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間 $W_j, j \in \mathbf{Z}$ による直和分解を与える。

$$\begin{cases} \psi_{j,k}(x) := \{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbf{Z}} \\ W_j := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \langle \psi_{j,k} : k \in \mathbf{Z} \rangle \end{cases}$$

とする。この W_j を用いて

$$V_j := \dots + W_{j-2} + W_{j-1}, \quad j \in \mathbf{Z}$$

とおけば、 $\{V_j\}$ は集合の包含関係に関して単調増加であり、その和集合は $L^2(\mathbf{R})$ で稠密、またその共通部分は零空間 $\{0\}$ となる。第二の定理は $\{\phi(x-j)\}_{j \in \mathbf{Z}}$ が V_0 の基底になるときスケーリング関数と呼ばれるが、この $\{\phi(x-j)\}$ がさらに直交基底となるための条件を述べた定理である。第三の定理はそれらの定理を用いてコンパクトな台をもつ直交スケーリング関数と直交ウェーブレットを具体的に構成するための定理を述べる。

ここで、本論文の構成を説明する。第2章でウェーブレットと多重解像度解析について正確に定義し、主要結果を述べる。第3章で直和分解に関する定理の証明を行う。第4章で直交ウェーブレットの構成方を述べ、第二の定理と第三の定理について証明する。最後に第5章、第6章でメイエの直交ウェーブレットとドベシーの直交ウェーブレットの具体的な構成を行う。

2 主要結果

2.1 準備

主要結果を述べる前に必要となる定義、定理、記号を導入する。

以下、 $L^2(\mathbf{R})$ の内積とノルムを $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$ および $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}$ で表す。

また、1次元の Fourier 変換 \mathcal{F} を

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\omega} f(x) dx \quad (f \in L^2(\mathbf{R}))$$

で定義する。逆 Fourier 変換は

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \check{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\omega} g(\omega) d\omega \quad (g \in L^2(\mathbf{R}))$$

となり、パーセバルの等式

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \tag{2.1}$$

が成り立つ。

定義 2.1. ヒルベルト空間 H の関数列 $\{f_k\}$ は、 $0 < A \leq B < \infty$ が存在し、任意の数列 $\{a_k\}$ に対して

$$A \sum |a_k|^2 \leq \|\sum a_k f_k\|_H^2 \leq B \sum |a_k|^2 \tag{2.2}$$

が成り立ち、さらに $\{f_k\}$ の有限線形結合全体の作る部分空間が H で稠密となるときのリース基底であるという。

定義 2.2. 1つの関数 $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ から拡大・縮小と平行移動によって生成される関数列 $\{\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k); j, k \in \mathbf{Z}\}$ が $L^2(\mathbf{R})$ のリース基底となるとき、 ψ をウェーブレットという。特に、 $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbf{Z}\}$ が正規直交基底となるとき、 ψ を直交ウェーブレットという。

定義 2.3. 次の条件を満たす $L^2(\mathbf{R})$ の部分空間の列 $\{V_j; j \in \mathbf{Z}\}$ を多重解像度解析という。

- (1) $\cdots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \cdots$
- (2) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$
- (3) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$
- (4) $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$
- (5) $\phi \in V_0$ が存在し、 $\{\phi(x-k); k \in \mathbf{Z}\}$ が V_0 のリース基底となる。

関数 ϕ を多重解像度解析 $\{V_j\}$ を生成するスケーリング関数と呼ぶ。

関数 ϕ が多重解像度解析 $\{V_j\}$ のスケーリング関数であれば、条件(4)、(5)より $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ は V_j のリース基底となる。特に、 $V_0 \subset V_1$ だから、

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \phi_{1,k}(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} p_k \phi(2x - k) \quad (p_k = \sqrt{2} h_k) \end{aligned} \tag{2.3}$$

なる $\{p_k\} \in \ell^2(\mathbf{Z})$ が一意に存在する。これを伸長方程式, あるいはツースケール関係式という。 ℓ^2 -列 $\{p_k\}$ を用いて

$$P(z) = P_\phi(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} p_k z^k$$

で定義される (形式的) ローラン級数をスケーリング関数 ϕ のツースケールシンボルと呼ぶ。式 (2.3) はフーリエ領域では

$$\hat{\phi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2})\hat{\phi}(\omega/2) \quad (2.4)$$

と表せる。

定義 2.4. ローラン級数の係数列 $\{p_k\}$ が ℓ^1 に属するとき、ウィナー族 \mathcal{W} に属するという。

2つの ℓ^1 -列の離散たたみ込みは ℓ^1 -列になるから、 \mathcal{W} はアルジェブラになっている。さらに、N.Wiener により次の定理が知られている。

定理 2.5. $f \in \mathcal{W}$ とした $|z| = 1$ 上で $f(z) \neq 0$ とする。このとき $\frac{1}{f} \in \mathcal{W}$ である。

2.2 主要結果

さて、スケーリング関数 ϕ はそのツースケールシンボル

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k \quad (2.5)$$

がウィナー族 \mathcal{W} に属するものとする。次に任意の ℓ^1 -列 $\{q_k\}$ とそのシンボル

$$Q(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k z^k \quad (2.6)$$

を考える。

$$\psi(x) := \sum_k q_k \phi(2x - k) \quad (2.7)$$

とおけば ψ は V_1 に属する。この関数 ψ は、ちょうど ϕ が V_0 を生成しているのと同様に、

$$W_0 := \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \langle \psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z} \rangle \quad (2.8)$$

によって閉部分空間 W_0 を生成する。ウェーブレットを構成するためには、少なくとも V_0 と W_0 が V_1 の中で補空間となっていること、すなわち

$$V_0 \cap W_0 = 0, \quad \text{かつ} \quad V_1 = V_0 + W_0 \quad (2.9)$$

となることが望ましい。(2.9)の2つの性質が成り立っているとき V_1 は V_0 と W_0 の直和であるといい、(2.9)の代わりに

$$V_1 = V_0 + W_0 \tag{2.10}$$

と書く。

直和分解(2.10)が得られるための条件を述べるために行列

$$M_{P,Q}(z) := \begin{bmatrix} P(z) & Q(z) \\ P(-z) & Q(-z) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

を考えよう。行列(2.11)の行列式:

$$\Delta_{P,Q}(z) := \det M_{P,Q}(z)$$

は \mathcal{W} がアルジェブラであるから

$$\Delta_{P,Q} \in \mathcal{W}$$

である。したがって、 $|z|=1$ 上で $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$ という条件のもとに、次の2つの関数:

$$\begin{cases} G(z) & := \frac{Q(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)}, \\ H(z) & := \frac{-P(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)} \end{cases}$$

はともにウィナー族 \mathcal{W} に属する。関数 G, H から行列

$$M_{G,H}(z) := \begin{bmatrix} G(z) & H(z) \\ G(-z) & H(-z) \end{bmatrix}$$

を作ると

$$\begin{cases} M_{P,Q}(z)M_{G,H}^T(z) & = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_{G,H}^T(z)M_{P,Q}(z) & = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |z|=1 \end{cases} \tag{2.12}$$

が成立する。 $G, H \in \mathcal{W}$ であるから、適当な $\{g_n\}, \{h_n\} \in l^1$ を用いて

$$\begin{cases} G(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n z^n, \\ H(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^n \end{cases} \tag{2.13}$$

と書くことができる。

直和分解に関する結果は次のように述べる事ができる。

定理 2.6. 直和分解 $V_1 = V_0 + W_0$ が成立するための十分条件は、連続関数 $\Delta_{P,Q}$ が単位円 $|z|=1$ 上で0にならないことである。このとき、 Q によって構成される関数(2.7)の族 $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ は W_0 のリース基底となり、分解関係:

$$\phi(2x - l) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{g_{2k-l}\phi(x-k) + h_{2k-l}\psi(x-k)\}, \quad l \in \mathbf{Z} \tag{2.14}$$

がすべての $x \in \mathbf{R}$ に対して成立する。

次に、直交スケーリング関数のツースケールシンボルを特徴づける定理を述べる。

命題 2.7. P をウィナー族 \mathcal{W} に属するローラン級数とする。もし P がある直交スケーリング関数 ϕ のツースケールシンボルであるならば、 P は

$$P(1) = 1, \tag{2.15}$$

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \quad |z| = 1 \tag{2.16}$$

を満たす。

(2.15), (2.16) より $P(-1) = 0$ であるが、 $z = -1$ での零点の位数を N とすれば

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k \\ &= \left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z) \end{aligned} \tag{2.17}$$

と表せる。ただし、 $S \in \mathcal{W}$ で $S(1) = 1$ なるものである。(2.17) の S を

$$S(z) = \sum_k s_k z^k$$

とし、

$$B = \max_{|z|=1} |S(z)|$$

とおく。

定理 2.8. $P \in \mathcal{W}$ は (2.16) と、適当な $N \geq 1$ に対し (2.17) を満たすものとする。さらに S の係数列 $\{s_k\}$ は適当な $\epsilon > 0$ に対して

$$\sum |s_k| |k|^\epsilon < \infty$$

を満たし、かつ

$$B < 2^{N-1}$$

も満たすものとする。このとき無限乗積:

$$g(\omega) := \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})$$

は至るところで $g \in C(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ に収束する。また $\hat{\phi} = g$ なる関数 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ は直交スケーリング関数であり、 $L^2(\mathbf{R})$ の多重解像度解析を生成する。

最後に、コンパクトな台をもつ直交スケーリング関数と直交ウェーブレットを具体的に構成するためのドベシーによる一つの定理を述べる。

定理 2.9. N を正整数とし、 $S(z)$ は実係数のローラン多項式で

$$|S(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{n+j-1}{j} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2j} \quad (2.18)$$

を満たし、かつ $S(1) = 1$ なるものとする。このときローラン多項式

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k$$

はコンパクトな台をもつ直交スケーリング関数 ϕ のツースケールシンボルとなる。また、

$$\psi(x) := \sum_k (-1)^k \bar{p}_{-k+1} \phi(2x - k)$$

で定義される ϕ は、コンパクトな台をもつ直交ウェーブレットとなる。

したがってコンパクトな台をもつ直交ウェーブレット ψ を構成するときの技術的な問題は、(2.18) を満たす $S(z)$ を求めることになる。次の定理は、(2.18) を満たす $S(z)$ が必ず存在することを保証している。

定理 2.10. $a_0, \dots, a_N \in \mathbf{R} (a_N \neq 0)$ は不等式:

$$A := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \geq 0, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (2.19)$$

を満たす列とする。このとき次数がちょうど N の実係数多項式:

$$B(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^k$$

で

$$|B(z)|^2 = A(\omega), \quad z = e^{-i\omega} \quad (2.20)$$

を満たすものが存在する。

3 ウェーブレットと多重解像度解析

3.1 直交スケーリング関数

定理 3.1. 関数 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ に対し関数列 $\{\phi(x-k); k \in \mathbf{Z}\}$ が正規直交系となるための必要十分条件は

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (3.1)$$

がほとんど全ての ω で成り立つことである。

[証明] $G(\omega) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2$ とおくと、 $G \in L^1(0, 2\pi)$ である。パーセバルの等式より

$$\begin{aligned} \langle \phi(\cdot - k), \phi(\cdot - l) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-k) \overline{\phi(x-l)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-j) \overline{\phi(x)} dx \quad (j = k-l) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ij\omega} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ij\omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij(\omega+2\pi k)} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij\omega} G(\omega) d\omega =: c_j(G) \end{aligned}$$

が成立する。

$c_j(G)$ は $G \in L^1(0, 2\pi)$ のフーリエ係数にほかならないから、 $\langle \phi(\cdot - k), \phi(\cdot - l) \rangle = \delta_{k,l}$ は $G(\omega) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \delta_{j,0} e^{ij\omega} \equiv 1$ と同値である。

定理 3.2. $\{\phi(x-k)\}$ が V_0 のリース基底であれば、ほとんど全ての $\omega \in \mathbf{R}$ で

$$A \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq B \quad (3.2)$$

が成り立つ。

[証明] リース条件 (2.2) は、

$$A \sum |a_k|^2 \leq \|\sum a_k \phi(x-k)\|_2^2 \leq B \sum |a_k|^2 \quad (\forall \{a_k\} \in \ell^2(\mathbf{Z})) \quad (3.3)$$

と述べることができる。 $m(\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik\omega}$ とおきパーセバルの等式を用いると

$$A \|m\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \leq \int_{\mathbf{R}} |m(\omega)|^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \leq B \|m\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \quad (3.4)$$

となる。 $G(\omega) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2$ とおくと、これは

$$A \|m\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \leq \int_0^{2\pi} |m(\omega)|^2 G(\omega) d\omega \leq B \|m\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \quad (3.5)$$

と書ける、今、 $m(\omega) = m_N(\omega - \omega_0) := (2\pi N)^{-1/2} \sum_{|k| < N} e^{ik(\omega - \omega_0)}$ と取れば、 $|m_N(\omega)|^2 = \frac{\sin^2\{(N-1/2)\omega\}}{2\pi N \sin^2(\omega/2)}$ はフェイエル核であり、ほとんど全ての ω_0 で

$$\int_0^{2\pi} |m_N(\omega - \omega_0)|^2 G(\omega) d\omega \rightarrow G(\omega_0) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ、 $\|m_N\|_{L^2(0,2\pi)} = 1$ ($\forall N$) と合わせて (3.2) が従う。

定理 3.1 と定理 3.2 により $\{\phi(x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ が V_0 のリース基底であれば、

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{(\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2)^{1/2}}$$

により $\tilde{\phi}$ を定義すると、 $\tilde{\phi}$ は V_0 の正規直交基底となる。多重解像度解析 $\{V_j\}$ の直交スケールリング関数は次の意味で一意的である。

命題 3.3. $\{V_j\}$ を多重解像度解析、 ϕ を $\{V_j\}$ を生成する直交スケールリング関数とする。関数 $f \in V_0$ を $\{f(x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ が正規直交系をなすものとする、 $|\theta(\omega)| = 1$, $\theta(\omega + 2\pi) = \theta(\omega)$ (a.e.) なる関数 $\theta \in L^\infty(\mathbf{R})$ が存在し、

$$\hat{f}(\omega) = \theta(\omega)\hat{\phi}(\omega) \quad (3.6)$$

が成り立つ。

[証明] $f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \phi(x - k)$ ($\{a_k\} \in \ell^2(\mathbf{Z})$) と表し $\theta(\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik\omega}$ とおけば、 $\hat{f}(\omega) = \theta(\omega)\hat{\phi}(\omega)$ である。 $\{f(x - k)\}$ が正規直交系ならば、パーセバルの等式と定理 3.1 により

$$\begin{aligned} \delta_{j,0} &= \langle f(\cdot - j), f(\cdot) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ij\omega} |\theta(\omega)|^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij\omega} |\theta(\omega)|^2 \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij\omega} |\theta(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

この最右辺は $|\theta(\omega)|^2 \in L^1(0, 2\pi)$ のフーリエ係数であるから、 $|\theta(\omega)|^2 \equiv 1$ (a.e.) を得る。

3.2 スケーリング関数とツースケールシンボル

ϕ を多重解像度解析 $\{V_j\}$ を生成するスケールリング関数とする。 $\phi \in V_0 \subset V_1$ であり $\{\phi_{1,k}; k \in \mathbf{Z}\}$ は V_1 のリース基底だから、スケールリング関数 ϕ についてのツースケール関係:

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(2x - k) \quad (3.7)$$

を満たす一意な l^2 -列 $\{p_k\}$ が存在する。スケーリング関数 ϕ のツースケールシンボルは

$$P(z) = P_\phi(z) := \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k \quad (3.8)$$

により定義された。(3.7) をフーリエ変換すると

$$\hat{\phi}(\omega) = P(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad z = e^{-\frac{i\omega}{2}} \quad (3.9)$$

を得る。

ここでは列 $\{p_k\}$ を決めるツースケール方程式として

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k = \left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z) \quad (3.10)$$

なる形のもの考える。ただし、 N は適当な正整数、 $S(z)$ は単位円 $|z| = 1$ 上の十分なめらかな関数で $S(1) = 1$ となるものとする。

定義 3.4. 式 (3.10) のローラン級数 $P(z)$ は、 S が単位円上で連続であり、かつ下の (i)、(ii) を満たすとき、アドミシブルなツースケールシンボル であると呼ばれる。

(i) $S(1) = 1$

(ii) 適当な $0 < \alpha < 1$ が存在し、 ω の関数 $S(e^{-i\omega})$ は α 次のヘルダー連続関数である。すなわち、

$$|S(e^{-i\omega}) - S(e^{-i\omega_0})| = O(|\omega - \omega_0|^\alpha) \quad (3.11)$$

が成り立つ。

定義 3.5. 関数 $f \in C(\mathbf{R})$ で、 $0 < \alpha < 1$ に対し

$$\sup_{x,h} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\alpha} < \infty \quad (3.12)$$

を満たすものの全体を記号 $C^\alpha(\mathbf{R})$ で表す。より一般に、 $m \in \mathbf{N}$ と $0 < \alpha < 1$ に対し、関数 $f \in C^m(\mathbf{R})$ で $f^{(m)} \in C^\alpha(\mathbf{R})$ となるものの全体を記号 $C^{m+\alpha}(\mathbf{R})$ で表す。

S を因子にもつアドミシブルなツースケールシンボル $P(z)$ (3.10) に対し、 B_j 、 b_j を

$$\begin{cases} B_j &= B_j(S) := \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \left| \sum_{k=1}^j S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \\ b_j &= b_j(S) := \frac{1}{j} \log_2 B_j = \frac{1}{j \ln 2} \ln B_j \end{cases} \quad (3.13)$$

とおく。

定理 3.6. P は (3.10) の形のアドミシブルなツースケールシンボルとする。このとき無限乗積

$$g(\omega) := \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \quad (3.14)$$

は各点 $\omega \in \mathbf{R}$ に対して収束する。さらに任意の正整数 n_0 に対し正定数 C_{n_0} が存在して、評価式

$$|g(\omega)| \leq C_{n_0} (1 + |\omega|)^{-N+b_{n_0}}, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (3.15)$$

が成立する。ここに b_{n_0} は (3.13) で定義されるものである。特に $b_{n_0} < N - \frac{1}{2}$ なる n_0 が存在すれば、 $\hat{\phi} = g$ 、 $\hat{\phi}(0) = 1$ かつツースケール関係 $\hat{\phi}(\omega) = P(z)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $z = e^{-\frac{i\omega}{2}}$ を満足する関数 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ が存在する。

[証明] ω を任意に固定する。 $S(1) = 1$ であることと $S(e^{-i\omega}) \in C^\alpha(\mathbf{R})$ ($0 < \alpha < 1$) であることにより

$$|1 - S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})| = O\left(\frac{|\omega|^\alpha}{2^{k\alpha}}\right), \quad k \rightarrow \infty$$

である。したがって、すぐにわかるように $\sum_k \left(\frac{|\omega|^\alpha}{2^{k\alpha}}\right) < \infty$ であり、また

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^K |S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})| &= \exp\left\{\sum_{k=1}^K \ln |1 - (1 - S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}))|\right\} \\ &= \exp\left\{O\left(\sum_{k=1}^K \frac{|\omega|^\alpha}{2^{k\alpha}}\right)\right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

だから、無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty} S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})$$

は収束する。一方、 $\prod \left(\frac{1 + e^{-\frac{i\omega}{2^k}}}{2}\right)^N$ は収束しているから、(3.14) は $\omega \in \mathbf{R}$ に対して収束する。こうして定理の前半が示された。

次に評価式 (3.15) を証明する。 ω に依存しない定数 C' を選んで

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-\frac{i\omega}{2^k}}}{2}\right)^N \right| = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^N \leq C' (1 + |\omega|)^{-N} \quad (3.17)$$

とできる。 $\omega \in \mathbf{R}$ を任意に固定し、 $n \in \mathbf{Z}$ を $2^n < 1 + |\omega| \leq 2^{n+1}$ なるものとする。 $k \geq n+1$ なら $\left|\frac{\omega}{2^k}\right| \leq 1$ だから

$$\left| \prod_{k=n+1}^{\infty} S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \leq C''$$

とできる。ここに C'' は ω に依存しない定数である。したがって $C''' := C' C''$ とおけば、(3.17) と上の不等式により

$$\begin{aligned} |g(\omega)| &= \left| \prod_{k=1}^K \left(\frac{1 + e^{-\frac{i\omega}{2^k}}}{2}\right)^N \right| \cdot \left| \prod_{k=1}^n \prod_{k=n+1}^{\infty} S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \\ &\leq C''' (1 + |\omega|)^{-N} \prod_{k=1}^n |S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})| \end{aligned} \quad (3.18)$$

を得る。ところで (3.13) より、任意に固定された正整数 n_0 と上の n に対して

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{k=1}^n S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| &= \prod_{k=1}^{n_0} \left| S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \prod_{k=n_0+1}^{2n_0} \left| S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \cdots \\
&\cdots \prod_{k=\lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor n_0 + 1}^n \left| S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \\
&\leq C'_{n_0} B_{n_0}^{\lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} \\
&\leq C''_{n_0} B_{n_0}^{\frac{n}{n_0}}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

が成り立つ。ここに C'_{n_0}, C''_{n_0} は n_0 に依存する定数である。 n のとり方から

$$n < \log_2(1 + |\omega|) \leq n + 1$$

なので、

$$B_{n_0}^{\frac{n}{n_0}} \leq C'''_{n_0} B_{n_0}^{\log_2(1+|\omega|)\frac{1}{n_0}} = C'''_{n_0} (1 + |\omega|)^{b_{n_0}}$$

となっている。このことから、 $C_{n_0} := C'''_{n_0} C''_{n_0} C'_{n_0}$ とおけば、(3.18)、(3.19) と上の不等式より評価式 (3.15) が従う。

最後に適当な n_0 に対し $b_{n_0} < N - \left(\frac{1}{2}\right)$ であるとき定理で主張する関数 ϕ の存在を示す。評価式 (3.15) より、この場合 $g \in L^2(\mathbf{R})$ である。フーリエ変換は $L^2(\mathbf{R})$ からそれ自身への同型、等距離写像であるから、 $g = \hat{\phi}$ なる $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ が存在する。さて評価式 (3.16) と (3.17) より $g = \prod P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})$ は ω に関する有界閉集合上で一様収束するので、 $g(\omega) = \hat{\phi}(\omega) \in C(\mathbf{R})$ となる。したがって $\hat{\phi}(0) = g(0) = \prod_{k=1}^{\infty} P(1) = 1$ となる。またツースケール関係 $\hat{\phi}(\omega) = P(z)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ については、 $\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = g\left(\frac{\omega}{2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} P\left(e^{-\frac{i\omega}{2^{k+1}}}\right)$ より

$$\begin{aligned}
P(e^{-\frac{i\omega}{2}})\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) &= P(e^{-\frac{i\omega}{2}}) \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^{k+1}}}) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \\
&= \hat{\phi}(\omega)
\end{aligned}$$

が成立する。

定理 3.7. 定理 3.6 と同じ仮定を設ける。さらに、

$$b := \inf b_j : j \geq 1 \tag{3.20}$$

なる b が $b < N - 1$ を満足するものとする。このとき (3.14) の極限関数 g は $L^2(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$ に属する。また定理 3.6 で存在を保証された $\hat{\phi} = g$ なる関数 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ は $\beta < N - b - 1$ なる任意の実数 β に対し $C^\beta(\mathbf{R})$ に属する。

[証明] 仮定のもとに $g \in L^2 \cap L^1$ であることは (3.15) および定理 3.6 の証明より明らか。 $m = [\beta]$, $\alpha = \beta - m$ とおき、 $\phi \in C^m(\mathbf{R})$ 、さらに $\phi \in C^{m+\alpha}(\mathbf{R})$ となることを示す。

定理 3.6 の不等式 (3.15) から

$$(1 + |\omega|)^m |\hat{\phi}(\omega)| \leq C_{n_0} (1 + |\omega|)^{m-N+b_{n_0}} \quad (3.21)$$

となっている。したがって、積分記号下で

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \hat{\phi}(\omega) d\omega$$

を m 回微分することができ、 $\phi \in C^m(\mathbf{R})$ かつ

$$\phi^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^m e^{ix\omega} \hat{\phi}(\omega) d\omega \quad (3.22)$$

が成立する。さて不等式

$$\begin{aligned} |e^{i(x+h)\omega} - e^{ix\omega}| &\leq \min(2, |h\omega|) \\ &\leq 2^{1-\alpha} |h\omega|^\alpha \\ &\leq 2|h|^\alpha (1 + |\omega|)^\alpha \end{aligned}$$

が成り立つから、これと (3.21)、(3.22) より

$$\begin{aligned} |\phi^{(m)}(x+h) - \phi^{(m)}(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^m |e^{i(x+h)\omega} - e^{ix\omega}| |\hat{\phi}(\omega)| d\omega \\ &\leq C_{n_0} \frac{|h|^\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\omega|)^{m+\alpha-N+b_{n_0}} d\omega \end{aligned}$$

となる。ここで $m + \alpha - N + b_{n_0} < -1$ だから上式右辺の積分は有限である。すなわち $\phi \in C^{m+\alpha}(\mathbf{R})$ である。

3.3 定理 2.6 の証明

主要結果の定理 2.6 を再掲載した上、その証明を行う。

定理 2.6 直和分解 $V_1 = V_0 \dot{+} W_0$ が成立するための十分条件は、連続関数 $\Delta_{P,Q}$ が単位円 $|z| = 1$ 上で 0 にならないことである。このとき、 Q によって構成される関数 (2.7) の族 $\{\psi(\cdot - k : k \in \mathbf{Z})\}$ は W_0 のリース基底となり、分解関係：

$$\phi(2x - l) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{g_{2k-l}\phi(x - k) + h_{2k-l}\psi(x - k)\}, \quad l \in \mathbf{Z} \quad (3.23)$$

がすべての $x \in \mathbf{R}$ に対して成立する。

[証明] 定理を証明するにあたり (2.12) の第 1 の等式は次の 2 つの等式

$$\begin{cases} P(z)G(z) + Q(z)H(z) &= 1, \\ P(z)G(-z) + Q(z)H(-z) &= 0, \quad |z| = 1 \end{cases} \quad (3.24)$$

と同値であり、第 2 式は下の 4 つの等式

$$\begin{cases} P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \\ P(z)H(z) + P(-z)H(-z) = 0, \\ G(z)Q(z) + G(-z)Q(-z) = 0, \\ Q(z)H(z) + Q(-z)H(-z) = 1, \quad |z| = 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

と同値であることに注意する。

$|z| = 1$ なるすべての z に対して $\Delta_{P,Q}(z) \neq 0$ と仮定する。これより考えている数列はすべて l^2 に属することになり、したがって、和の順序の入れ替えも許される。

(3.24) より

$$\begin{cases} P(z)(G(z) + G(-z)) + Q(z)(H(z) + H(-z)) = 1, \\ P(z)(G(z) - G(-z)) + Q(z)(H(z) - H(-z)) = 1, \quad |z| = 1 \end{cases}$$

となるが、これは (2.13) を使うと

$$\begin{cases} P(z) \sum_k g_{2k} z^{2k} + Q(z) \sum_k h_{2k} z^{2k} = 1, \\ P(z) \sum_k g_{2k-1} z^{2k-1} + Q(z) \sum_k h_{2k-1} z^{2k-1} = 1, \quad |z| = 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

と書ける。 $z = e^{-i\frac{\omega}{2}}$ とおき、(3.26) の等式にそれぞれ $\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$ 、 $z\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$ を掛ければ

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = \sum_k (g_{2k} z^{2k} P(z) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) + h_{2k} z^{2k} Q(z) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})), \\ \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) e^{-i\frac{\omega}{2}} = \sum_k (g_{2k-1} z^{2k} P(z) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) + h_{2k-1} z^{2k} Q(z) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})) \end{cases}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_k p_k \phi(2x - k) \\ \psi(x) &= \sum_k q_k \psi(2x - k) \end{aligned} \quad (3.27)$$

をフーリエ変換して得られる関係式を用いれば、

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = \sum_k (g_{2k} z^{2k} \hat{\phi}(\omega) + h_{2k} z^{2k} \hat{\psi}(\omega)), \\ \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) e^{-i\frac{\omega}{2}} = \sum_k (g_{2k-1} z^{2k} \hat{\phi}(\omega) + h_{2k-1} z^{2k} \hat{\psi}(\omega)) \end{cases} \quad (3.28)$$

と同値である。(3.28) の両辺をフーリエ逆変換すれば

$$\begin{cases} 2\phi(2x) = \sum_k (g_{2k} \phi(x - k) + h_{2k} \psi(x - k)), \\ 2\phi(2x - 1) = \sum_k (g_{2k-1} \phi(x - k) + h_{2k-1} \psi(x - k)) \end{cases}$$

を得る。これは式 (3.23) と同値である。

さて、 $\{g_k\}, \{h_k\} \in l^2$ であること、および

$$V_1 = \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\phi(2 \cdot -k) : k \in \mathbf{Z})$$

であることを考えれば、上に示した (3.23) より $V_1 \subset V_0 + W_0$ であることになる。 V_0, W_0 は V_1 の部分空間だから、

$$V_1 = V_0 + W_0$$

となる。これが直和であることを示すために

$$\sum_k a_k \phi(x-k) + \sum_k b_k \psi(x-k) = 0$$

を考える。ここに $\{a_k\}, \{b_k\} \in l^2$ である。(3.27) のツースケール関係を用いれば

$$\sum_l \left(\sum_k a_k p_{l-2k} + \sum_k b_k q_{l-2k} \right) \phi(2x-l) = 0$$

となり、 $\{\phi(2 \cdot -k) : k \in \mathbf{Z}\}$ が V_1 のリース基底であることより

$$\sum_k a_k p_{l-2k} + \sum_k b_k q_{l-2k} = 0, \quad l \in \mathbf{Z} \quad (3.29)$$

を得る。

(3.29) の両辺のシンボルを考える。 A, B をそれぞれ $\{a_k\}, \{b_k\}$ のシンボルとして

$$A(z^2)P(z) + B(z^2)Q(z) = 0 \quad (3.30)$$

となる。ここで z を $-z$ と置き換えれば、(3.30) は $A(z^2), B(z^2)$ を未知とした連立方程式

$$\begin{cases} P(z)A(z^2) + Q(z)B(z^2) & = 0, \\ P(-z)A(z^2) + Q(-z)B(z^2) & = 0 \end{cases}$$

となる。ここに係数行列は $M_{P,Q}(z)$ であり、これは仮定より $|z| = 1$ なる z に対して正則行列である。したがって $A(z^2), B(z^2)$ は 0 でなくてはならず、ゆえに l^2 -列 $\{a_k\}, \{b_k\}$ も 0 である。このことは $V_0 \cap W_0 = \{0\}$ を意味し、 $V_1 = V_0 + W_0$ となる。

最後に族 $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ が W_0 のリース基底であることを示す。そのために定理 3.2 を用いる。

特に $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ は V_0 のリース基底となっているから

$$0 < A \leq \sum_k \left| \hat{\phi}(\omega + 2\pi k) \right|^2 \leq B < \infty, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (3.31)$$

が成立している。また (2.7) をフーリエ変換して和をつくれれば、 $z = e^{-i\frac{\omega}{2}}$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_k |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 &= \sum_k |Q(e^{-i\frac{\omega}{2} + \pi k})|^2 \\ &= |Q(z)|^2 \sum_k \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 + |Q(-z)|^2 \sum_k \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \right|^2 \end{aligned}$$

となる。この式に (3.31) を用いれば

$$\begin{aligned} A\{|Q(z)|^2 + |Q(-z)|^2\} &\leq \sum_k |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 \\ &\leq B\{|Q(z)|^2 + |Q(-z)|^2\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

を得る。 $Q \in \mathcal{W}$ だから Q は $|z| = 1$ 上で連続であり、

$$B' := 2 \max_{|z|=1} |Q(z)| < \infty \quad (3.33)$$

となる。一方

$$\Delta_{P,Q}(z) = \det \begin{bmatrix} P(z) & Q(z) \\ P(-z) & Q(-z) \end{bmatrix} \neq 0, \quad |z| = 1$$

より、 $Q(z)$ と $Q(-z)$ が同時に同じ点 z ($|z| = 1$) において 0 になることはない。したがって、再び $Q(z)$ の $|z| = 1$ 上での連続性より

$$A' := 2 \min_{|z|=1} (|Q(z)|^2 + |Q(-z)|^2) > 0 \quad (3.34)$$

である。以上 (3.32)、(3.33)、(3.34) より

$$AA' \leq \sum_k \left| \hat{\psi}(\omega + 2\pi k) \right|^2 \leq BB', \quad \omega \in \mathbf{R}$$

が成立することになり、結局 $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ は W_0 のリース基底である。

3.4 ウェーブレットとその共役

この節では $L^2(\mathbf{R})$ の分解が ウェーブレット分解となるための条件を調べる。

定義 3.8. ツースケールシンボル $P = P_\phi$ と $G^* = G_\phi^*$ が互いに 共役 であるとは、等式

$$P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \quad |z| = 1$$

が成立することである。ただし、

$$G^*(z) := \overline{G(z)} = \overline{G\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad |z| = 1$$

とする。

2つのローラン級数 Q と H を、それからつくられる正則行列 $M_{P,Q}(z)$ と $M_{G,H}^T(z)$ が $|z| = 1$ 上で互いに逆行列となるように選べば、つまり

$$M_{P,Q}(z)M_{G,H}^T(z) = M_{G,H}^T(z)M_{P,Q}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |z| = 1 \quad (3.35)$$

となるようにとれば、(3.25) と上式より

$$\begin{cases} P(z)H(z) + P(-z)H(-z) & = 0, \\ G(z)Q(z) + G(-z)Q(-z) & = 0, \\ Q(z)H(z) + Q(-z)H(-z) & = 1, \quad |z| = 1 \end{cases} \quad (3.36)$$

を得る。もちろん、(3.35) はまた

$$\begin{cases} P(z)G(z) + Q(z)H(z) & = 1, \\ P(-z)G(z) + Q(-z)H(z) & = 0, \quad |z| = 1 \end{cases} \quad (3.37)$$

と同値である。この点に関連して次の定理が成立する。

定理 3.9. P と G^* は互いに共役なツースケールシンボルであるとする。このとき \mathcal{W} 内のローラン多項式 Q と H が (3.35) を満足するための必要十分条件は G, H がそれぞれ以下のような形で書けることである。

$$Q(z) = z^{-1}G(-z)K(z^2) \quad \text{かつ} \quad H(z) = zP(-z)K^{-1}(z^2) \quad (3.38)$$

ただし $K \in \mathcal{W}$ で、 $|z| = 1$ 上では $K(z) \neq 0$ である。

[証明] Q, H が (3.38) であれば、(3.35) が成立する。

逆を示すために (3.35) およびそれと同値な (3.37) を用いる。Cramer の公式より G, H は P, Q によって

$$G(z) = \frac{Q(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)}, \quad H(z) = \frac{-P(-z)}{\Delta_{P,Q}(z)}, \quad |z| = 1 \quad (3.39)$$

と表される。ただし $\Delta(z) = P(z)Q(-z) - P(-z)Q(z) \neq 0$ ($|z| = 1$) である。 $\Delta_{P,Q}(-z) = -\Delta_{P,Q}(z)$ であるから

$$K(z^2) = z\Delta_{P,Q}(-z), \quad |z| = 1 \quad (3.40)$$

とおけば、定理 2.5 より $K \in \mathcal{W}$ であり、 $|z| = 1$ に対して $K(z) \neq 0$ である。このようにとった K に対し (3.38) が成立することは、(3.39)、(3.40) より明らか。

さらに詳しく 2 つのアドミシブルなツースケールシンボル P と G^* を調べる。

定義 3.4 より

$$\begin{cases} P(z) &= \left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z), \\ G^*(z) &= \left(\frac{1+z}{2}\right)^{\tilde{N}} \tilde{S}(z), \quad |z| = 1 \end{cases} \quad (3.41)$$

のように書ける。 N, \tilde{N} は正整数で、 $S(1) = \tilde{S}(1) = 1$ である。また $S(e^{-i\omega}) \in C^\alpha(\mathbf{R})$ 、 $\tilde{S}(e^{-i\omega}) \in C^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{R})$ ($0 < \alpha, \tilde{\alpha} < 1$) とする。(3.41) の S および \tilde{S} はさらに加えて

$$\begin{cases} B &:= \max_{|z|=1} |S(z)| < 2^{N-\frac{1}{2}}, \\ \tilde{B} &:= \max_{|z|=1} |\tilde{S}(z)| < 2^{\tilde{N}-\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.42)$$

を満足するものと仮定する。また集合 A の特性関数を χ_A で表すものとする。

補題 3.10. P, Q は (3.41) で与えられるツースケールシンボルとし、 S と \tilde{S} は (3.42) を満たしているとする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{[-2^n\pi, 2^n\pi]}(\omega) \prod_{k=1}^n P(e^{\frac{i\omega}{2^k}})G(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) - \prod_{k=1}^n P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})G(e^{-i\omega})| = 0 \quad (3.43)$$

が成立する。

[証明] 適当な $\eta > 0$ に対して

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) G(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \leq \frac{C}{(1+|\omega|)^{1+\eta}}, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (3.44)$$

が成立することをみていく。

任意の正整数 n_0 と $2^{n_0} < \frac{|\omega|}{\pi} \leq 2^{n_0+1}$ なるすべての ω に対し、仮定 (3.42) の第 1 式より適当な $\eta_1 > 0$ を選べば

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{n_0} S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| &\leq B^{n_0} \\ &\leq C_1 \left(1 + \frac{|\omega|}{\pi}\right)^{\log_2 B} \\ &\leq C'_1 (1+|\omega|)^{\log_2 B} \\ &\leq C'_1 (1+|\omega|)^{N-\frac{1}{2}-\eta_1} \end{aligned}$$

となる。また任意の整数 $K > n_0$ にたいしてはアドミシブル条件より

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=n_0+1}^K S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| &= \prod_{k=n_0+1}^K |1 + S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) - 1| \\ &\leq \prod_{k=n_0+1}^K \left| 1 + O\left(\frac{|\omega|^\alpha}{2^{k\alpha}}\right) \right| \\ &\leq C_2 \end{aligned}$$

である。したがって

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \leq C_1 C_2 (1+|\omega|)^{N-\frac{1}{2}-\eta_1}$$

となり

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| &\leq C \left| \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} \right|^N (1+|\omega|)^{N-\frac{1}{2}-\eta_1} \\ &\leq C (1+|\omega|)^{-\frac{1}{2}-\eta_1} \end{aligned}$$

を得る。 G についても同様の議論をすれば適当な $\eta_2 > 0$ に対し上と同様の評価が従い、 $\eta = \eta_1 + \eta_2$ とおけば (3.44) を得る。

次に定数 $C > 0$ と $\eta > 0$ が存在して、十分大きな正整数 n と $|\omega| \leq 2^n \pi$ なる任意の ω に対し

$$\left| \prod_{k=1}^n P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) G(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \leq \frac{C}{(1+|\omega|)^{1+\eta}} \quad (3.45)$$

が成立すること示す。上と同様に考えれば

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| &= C \left| \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{2^{n+1} \sin(\frac{\omega}{2^{n+1}})} \right|^N \left| \prod_{k=1}^n S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \\ &\leq C (1+|\omega|)^{-\frac{1}{2}-\eta_1} \end{aligned}$$

を得る。ただし、ここで $|\omega| \leq \frac{\pi}{2}$ に対して成立する不等式 $\frac{2}{\pi}|\omega| \leq |\sin \omega| \leq |\omega|$ を使った。 G についても同様であり、(3.45) が成立する。

上記をもとにして (3.43) を示す。まず (3.44) より関数

$$\prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) G(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})$$

は $L^1(\mathbf{R})$ に属することに注意する。 $\epsilon > 0$ を任意に与え $M > 0$ を

$$\int_{|\omega|>M} (1+|\omega|)^{-1-2\eta} d\omega < \epsilon$$

となるようにとる。

(3.43) の積分を $|\omega| \leq M$ と $|\omega| > M$ の 2 つの和に分ける。 $|\omega| \leq M$ 上の積分に関しては、その被積分関数は $n \rightarrow \infty$ のとき一様に 0 になる。また、 $|\omega| > M$ 上の積分に関しては、その積分を 2 つに分け、一方は (3.44) で他方は (3.45) で評価すれば、 $|\omega| > M$ での積分を ϵ に応じていくらでも小さくできる。したがって (3.43) が成り立つ。

定義 3.11. 2 つのスケーリング関数 ϕ と $\tilde{\phi}$ はそれぞれ $L^2(\mathbf{R})$ の多重解像度解析 $\{V_j\}$ 、 $\{\tilde{V}_j\}$ を生成するものとする。このようなスケーリング関数 ϕ 、 $\tilde{\phi}$ が共役なスケーリング関数であるとは、これらが条件

$$\langle \phi(\cdot - j), \tilde{\phi}(\cdot - k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-j) \overline{\tilde{\phi}(x-k)} dx = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbf{Z} \quad (3.46)$$

を満たすときをいう。

次の定理で、それぞれ互いに共役な 2 つのスケーリング関数と、 2 つのアドミシブルなツースケールシンボルとの間の関係を与える。

定理 3.12. $P = P_\phi$ 、 $G^* = G_{\tilde{\phi}^*}$ を (3.41) で与えられるアドミシブルなツースケールシンボルとする。

また ϕ 、 $\tilde{\phi}$ はそのフーリエ変換が

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}), \\ \hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} G^*(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \end{cases} \quad (3.47)$$

与えられるスケーリング関数とする。このとき、もし ϕ と $\tilde{\phi}$ が共役なスケーリング関数であれば、 P と G^* は定義 3.8 の意味で互いに共役となる。逆に、もし P と G^* が互いに共役で (3.42) を満たすならば、 ϕ と $\tilde{\phi}$ は共役なスケーリング関数である。

[証明] ϕ 、 $\tilde{\phi}$ を共役なスケーリング関数とする。(3.46) とパーセバルの等式より、各 $n \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} \delta_{n,0} &= \langle \phi, \tilde{\phi}(\cdot - n) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega)} e^{in\omega} d\omega \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega)} e^{in\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\phi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\tilde{\phi}}(\omega + 2\pi k)} \right) e^{in\omega} d\omega \end{aligned}$$

となる。この右辺は上式内 () の関数のフーリエ係数だから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\phi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)} = 1, \quad a.e. \quad (3.48)$$

が成立する。上の $\delta_{n,0}$ についての式で $z = e^{\frac{i\omega}{2}}$ とおき、 P 、 G^* のフーリエ変換を考え、さらに (3.48) を用いれば

$$\begin{aligned} \delta_{n,0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(z) \overline{G^*(z)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{in\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_k \left[P(z) G(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \overline{\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right)} \right. \\ &\quad \left. + P(-z) G(-z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \overline{\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right)} \right] e^{in\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [P(z)G(z) + P(-z)G(-z)] e^{in\omega} d\omega \end{aligned}$$

を得る。 P 、 G は $|z| = 1$ 上で連続だから上式より

$$P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \quad |z| = 1$$

となり、 P_ϕ と G_ϕ^* は互いに共役である。

逆を証明するために $j \in \mathbf{Z}$ を 1 つ固定し、任意の正整数 n に対し

$$I_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \left(\prod_{k=1}^n P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) G(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right) e^{ij\omega} d\omega \quad (3.49)$$

を考える。 $x = 2^{-n}\omega$ によって変数変換をすると

$$\begin{aligned} I_n &= 2^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\prod_{k=1}^n P(e^{-i2^{n-k}x}) G(e^{-i2^{n-k}x}) \right) e^{ij2^n x} dx \\ &= 2^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(e^{-i2^{n-k}x}) G(e^{-i2^{n-k}x}) \right) \\ &\quad \times [P(e^{-ix}G(e^{-ix}) + P(-e^{-ix}G(-e^{-ix})))] e^{ij2^n x} dx \end{aligned} \quad (3.50)$$

となる。ここで、 P と G^* の共役性を使い、さらに $y = 2x$ と変換すれば

$$\begin{aligned} I_n &= 2^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(e^{-i2^{n-k-1}y}) G(e^{-i2^{n-k-1}y}) \right) e^{ij2^{n-1}y} dy \\ &= 2^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(e^{-i2^{(n-1)-k}y}) G(e^{-i2^{(n-1)-k}y}) \right) e^{ij2^{n-1}y} dy \end{aligned} \quad (3.51)$$

が従う。(3.50) と (3.51) を比較すれば $I_n = I_{n-1}$ を得る。これは任意の正整数 n について成立するから

$$I_n = I_{n-1} = \cdots = I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\omega} d\omega = \delta_{j,0} \quad (3.52)$$

となる。\$I_n\$ に補題 3.10 を適用すれば、(3.52) より

$$\begin{aligned}
\langle \phi, \tilde{\phi}(\cdot - j) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega)} e^{ij\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}} G(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})) \right) e^{ij\omega} d\omega \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \\
&= I_0 \\
&= \delta_{j,0}
\end{aligned}$$

を得る。これを平行移動すれば (3.46) が従う。

(3.38) を満たす関数のクラスから任意に \$Q, H\$ を選ぶ。定理 3.9 より行列 \$M_{P,Q}, M_{G^*,H^*}\$ は \$|z| = 1\$ 上で正則行列である。したがって、定理 2.6 を適用することができる。特に関数

$$\begin{cases} \psi(x) &:= \sum_k q_k \phi(2x - k), \\ \tilde{\psi}(x) &:= \sum_k \overline{h_k} \tilde{\phi}(2x - k) \end{cases} \quad (3.53)$$

を考える。ここに

$$\begin{cases} Q(z) &:= \frac{1}{2} \sum_k q_k z^k, \\ H^*(z) &:= \frac{1}{2} \sum_k \overline{h_k} z^k \end{cases}$$

である。また

$$\begin{cases} \psi_{j,k} &:= 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -k), \\ \tilde{\psi}_{j,k} &:= 2^{\frac{j}{2}} \tilde{\psi}(2^j \cdot -k) \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} W_j &:= \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \langle \psi_{j,k} : k \in \mathbf{Z} \rangle, \\ \tilde{W}_j &:= \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \langle \tilde{\psi}_{j,k} : k \in \mathbf{Z} \rangle \end{cases}$$

とおき、定理 2.6 を使えば

$$\begin{cases} V_{j+1} &= V_j \dot{+} W_j, \\ \tilde{V}_{j+1} &= \tilde{V}_j \dot{+} \tilde{W}_j, \quad j \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

を得る。ここに \$V_j, \tilde{V}_j\$ は

$$\begin{cases} V_j &:= \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \langle \phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z} \rangle, \\ \tilde{V}_j &:= \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \langle \tilde{\phi}_{j,k} : k \in \mathbf{Z} \rangle \end{cases}$$

であり、

$$\begin{cases} \phi_{j,k} &:= 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j \cdot -k), \\ \tilde{\phi}_{j,k} &:= 2^{\frac{j}{2}} \tilde{\phi}(2^j \cdot -k) \end{cases}$$

である。ただし \$\phi, \tilde{\phi}\$ はそれぞれツースケールシンボルが \$P = P_\phi, G^* = G_{\tilde{\phi}}^*\$ となるスケーリング関数である。

次にアドミシブルなツースケールシンボル \$P\$ と \$G^*\$ が互いに共役であれば、直交性条件も満たすことを示す。

定理 3.13. $P = P_\phi$ 、 $G^* = G_{\tilde{\phi}}^*$ は (3.42) を満足するアドミシブルなツースケールシンボルで、さらにこれらは互いに共役であるとする。するとクラス (3.38) から任意に選んだ $Q, H \in \mathcal{W}$ に対して、(3.47) すなわち、

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega) &= \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}), \\ \hat{\tilde{\phi}}(\omega) &= \prod_{k=1}^{\infty} G^*(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \end{cases}$$

と (3.53) すなわち、

$$\begin{cases} \psi(x) &:= \sum_k q_k \phi(2x - k), \\ \tilde{\psi}(x) &:= \sum_k \bar{h}_{-k} \tilde{\phi}(2x - k) \end{cases}$$

で定義される $\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi}$ は

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbf{Z} \quad (3.54)$$

および

$$\begin{cases} \langle \phi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle = 0, \\ \langle \tilde{\phi}_{j,k}, \psi_{j,l} \rangle = 0, \end{cases} \quad j, k, l \in \mathbf{Z} \quad (3.55)$$

を満たす。すなわち、すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対し $V_j \perp \tilde{W}_j$ 、 $\tilde{V}_j \perp W_j$ である。

[証明] まず (3.54) で $j = l$ の場合を考える。(3.36) の第 3 式

$$Q(z)H(z) + Q(-z)H(-z) = 1, \quad |z| = 1$$

と、(3.48) の

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)} = 1, \quad a.e.$$

から、 $z = e^{-\frac{i\omega}{2}}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,m} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega) \overline{\hat{\tilde{\psi}}(\omega)} e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(z) \overline{H^*(z)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_l \int_0^{2\pi} \left[Q(e^{-i(\frac{\omega}{2} + \pi l)}) H(e^{i(\frac{\omega}{2} + \pi l)}) \right. \\ &\quad \left. \times \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi l\right) \overline{\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi l\right)} \right] e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_l \left[Q(z) H(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi l\right) \overline{\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi l\right)} \right. \\ &\quad \left. + Q(-z) H(-z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi l\right) \overline{\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi l\right)} \right] e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [Q(z)H(z) + Q(-z)H(-z)] e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-m)\omega} d\omega \\ &= \delta_{k,m} \end{aligned}$$

を得る。

次に一般の場合を考える。(3.36)の第1式、第2式を用いて上と同様の議論をすると(3.55)を得る。したがって、

$$V_{j\perp}\tilde{W}_j, \quad \tilde{V}_{j\perp}W_j, \quad j \in \mathbf{Z} \quad (3.56)$$

である。

$j < l$ ならば、

$$\psi_{j,k} \in W_j \subset V_{j+1} \subset V_l$$

だから、(3.56)より

$$\langle \phi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,m} \rangle = 0, \quad k, m \in \mathbf{Z}$$

である。

$j > l$ に対しても同様にして、(3.54)が成立することがわかる。

定理 3.14. 定理 3.13 の仮定のもとに、2つの関数 $\psi \in W_0$ と $\tilde{\psi} \in \tilde{W}_0$ は互いに共役なウェーブレットである。

すべての関数 $f \in L^2(\mathbf{R})$ は

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x), \\ f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}(x) \end{cases}$$

のような一意的なウェーブレット級数展開を持つことになる。ここに展開係数はそれぞれ基本ウェーブレット $\tilde{\psi}$ と ψ に関する積分ウェーブレット変換の点

$$(b, a) = \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right)$$

おける値で与えられる。

そこで関数 f から積分ウェーブレット変換の値を見出すための、また積分ウェーブレット変換の値から f を再構成するための効果的なアルゴリズムをつくることが重要になる。積分ウェーブレット変換の値 $\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$ の計算にツースケール列 $\{\bar{g}_{-n}\}$ 、 $\{\bar{h}_{-n}\}$ を利用できる。この計算スキームは定理 3.13 の分解関係

$$\phi(2x-l) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{g_{2k-l}\phi(x-k) + h_{2k-l}\psi(x-k)\}, \quad l \in \mathbf{Z}$$

によるものであり、分解アルゴリズムと呼ばれる。一方、ツースケール列 $\{p_n\}$ 、 $\{q_n\}$ は、積分ウェーブレット変換の値 $\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$ から f を再構成するために使える。この計算スキームは、ツースケール関係

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x-k)$$

$$\psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x - k)$$

によるものであり、再構成アルゴリズムと呼ばれる。基本ウェーブレットとして $\tilde{\psi}$ の代わりに、 ψ を使おうとすれば、分解アルゴリズムで $\{p_n\}$ 、 $\{q_n\}$ を、再構成アルゴリズムにおいて $\{\bar{g}_{-n}\}$ 、 $\{\bar{h}_{-n}\}$ を用いればよい。

すなわち分解、再構成に関して、組

$$(\{\bar{g}_{-n}\}, \{\bar{h}_{-n}\}) \text{ と } (\{p_n\}, \{q_n\})$$

のもつ役割は、積分ウェーブレット変換の情報

$$\{(W_{\tilde{\psi}}f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right) : j, k \in \mathbf{Z}\}$$

を積分ウェーブレット変換の情報

$$\{(W_{\psi}f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right) : j, k \in \mathbf{Z}\}$$

で置き代えるさいに、交換可能である。

以下では基本ウェーブレットとして $\tilde{\psi}$ を用いた積分ウェーブレット変換 (2.7) のみを調べることにする。 $f \in L^2(\mathbf{R})$ とする。 $N \in \mathbf{Z}$ に対し f の V_N への射影を f_N と書く。この V_N への射影は $L^2(\mathbf{R})$ の直交射影とは限らない。 V_N を標本空間、 f_N を f の V_N でのデータ と考えることができる。

$$\begin{aligned} V_N &= W_{N-1} + V_{N-1} \\ &= \dots \\ &= W_{N-1} + \dots + W_{N-M} + V_{N-M} \quad (M \text{ は正整数}) \end{aligned}$$

であるから、 f_N は次のように一意的に分解される。

$$f_N(x) = g_{N-1}(x) + g_{N-2}(x) + \dots + g_{N-M}(x) + f_{N-M}(x) \quad (3.57)$$

ただし

$$\begin{cases} g_j(x) & \in W_j, \quad j = N - M, \dots, N - 1 \\ f_{N-M}(x) & \in V_{N-M} \end{cases}$$

である。次に

$$\begin{cases} f_j(x) &= \sum_k c_k^j \phi(2^j x - k), \\ \mathbf{c}^j &= \{c_k^j\}, \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\begin{cases} g_j(x) &= \sum_k d_k^j \psi(2^j x - k), \\ \mathbf{d}^j &= \{d_k^j\}, \quad k \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (3.59)$$

と表すことにする。すると分解 (3.57) は (3.58) と (3.59) の列 \mathbf{c}^j と \mathbf{d}^j によって一意的に決定されることになる。ここで d_k^j は

$$d_k^j = (W_{\tilde{\psi}}f_N)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right), \quad j, k \in \mathbf{Z}$$

のように、 $\tilde{\psi}$ を基本ウェーブレットとした f_N の積分ウェーブレット変換の値である。分解 (3.57) はデータ f_N に依存する。以下に述べるウェーブレットの分解、再構成のスキームにおいては、 $f_j(x)$ 、 $g_j(x)$ のデジタル表現 \mathbf{c}^j 、 \mathbf{d}^j を用いる。

$$\begin{cases} a_n & := \frac{1}{2}g_{-n}, \\ b_n & := \frac{1}{2}h_{-n} \end{cases}$$

とする。ここに $\{\bar{g}_{-n}\}$ 、 $\{\bar{h}_{-n}\}$ はそれぞれツースケールシンボル $G^* = G_{\phi}^*$ 、 H^* に対応するツースケール列である。すると、定理 2.6 の分解関係 (3.23) は

$$\phi(2x-l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{a_{l-k}\phi(x-k) + b_{l-2k}\psi(x-k)\}, \quad l \in \mathbf{Z} \quad (3.60)$$

となる。

(i) 分解アルゴリズム

$$\begin{cases} c_n^{j-1} & = \sum_l a_{l-2k} c_l^j, \\ b_n & = \sum_l b_{l-2k} c_l^j \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{d}^{N-1} & & \mathbf{d}^{N-2} & & \mathbf{d}^{N-M} \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ \mathbf{c}^N & \longrightarrow & \mathbf{c}^{N-1} & \longrightarrow & \mathbf{c}^{N-2} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \mathbf{c}^{N-M} \end{array}$$

[証明] 分解関係 (3.60) を用いれば、

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_l c_l^j \phi(2^j x - l), \\ &= \sum_l c_l^j \left[\sum_k a_{l-2k} \phi(2^{j-1} x - k) + b_{l-2k} \psi(2^{j-1} x - k) \right] \\ &= \sum_k \left\{ \sum_l a_{l-2k} c_l^j \right\} \phi(2^{j-1} x - k) + \sum_k \left\{ \sum_l b_{l-2k} c_l^j \right\} \psi(2^{j-1} x - k) \end{aligned}$$

となる。分解 $f_j(x) = f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x)$ より、

$$\begin{aligned} &\sum_k \left\{ \sum_l a_{l-2k} c_l^j - c_k^{j-1} \right\} \phi(2^{j-1} x - k) \\ &+ \sum_k \left\{ \sum_l b_{l-2k} c_l^j - d_k^{j-1} \right\} \psi(2^{j-1} x - k) = 0 \end{aligned}$$

となる。これより、 $\{\phi_{j-1,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ 、 $\{\psi_{j-1,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ の l^2 -線形独立性と、 $V_{j-1} \cap W_{j-1} = \{0\}$ であることを考えれば (3.61) を得る。

(ii) 再構成アルゴリズム

$$c_k^j = \sum_l \left[p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1} \right] \quad (3.62)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{d}^{N-M} & & \mathbf{d}^{N-M-1} & & & & \mathbf{d}^{N-1} \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
\mathbf{c}^{N-M} & \longrightarrow & \mathbf{c}^{N-M-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathbf{c}^{N-M} & \longrightarrow & \mathbf{c}^N
\end{array}$$

[証明] ツースケール関係 (3.27)、

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \sum_k p_k \phi(2x - k) \\
\psi(x) &= \sum_k q_k \psi(2x - k)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) &= \sum_l \left[c_l^{j-1} \phi(2^{j-1}x - l) + d_l^{j-1} \psi(2^{j-1}x - l) \right] \\
&= \sum_l \left[c_l^{j-1} \sum_k p_k \phi(2^j x - 2l - k) + d_l^{j-1} \sum_k q_k \phi(2^j x - 2l - k) \right] \\
&= \sum_l \sum_k c_l^{j-1} p_{k-2l} + d_l^{j-1} q_{k-2l} \phi(2^j x - k) \\
&= \sum_k \left\{ \sum_l \left[p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1} \right] \phi(2^j x - k) \right\}
\end{aligned}$$

となる。 $f_j(x) = f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x)$ だから、 $f_j(x)$ に対する式 (3.58) と $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ が l^2 -線形独立であることを考えれば、上式より (3.62) を得る。

分解と再構成アルゴリズムは、分解のさいにはダウンサンプリングが、再構成についてはアップサンプリングがなされるという点を除けば、ともに移動平均スキームとなっている。ダウンサンプリングに関しては出力列の項の 1 つおきにとる。すなわち (3.61) において偶数項をのこし、それを $\frac{1}{2}$ すればよい。アップサンプリングに関しては、移動平均スキームを適用する前に、入力列の連続する 2 項の間に 0 を入れればよい。すなわち (3.62) で、入力列 $\{c_l^{j-1}\}$ 、 $\{d_l^{j-1}\}$ の添字を 2 倍し、奇数添字の項として 0 を加えたものを新たな入力列とすればよい。

3.5 コンパクトな台をもつウェーブレット

$\{\psi_{j,k}\}$ が $\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = 0$, $j \neq l$ を満たすとき、 ψ は半直交ウェーブレットであるという。ここでは、まず半直交ウェーブレットの構造を調べ、次いで直交ウェーブレットについて考察する。
 ψ を任意の半直交ウェーブレット、 $\tilde{\psi}$ をその共役とし、 W_j 、 \tilde{W}_j ($j \in \mathbf{Z}$) をそれぞれ ψ 、 $\tilde{\psi}$ の生成する空間とすれば、 $W_j = \tilde{W}_j$ ($j \in \mathbf{Z}$) である。したがって

$$V_j := \dots + W_{j-2} + W_{j-1} \tag{3.63}$$

より $V_j = \tilde{V}_j$ ($j \in \mathbf{Z}$) である。すなわちスケーリング関数 ϕ とその共役 $\tilde{\phi}$ は同じ多重解像度解析を生成することになる。定理 3.12 の証明より、 ϕ の一意的な共役 $\tilde{\phi}$ が

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2} \tag{3.64}$$

で与えられる。

次にスケーリング関数として有限なツースケール列を考える。すなわち

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^N p_n \phi(2x - n), \quad p_0, p_N \neq 0$$

を考える。

任意の ϕ に対し、自己相関関数

$$F_\phi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x+y)\overline{\phi(y)}dy$$

とし、列 $\{F_\phi(k)\}$ のシンボルを

$$E_\phi(z) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} F_\phi(k)z^k$$

とする。 ϕ に関する一般化されたオイラー・フロベニウス、ローラン多項式：

$$\begin{aligned} E(z) &= E_\phi(z) \\ &:= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k+y)\overline{\phi(y)}dy \right\} z^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2, \quad z = e^{-\frac{i\omega}{2}} \end{aligned}$$

は $|z| = 1$ 上に零点も極も持たない。このことと (3.64) より

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{E(z^2)} \hat{\phi}(\omega) \tag{3.65}$$

と書ける。したがってコンパクトな台をもつ ϕ スケーリング関数の共役 $\tilde{\phi}$ は、指数関数的に減衰はするけれども、 $E(z)$ が正定数の場合以外はコンパクトな台をもたない。

次に $\tilde{\phi}$ のツースケールシンボル $G^* = G_{\tilde{\phi}}^*$ を考察する。(3.65) と ϕ のツースケール関係を用いれば、

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\omega) &= \frac{1}{E(z^2)} \hat{\phi}(\omega) \\ &= \frac{1}{E(z^2)} P(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{E(z)}{E(z^2)} P(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

となるから、これより

$$G^*(z) = \frac{E(z)}{E(z^2)} P(z), \quad z = e^{\frac{i\omega}{2}} \tag{3.66}$$

を得る。

さて定理 3.9 と (3.66) より、スケーリング関数 ϕ に対する任意のウェーブレット ψ のツースケールシンボル Q は

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^{-1} G(-z) K(z^2) \\ &= z^{-1} \frac{E(-z) \overline{P(-z)}}{E(z^2)} K(z^2) \end{aligned} \tag{3.67}$$

で与えられる。ここに $K \in \mathcal{W}$ は $K(z) \neq 0 (|z| = 1)$ である。これより、 ψ の選び方についてはいくらかの自由度がある。特に $K \in \mathcal{W} (K(z) \neq 0 (|z| = 1))$ を多項式 Q の次数が最小になるように選べば、ウェーブレットが最小な台をもつ。

E は $|z| = 1$ 上に零点も極ももたないローラン多項式だから、(3.67) の K として $K(z) = -zE(z)$ とおくことができる。するとコンパクトな台をもつ半直交ウェーブレット ψ と、その共役 $\tilde{\psi}$ のツースケールシンボル Q と H^* は

$$\begin{cases} Q(z) &= -zE(-z)\overline{P(-z)}, \\ H^*(z) &= -z^{-1}\frac{P(-z)}{E(z^2)} \end{cases}$$

で与えられることになる。 E が定数でなければ、共役ウェーブレット $\tilde{\psi}$ は指数関数的に減衰はするけれどもコンパクトな台はもたない。以上をまとめると次の定理を得る。

定理 3.15. $\{p_n\}$ はスケーリング関数 ϕ のツースケール列で、有限、対称かつ実数値であるとする。 $\psi, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ をそれぞれ、半直交ウェーブレット、 ϕ の共役なスケーリング関数、 ψ の共役ウェーブレットとし、ツースケールシンボルをそれぞれ Q, G^*, H^* とする。このとき ϕ と ϕ に対応する半直交ウェーブレット ψ はコンパクトな台をもつ。また $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\psi}$ は指数関数的に減衰する。

コンパクトな台をもつスケーリング関数に対応する直交ウェーブレット ψ を考える。もし ϕ のツースケール関係が

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^N p_n \phi(2x - n), \quad p_0, p_N \neq 0$$

で与えられるなら、直交ウェーブレット ψ のツースケール関係は

$$\psi(x) = \sum_{n=-N+1}^1 (\overline{P_{1-n}}) \phi(2x - n)$$

となる。

定理 3.16. $P = P_\phi, G^* = G_{\tilde{\phi}^*}$ は互いに共役なアドミシブルなツースケールローラン多項式シンボルとし、 P は

$$P(z) = z^m \overline{P(z)}, \quad |z| = 1 \tag{3.68}$$

を満たすとする。このとき $G_1(z)$ を

$$G_1(z) := \frac{1}{2} \{G(z) + z^{-m} G^*(z)\}$$

とおけば、 G_1 も G と同じ共役関係:

$$P(z)G_1(z) + P(-z)G_1(-z) = 1, \quad |z| = 1$$

を満足する。

さらに

$$G_1(z) = z^{-m} \overline{G_1(z)}, \quad |z| = 1 \quad (3.69)$$

$$G_1^*(z) = z^m \overline{G_1^*(z)}, \quad |z| = 1 \quad (3.70)$$

が成立する。

[証明] $|z| = 1$ に対し

$$\begin{aligned} G_1^*(z) &= \overline{G_1(z)} \\ &= \frac{1}{2} \{ \overline{G(z)} + z^m \overline{G^*(z)} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ G(z)^* + z^m G(z) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ G(z) + z^{-m} G^*(z) \} z^m \\ &= z^m G_1(z) \\ &= z^m \overline{G_1^*(z)} \end{aligned}$$

となり (3.70) が成立する。すなわち (3.69) が成立する。

次に (3.68) と

$$P(z)G(z) + P(-z)G(-z) = 1, \quad |z| = 1$$

用いねば

$$\begin{aligned} &P(z)G_1(z) + P(-z)G_1(-z) \\ &= \frac{1}{2} \{ P(z)[G(z) + z^{-m} G^*(z)] + P(-z)[G(-z) + (-z)^{-m} G^*(-z)] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ [P(z)G(z) + P(-z)G(-z)] + [\overline{P(z)}G^*(z) + \overline{P(-z)}G^*(-z)] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ [P(z)G(z) + P(-z)G(-z)] + \overline{[P(z)G^*(z) + P(-z)G^*(-z)]} \} \\ &= \frac{1}{2} (1 + 1) \\ &= 1, \quad |z| = 1 \end{aligned}$$

が成立する。

以下では有限かつ実数値のツースケール列だけを考えることにする。

このとき条件 (3.68) は

$$P(e^{-i\omega}) = e^{-im\omega} P(e^{i\omega}), \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (3.71)$$

となる。

補題 3.17. P は実数係数のローラン多項式で、適当な $m \in \mathbf{Z}$ に対し (3.71) を満足する。このとき実数係数の多項式 P_1 が存在し、

$$P(e^{-i\omega}) = \begin{cases} e^{-\frac{im\omega}{2}} P_1(\cos \omega), & m : \text{偶数} \\ e^{-\frac{im\omega}{2}} (\cos \frac{\omega}{2}) P_1(\cos \omega), & m : \text{奇数} \end{cases} \quad (3.72)$$

と書ける。

[証明] 仮定 (3.71) より $e^{\frac{im\omega}{2}} P(e^{-i\omega})$ は ω の偶関数である。よって、 m が偶数ならば $e^{\frac{im\omega}{2}} P(e^{-i\omega})$ は周期 2π の周期関数となり、したがって、これは $\cos \omega$ の実多項式である。こうして (3.72) が得られた。

次に m を奇数とする。(3.72) で $\omega = \pi$ とおけば、 $P(-1) = -P(-1)$ となりこれより $P(-1) = 0$ である。ゆえに P は適当な実係数多項式 P_0 を用いて

$$P(z) = \frac{1+z}{2} P_0(z) \quad (3.73)$$

と書ける。(3.73) を (3.71) に入れれば

$$P_0(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-1)\omega} P_0(e^{i\omega})$$

となる。ここで $m-1$ は偶数だから上の議論より適当な実係数多項式 P_1 によって

$$P_0(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-1)\frac{\omega}{2}} P_1(\cos \omega)$$

と書ける。これを (3.73) に入れれば、(3.72) を得る。

補題 3.17 の表現に加えて、 P はツースケールシンボルとして

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^l P_2(z) \quad (3.74)$$

と書ける。ここに l は適当な正整数、 P_2 は

$$P_2(1) = 1, \quad P_2(-1) \neq 0 \quad (3.75)$$

なる実係数のローラン多項式である。

補題 3.18. P は実数係数のローラン多項式で、(3.71)、(3.74)(3.75)、を満たすものとする。このとき $(m-l)$ は偶数であり、また適当な実数係数多項式 S を用いて

$$P(e^{-i\omega}) = e^{-\frac{im\omega}{2}} (\cos \frac{\omega}{2})^l S(\cos \omega)$$

と書ける。ただし S は

$$S(1) = 1, \quad S(-1) \neq 0 \quad (3.76)$$

を満たす。

[証明] (3.74) より

$$P(e^{-i\omega}) = e^{-\frac{im\omega}{2}} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^l P_2(e^{-i\omega}) \quad (3.77)$$

である。よって (3.71) から

$$P_2(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-l)\omega} P_2(e^{i\omega}) \quad (3.78)$$

を得る。 $m-l$ が偶数であることを示すために、 $m-l$ が奇数であると仮定する。(3.78) で $\omega = \pi$ とおけば $P_2(-1) = 0$ が得られるが、これは仮定 (3.75) に反する。したがって $m-l$ は偶数である。 P_2 は (3.78) を満たしているから、 P_2 に補題 3.17 を適用すれば

$$P_2(e^{-i\omega}) = e^{-i(m-l)\frac{\omega}{2}} S(\cos \omega) \quad (3.79)$$

と書ける。ここに S は適当な実係数多項式である。(3.79) を (3.77) に入れればを得る。(3.75) より S が (3.76) を満たすことは明らかである。

4 直交ウェーブレットの構成

4.1 定理 2.8 の証明

この節では適当な ϕ のツースケールシンボル P となっているローラン級数 $P \in \mathcal{W}$ を調べ、定理 2.8 を証明する。特に ϕ が直交スケーリング関数である場合を考察する。ただし ϕ が直交スケーリング関数であるとは、 ϕ が L^2 の多重解像度解析を生成しかつ

$$\langle \phi(\cdot - j), \phi(\cdot - k) \rangle = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbf{Z} \quad (4.1)$$

を満たすことである。

主要結果の定理 2.8 を再掲載した上、その証明を行う。

定理 2.8 $P \in \mathcal{W}$ は (2.16) と、適当な $N \geq 1$ に対し (2.17) を満たすものとする。さらに S の係数列 $\{s_k\}$ は適当な $\epsilon > 0$ に対して

$$\sum |s_k| |k|^\epsilon < \infty \quad (4.2)$$

を満たし、かつ

$$B := \max_{|z|=1} |S(z)| < 2^{N-1} \quad (4.3)$$

も満たすものとする。このとき無限乗積:

$$g(\omega) := \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \quad (4.4)$$

は至るところで $g \in C(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ に収束する。また $\hat{\phi} = g$ なる関数 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ は直交スケーリング関数であり、 $L^2(\mathbf{R})$ の多重解像度解析を生成する。

この定理の証明にあたり以下の補題を準備する。

補題 4.1. (4.2) と、適当な $N \geq 1$ に対する (2.17) を仮定する。すると (4.4) の右辺の無限乗積は、ある連続関数 g に至るところで収束する。

[証明] (4.2) と (2.17) より、数列 $\{p_k\}$ が

$$\sum_k |p_k| |k|^\epsilon < \infty \quad (4.5)$$

を満たす。(4.5) より任意の $h > 0$ に対して

$$\begin{aligned} |P(e^{-i(\omega+h)}) - P(e^{-i\omega})| &\leq \frac{1}{2} \sum_k |p_k| |e^{-ikh} - 1| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_k |p_k| \min(2, |k|h) \\ &\leq |h|^\epsilon \sum_k |p_k| |k|^\epsilon \end{aligned}$$

を得る。これより変数 ω の関数として $P(e^{-i\omega})$ はヘルダー連続関数の空間 $C^\epsilon(\mathbf{R})$ に属している。また (3.16) を得たのと同様な議論で、無限乗積 (4.4) の右辺が収束する。この極限関数 g が任意の点 ω_0 で連続となることを示す。

まず $g(\omega_0) \neq 0$ の場合を考える。この仮定のもとに

$$\begin{aligned} g(\omega) - g(\omega_0) &= g(\omega_0) \left\{ \frac{g(\omega)}{g(\omega_0)} - 1 \right\} \\ &= g(\omega_0) \left\{ \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{(1 - P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}))}{P(e^{-\frac{i\omega_0}{2^k}})} \right) \right] - 1 \right\} \\ &= g(\omega_0) \left\{ \exp \left[O \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega - \omega_0|^\epsilon}{2^{k\epsilon}} \right) \right] - 1 \right\} \\ &= o(1), \quad \omega \rightarrow \omega_0 \end{aligned}$$

を得る。これより g は点 ω_0 で連続である。

次に $g(\omega_0) = 0$ とする。 $P(1) = 1$ だから、十分大きい整数 k_0 をとれば、 k_0 より上からの積による極限関数:

$$\tilde{g}(\omega) = \prod_{k=k_0}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})$$

が $\tilde{g}(\omega_0) \neq 0$ となる。よって \tilde{g} は点 ω_0 で連続になる。したがって

$$g(\omega) = \tilde{g}(\omega) \prod_{k=k_0}^{\infty} P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})$$

も連続である。

補題 4.2. (4.3) と、適当な $N \geq 1$ に対する (2.17) を仮定する。このとき (4.4) の極限関数は

$$|g(\omega)| \leq C \left(\frac{1}{1 + |\omega|} \right)^{1+\eta}, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (4.6)$$

を満たす。ここに、 C は ω に依存しない正定数である。

[証明] b_j の定義:

$$\begin{cases} B_j &= B_j(S) := \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \left| \sum_{k=1}^j S(e^{-\frac{i\omega}{2^k}}) \right| \\ b_j &= b_j(S) := \frac{1}{j} \log_2 B_j = \frac{1}{j \ln 2} \ln B_j \end{cases}$$

と、(4.3) より

$$b_1 = \log_2 B_1 = \log_2 B < N - 1$$

となる。定理 3.6 において $n_0 = 1$ ととれば、

$$\eta := N - b_1 - 1$$

なる η に対して (4.6) が成立する。

補題 4.3. 定理 2.8 の仮定のものに、無限乗積 $g = \hat{\phi}$ は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega} |\hat{\phi}|^2 d\omega = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbf{Z} \quad (4.7)$$

を満たす。

[証明]

$$g_n(\omega) := \left\{ \prod_{k=1}^n P(e^{-\frac{j\omega}{2^k}}) \right\} \chi_{[-2^n\pi, 2^n\pi]}(\omega)$$

とおくと、(3.49) の G を \bar{P} でおきかえた式:

$$I_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega} |g_n(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \left(\prod_{k=1}^n |P(e^{-\frac{j\omega}{2^k}})|^2 \right) e^{j\omega} d\omega$$

が得られる。したがって (3.52) より

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega} |g_n(\omega)|^2 d\omega = \delta_{j,0}, \quad j \in \mathbf{Z}$$

となる。補題 3.10 を使えば、 $j \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{j,0}$$

を得る。

補題 4.4. 数列 $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ は

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k \\ &= \left(\frac{1+z}{2} \right)^2 S(z), \end{aligned}$$

$$q_k := (-1)^k \bar{p}_{-k+1} \quad (4.8)$$

で定義されるものとする。ただし P は (2.15) と (2.16) を満たしている。このとき、2 つの数列 $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ は以下の (i) ~ (v) を満足する。

$l, m \in \mathbf{Z}$ に対して、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \sum_k p_k = 2, \\ \text{(ii)} \quad \sum_k p_{k-2l} \bar{p}_{k-2m} = 2\delta_{l,m}, \\ \text{(iii)} \quad \sum_k q_{k-2l} \bar{p}_{k-2m} = 2\delta_{l,m}, \\ \text{(iv)} \quad \sum_k p_{k-2l} \bar{q}_{k-2m} = 0, \\ \text{(v)} \quad \sum_k \{p_{l-2k} \bar{p}_{m-2k} + q_{l-2k} \bar{q}_{m-2k}\} = 2\delta_{l,m}, \end{array} \right.$$

[証明] (i) は (2.15) と、(ii) は (2.16) と同値である。(iii) は (4.8) を考えれば (ii) よりしたがう。直交性 (iv) は添字を変えることにより

$$\begin{aligned}\sum_k q_{k-2l} \bar{p}_{k-2m} &= \sum_k (-1)^k p_{k-2l} p_{-k-2m+1} \\ &= \sum_j (-1)^{j+1} p_{-j-2m+1} p_{j-2l} \\ &= -\sum_k p_{k-2l} \bar{q}_{k-2m}\end{aligned}$$

となることからわかる。(4.8) を用いて列 $\{q_n\}$ と $\{p_n\}$ を変えれば、(v) の 2 つの和は、奇数のときの (ii) の和と偶数のときの (ii) の和の 2 つに分割されることから (v) が得られる。

補題 4.5. すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$2\phi(2x - m) = \sum_k \{\bar{p}_{m-2k} \phi(x - k) + \bar{q}_{m-2k} \psi(x - k)\} \quad (4.9)$$

が成り立つ。

[証明]

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega) &= P(e^{-\frac{i\omega}{2}}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \phi(x) &= \sum_k p_k \phi(2x - k) \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\psi(x) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} q_k \psi(2x - k)$$

上式と補題 4.4 の (v) を使えばよい。

補題 4.6. すべての $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対して

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_k \{|\langle f, \phi_{j-1,k} \rangle|^2 + |\langle f, \psi_{j-1,k} \rangle|^2\}, \quad j \in \mathbf{Z} \quad (4.11)$$

が成り立つ。

[証明] 補題 4.5 と補題 4.4 の (ii)、(iii)、(iv) を用いればよい。

補題 4.7. 定理 2.8 と同じ仮定を設ける。このとき 2 つの族 $\{\phi_{j,k}\}$ と $\{\psi_{j,k}\}$ は以下を満たす。

- (i) $\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle = \delta_{k,l}, \quad j, k, l \in \mathbf{Z}$
- (ii) $\langle \phi_{j,k}, \psi_{j,l} \rangle = 0, \quad j, k, l \in \mathbf{Z}$
- (iii) $\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbf{Z}$

[証明] (i) は定理 3.1 とスケール変換を用いることにより、補題 4.3 から従う。(ii) の証明には (i)、(4.10)、(4.12) および補題 4.4 のを使えばよい。(iii) の $j = l$ の場合には、補題 4.4 の (iv) の代わりに同補題の (iii) を用いれば、(ii) を示すのと同じ手順で証明できる。 $j \neq l$ の場合には、例えば $j > l$ とする。(4.12) により、 $\psi_{l,m} \in V_{l+1}$ であることに注意する。 $V_{l+1} \subset V_j$ であり、また (iii) より $\psi_{j,k}$ は V_j と直交しているから、 $\psi_{j,k}$ が $\psi_{l,m}$ と直交することがわかる。

補題 4.8. 定理 2.8 と同じ仮定を設ける。このとき

$$\psi(x) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} q_k \psi(2x - k) \quad (4.12)$$

$$q_k := (-1)^k \bar{p}_{-k+1}$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}$$

で定義される正規直交系 $\{\psi_{j,k}\}$ 、 $j, k \in \mathbf{Z}$ に対して次のパーセバルの等式:

$$\sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbf{R}) \quad (4.13)$$

が成立する。

[証明] コンパクトな台をもち無限回微分可能な関数の集合を $C_0^\infty(\mathbf{R})$ と書く。まず、任意の $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対して (4.13) を示す。 $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$ は $j \in \mathbf{Z}$ に対して正規直交系になっているから、ベッセルの不等式:

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 < \infty, \quad j \in \mathbf{Z}$$

が成立している。

さて任意の正整数 L, M に対し、補題 4.6 の (4.11) の両辺を $j = -L + 1, \dots, M$ に関して加え合わせ、両辺に現れる共通な項を削除すれば

$$\sum_{j=-L}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{|\langle f, \phi_{M,k} \rangle|^2 - |\langle f, \phi_{-L,k} \rangle|^2\} \quad (4.14)$$

を得る。

まず上式右辺の第 2 項を考察する。 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ だから、適当な $K > 0$ を選んで $\text{supp } f \subset [-K, K]$ とできる。したがってシュワルツの不等式を用いれば、

$$\begin{aligned} |\langle f, \phi_{-L,k} \rangle|^2 &= \left| 2^{-\frac{L}{2}} \int_{-K}^K \phi(2^{-L}x - k) \overline{f(x)} dx \right|^2 \\ &\leq \left\{ 2^{-\frac{L}{2}} \int_{-K}^K |\phi(2^{-L}x - k)|^2 dx \right\} \|f\|_2^2 \\ &= \left\{ \int_{-\frac{K}{2^L}}^{\frac{K}{2^L}} |\phi(y - k)|^2 dy \right\} \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$B_L := \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[k - \frac{K}{2^L}, k + \frac{K}{2^L} \right]$$

とおけば、十分大きな L に対し

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{-L,k} \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \int_{B_L} |\phi(y)|^2 dy \quad (4.15)$$

となる。 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ であること、および任意の $N > 0$ に対し $L \rightarrow \infty$ とすれば集合 $B_L \cap [-N, N]$ の測度が 0 になることより、(4.15) から

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{-L,k} \rangle|^2 = 0 \quad (4.16)$$

を得る。したがって (4.14)、(4.16) により

$$\sum_{j=-\infty}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{M,k} \rangle|^2, \quad f \in C_0^\infty(\mathbf{R}) \quad (4.17)$$

を得る。次に (4.17) の右辺を考察する。そのためにフーリエ変換およびフーリエ級数に対するパーセバルの等式を用いれば、

$$\begin{aligned} \sum_k |\langle f, \phi_{M,k} \rangle|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_k |\langle \hat{f}, \hat{\phi}_{M,k} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_k 2^M \left| \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^M(\omega + 2\pi m)) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi m)} e^{ik\omega} d\omega \right|^2 \\ &= \frac{2^M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^M(\omega + 2\pi m)) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi m)} \right|^2 d\omega \\ &= \frac{2^M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m,l} \hat{f}(2^M(\omega + 2\pi m)) \overline{\hat{f}(2^M(\omega + 2\pi l))} \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi m)} \hat{\phi}(\omega + 2\pi l) \right\}^2 d\omega \\ &= \frac{2^M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^M(\omega + 2\pi n)) \overline{\hat{f}(2^M\omega)} \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi n)} \hat{\phi}(\omega) \right\} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \hat{f}(\omega + 2\pi 2^M) \overline{\hat{\phi}(2^{-M}\omega + 2\pi l)} \hat{\phi}(2^{-M}\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(2^{-M}\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega + R_M \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる。ここに R_M は $l \neq 0$ に対する和の部分を表す。(2.16) と、 $\hat{\phi} = \prod_k P(e^{-\frac{i\omega}{2^k}})$ であることより

$$|\hat{\psi}(\omega)| \leq 1, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (4.19)$$

となる。これより

$$|R_M| \leq \sum_{l \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega) \hat{f}(\omega + 2\pi 2^M)| d\omega \quad (4.20)$$

となる。 F_M を

$$F_M(\omega) := \sum_{l \neq 0} |\hat{f}(\omega + 2\pi 2^M)|$$

とおく。 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ であるから、 $\{F_M(\omega)\}$ は \mathbf{R} 上で一様に有界であり、かつ $M \rightarrow \infty$ のとき任意のコンパクト集合上で一様に 0 に収束する。このことと $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$ となることから、(4.20) より $M \rightarrow \infty$ のとき $R_M \rightarrow 0$ となる。(4.18) を考察する。補題 4.1 より $\hat{\phi}$ は連続である。さらに (2.15)、(4.4) より $\hat{\phi}(0) = 1$ となっている。したがってルベーグ積分の性質より

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(2^{-M}\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 \quad (4.21)$$

となる。したがって、 $R_M \rightarrow 0$ であること、(4.21)、(4.18) および (4.17) から

$$\sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|_2^2, \quad f \in C_0^\infty(\mathbf{R}) \quad (4.22)$$

が得られる。すなわち $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対して (4.13) が示された。さらにこの等式を $f \in L^2(\mathbf{R})$ に拡張するために、 $C_0^\infty(\mathbf{R})$ が $L^2(\mathbf{R})$ で稠密であるという事実を用いる。すなわち任意の $f \in L^2(\mathbf{R})$ と任意の $\epsilon > 0$ に対し、関数 $f_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ を $\|f - f_0\|_2 < \epsilon$ となるように選ぶ。するとベッセルの不等式により

$$\|\langle f - f_0, \psi_{j,k} \rangle\|_2 \leq \|f - f_0\|_2 < \epsilon \quad (4.23)$$

となるが、これとノルムに関する三角不等式から

$$\left| \|\langle f, \psi_{j,k} \rangle\|_2 - \|\langle f_0, \psi_{j,k} \rangle\|_2 \right| \leq \|\langle f - f_0, \psi_{j,k} \rangle\|_2 < \epsilon \quad (4.24)$$

となる。同様に

$$\left| \|f\|_2 - \|f_0\|_2 \right| \leq \|f - f_0\|_2 < \epsilon$$

も成立する。よって (4.22) ~ (4.24) より、 $f \in L^2(\mathbf{Z})$ に対しても (4.13) が成立する。

[定理 2.8 の証明] パーセバルの等式 (4.13) の成立が補題 4.8 で示されたので、正規直交系 $\{\psi_{j,k}\}$ が、 $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底であることを示す。任意の $f \in L^2(\mathbf{R})$ と任意の有限列 $\{c_{j,k}\}$ に対して

$$\left\| f - \sum c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re} \sum \bar{c}_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle + \sum |c_{j,k}|^2$$

となるが、ここで特に $|j| \leq N$ と $|k| \leq N$ なる j, k に対し $c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ とおき、次いで $N \rightarrow \infty$ とすれば

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad f \in L^2(\mathbf{R})$$

を得る。ただしこの収束は $L^2(\mathbf{R})$ での収束である。したがって $\{\psi_{j,k}\}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の基底であり、また ψ は直交ウェーブレットであることになる。定義 2.3 を用いれば

$$\operatorname{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j \right) = L^2(\mathbf{R})$$

が成立する。したがって ϕ はスケーリング関数である。

4.2 コンパクトな台をもつ直交ウェーブレットの構成

この節ではコンパクトな台をもつ直交スケーリング関数と直交ウェーブレットを構成する一般的な方法について考察し、主要結果の定理 2.9 を証明する。ここでは、実数のツースケール列 $\{p_k\}$ のみを考える。ツースケール列 $\{p_k\}$ と $\{q_k\}$ との間に成り立つ関係

$$q_k := (-1)^k \bar{p}_{-k+1} \quad k \in \mathbf{Z} \quad (4.25)$$

より、直交ウェーブレット ψ を構成するためには、それに対応する直交スケーリング関数 ϕ を構成すればよい。

N を任意の正整数とし

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z) \quad (4.26)$$

を考える。ただし、 $S \in \mathcal{W}$ で $S(1) = 1$ なるローラン多項式である。(4.26) の S を

$$S(z) = \sum_k s_k z^k$$

と書く。

補題 4.9. $S(z)$ は $S(1) = 1$ を満たすローラン多項式で、条件:

$$B := \max_{|z|=1} |S(z)| < 2^{N-1} \quad (4.27)$$

および適当な奇数関数に対し

$$|S(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2k} + \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2N} T_0\left(\frac{\cos \omega}{2}\right)$$

を満たすとする。ただし

$$T_0(x) := T\left(\frac{1-2x}{2}\right)$$

とおく。このときローラン多項式

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^{2N} S(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k \quad (4.28)$$

はコンパクトな台をもつような直交スケーリング関数 ϕ のツースケールシンボルである。

また、この ϕ からつくられる

$$\psi(x) := \sum_k (-1)^k \bar{p}_{-k+1} \phi(2x - k) \quad (4.29)$$

はコンパクトな台をもつ直交ウェーブレットである。

[証明] 条件:

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \quad |z| = 1$$

を $S(z)$ に対する条件にいい換えると、 S は実係数のローラン多項式だから、 $|S(e^{-i\omega})|^2$ はコサイン多項式になる。したがって適当な実係数の代数多項式 \tilde{R} を選び

$$|S(e^{-i\omega})|^2 = \tilde{R}(\cos \omega)$$

の形になる。

$$\begin{cases} x = \frac{1-\cos\omega}{2} = \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right), \\ R(x) = \tilde{R}(\cos\omega) = \tilde{R}(1-2x) \end{cases}$$

と変数変換すれば、条件 (2.16) は

$$\left|\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right|^{2N} |S(e^{-i\omega})|^2 + \left|\frac{1-e^{-i\omega}}{2}\right|^{2N} |S(-e^{-i\omega})|^2 = 1$$

すなわち

$$(1-x)^N R(x) + x^N R(1-x) = 1 \quad (4.30)$$

となる。(4.30) の一般解は

$$\begin{cases} R(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} x^k + x^N T(x), \\ \text{ただし } T \text{ は } T(1-x) = -T(x) \text{ を満たす多項式} \end{cases}$$

で与えられる。

補題 4.10. すべての $k, n \in \mathbf{Z}_+$ に対して等式:

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k} \quad (4.31)$$

が成立する。

[証明] 等式:

$$\binom{n+j+1}{j} = \binom{n+j}{j} + \binom{n+j}{j-1}$$

を繰り返し用いることにより、

$$\begin{aligned} \binom{n+k+1}{k} &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} \\ &= \binom{n+k}{k} + \left\{ \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k-2} \right\} \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j} \end{aligned}$$

を得る。

次に主要結果の定理 2.9 を再掲載した上、その証明を行う。

定理 2.9 N を正整数とし、 $S(z)$ は実係数のローラン多項式で

$$|S(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{n+j-1}{j} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2j} \quad (4.32)$$

を満たし、かつ $S(1) = 1$ なるものとする。このときローラン多項式 (4.28) はコンパクトな台をもつ直交スケーリング関数 ϕ のツースケールシンボルである。また (4.29) で定義される ϕ は、コンパクトな台をもつ直交ウェーブレットである。

[定理 2.9 の証明] 補題 4.10 の (4.31) を $n = k = N - 1$ として用いれば

$$\begin{aligned}
 B^2 &:= \max_{|z|=1} |S(z)|^2 \\
 &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N+j-1}{j} \\
 &= \binom{2N-1}{N-1} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \binom{2N-1}{N-1} + \binom{2N-1}{N} \right\} \\
 &< \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} \binom{2N-1}{k} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2^{2N-1} \\
 &= 2^{2N-2}
 \end{aligned}$$

を得る。これより $B < 2^{N-1}$ となり、(4.27) は満たされている。

したがってコンパクトな台をもつ直交ウェーブレット ψ を構成するときの技術的な問題は、(4.32) を満たす $S(z)$ を求めることになる。

次の主要結果の定理は、(4.32) を満たす $S(z)$ が必ず存在することを保証している。定理 2.10 を再掲載した上、その証明を行う。

定理 2.10 $a_0, \dots, a_N \in \mathbf{R} (a_N \neq 0)$ は不等式:

$$A := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \geq 0, \quad \omega \in \mathbf{R} \quad (4.33)$$

を満たす列とする。このとき次数がちょうど N の実係数多項式:

$$B(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^k$$

で

$$|B(z)|^2 = A(\omega), \quad z = e^{-i\omega} \quad (4.34)$$

を満たすものが存在する。

[定理 2.10 の証明] コサイン多項式 $A(\omega)$ に対応させて、代数多項式

$$P_A(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N a_{|k|} z^{N+k}$$

を考える。この P_A が

$$P_A(z) = z^N A(\omega), \quad z = e^{-i\omega} \quad (4.35)$$

$$P_A(z) = z^{2N} P_A\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbf{C} \quad (4.36)$$

を満たすことは明らかである。仮定 $a_N \neq 0$ より $P_A \neq 0$ であり、また (4.36) より P_A の零点はすべて逆数どうしの組として現れる。特に単位円上の零点は偶数の重複度をもつ。さらに P_A の係数が実数だから、 P_A の複素根はすべて複素共役の組として現れる。すなわち P_A は

$$P_A(z) = \frac{1}{2} a_N \left\{ \prod_{k=1}^K (z - r_k)(z - r_k^{-1}) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^J (z - z_j)(z - \bar{z}_j)(z - z_j^{-1})(z - \bar{z}_j^{-1}) \right\} \quad (4.37)$$

と書ける。ここに $r_1, \dots, r_K \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ 、 $z_1, \dots, z_J \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ 、 $K + 2J = N$ である。等式

$$(z - z_j)(z - \bar{z}_j^{-1}) = |z_j|^{-1} |z - z_j|^2, \quad z = e^{-i\omega} \quad (4.38)$$

に注意して、(4.33)、(4.35)、(4.37)、(4.38) を使えば、 $z = e^{-i\omega}$ に対して

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |A(\omega)| \\ &= |P_A(z)| \\ &= \frac{1}{2} |a_N| \prod_{k=1}^K |r_k^{-1}| \prod_{j=1}^J |z_j|^{-2} \left| \prod_{k=1}^K (z - r_k) \prod_{j=1}^J (z - z_j)(z - \bar{z}_j) \right|^2 \end{aligned}$$

を得る。したがって多項式 $B(z)$ を

$$B(z) := \left(\frac{1}{2} |a_N| \prod_{k=1}^K |r_k^{-1}| \prod_{j=1}^J |z_j|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \prod_{k=1}^K (z - r_k) \prod_{j=1}^J (z - z_j)(z - \bar{z}_j) \right\} \quad (4.39)$$

で定義すれば、 B の次数は $K + 2J = N$ であり、(4.34) が成立する。

定義 4.11. $N \geq 2$ とする。(4.39) で与えられる (4.32) の解 $B(z)$ で、正規化されており、かつ (4.39) に現れる $P_A(z)$ の逆数どうしの零点の組から絶対値の大きい方をとったものを、記号 $S_N(z)$ で表す。このとき

$$\left(\frac{1+z}{2} \right)^N S_N(z)$$

をツースケールシンボルとするスケーリング関数を記号 ${}_N\phi^D$ と書き、これを N 階の **Daubechies** のスケーリング関数とよぶ。

次にコンパクトな台をもつ Daubechies ウェーブレット ${}_m\psi^D$ と、それに対応するスケーリング関数 ${}_m\phi^D$ がもつ滑らかさを考察する。

定義 4.12. $\gamma > 0$ とする。関数 $f \in L^2(\mathbf{R})$ が空間 W^γ に属するとは、そのフーリエ変換 \hat{f} が

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|)^\gamma d\omega < \infty \quad (4.40)$$

を満たすときをいう。

空間 W^γ とヘルダー連続関数の空間 $C^\gamma(\mathbf{R})$ を比較する。

補題 4.13. 任意の $\gamma > 0$ に対し

$$W^\gamma \subseteq C^\gamma(\mathbf{R}) \quad (4.41)$$

である。

[証明] $f \in W^\gamma$ とする。

(i) $\gamma = 1$ のとき。フーリエの反転公式を用いて、任意の $h > 0$ に対して

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \{e^{i(x+h)\omega} - e^{ix\omega}\} d\omega \quad (4.42)$$

を得る。ところで、

$$\left| \frac{e^{i(x+h)\omega} - e^{ix\omega}}{h} \right| \leq |\omega| \quad (4.43)$$

が成立するから、(4.42) にルベークの収束定理を用いると

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega) \hat{f} e^{ix\omega} d\omega, \quad f \in W^1$$

となる。仮定より $\omega \hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$ だから上式より、 $f' \in C(\mathbf{R})$ となり、 $f \in C^1(\mathbf{R})$ である。

(ii) γ が正整数のとき。(4.41) は (i) と帰納法によって証明できる。

(iii) $\alpha = \gamma - [\gamma] > 0$ のとき。 $f \in W^\gamma$ だから、(ii) より、 $f \in C^m(\mathbf{R})$ 、 $m = [\gamma]$ となる。(4.42)、(4.43) と同様にして

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^m |\hat{f}(\omega)| \min(|h\omega|, 2) d\omega \\ &\leq \frac{|h|^\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^\gamma |\hat{f}(\omega)| d\omega \end{aligned}$$

を得る。これより $f^{(m)} \in C^\alpha(\mathbf{R})$ であり、すなわち $f \in C^\gamma(\mathbf{R})$ である。

定理 4.14. 正整数 λ が存在して任意の整数 $m \geq 2$ に対し ${}_m\phi^D$ 、 ${}_m\psi^D \in C^{\gamma_m}(\mathbf{R})$ である。ただし $\gamma_m := \lambda m - [\lambda m]$ である。

[証明] (4.32) で $N = m$ としたときの S を S_m とし、:

$$T_m(y) = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+j-1}{j} y^j$$

とおけば、 $y = \sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)$ として

$$\begin{aligned} B_2 &:= \max_{\omega \in \mathbf{R}} |S_m(e^{-i\omega}) S_m(e^{-\frac{i\omega}{2}})| \\ &= \max_{\omega \in \mathbf{R}} |T_m\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right) T_m\left(\sin^2 \frac{\omega}{4}\right)|^{\frac{1}{2}} \\ &= \max_{0 \leq y \leq 1} |T_m(4y(1-y)) T_m(y)|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。 $T_m(y)$ に関して

$$\max_{0 \leq y \leq 1} T_m(y) < 2^{2(m-1)}$$

および

$$T_m(y) \leq \sum_{k=0}^{m-1} 2^{m+k-1} y^k \leq 2^{m-1} m \max(1, (2y)^m)$$

が成立することに注意すると $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ なる y に対して

$$T_m(y)T_m(4y(1-y)) \leq m2^{m-1}2^{2(m-1)} = m2^{3(m-1)}$$

を得る。

また、 $y \geq \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$ すなわち $4y(1-y) \leq \frac{1}{2}$ なる y に対しては

$$T_m(y)T_m(4y(1-y)) \leq 2^{2(m-1)}m2^{m-1} = m2^{3(m-1)}$$

が成り立つ。

最後に $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$ に対しては

$$T_m(y)T_m(4y(1-y)) \leq m^2 2^{4m-2} \left(\max_{0 \leq y \leq 1} [4y^2(1-y)]^m \right) = m^2 2^{4m-2} \left(\frac{16}{27} \right)^2$$

を得る。これらの評価により

$$B_2 \leq m2^{2m-1} \left(\frac{16}{27} \right)^{\frac{m}{2}}$$

となる。したがって、(3.13) で定義される b_2 は:

$$b_2 = m - \frac{1}{2} + \frac{\ln m - m \ln \frac{3\sqrt{3}}{4}}{2 \ln 2}$$

となり、定理 3.6 より

$$|{}_m\hat{\phi}^D(\omega)| = \left| \prod_{j=1}^{\infty} P_n(e^{-\frac{i\omega}{2^j}}) \right| \leq C(1 + |\omega|)^{\frac{\ln m - m \ln \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{1}{2}}{2 \ln 2}}$$

が得られる。上式の右辺の指数は $m \geq 16$ ならば -1 より小さく、 $m \rightarrow \infty$ で $m < 16$ に対しては

$$B_1 := \max_{\omega \in \mathbf{R}} |S_m(e^{i\omega})| = \left[\binom{2m-1}{m-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

を直接評価することによって、適当な $\eta > 0$ をとれば、すべての m で

$$|{}_m\hat{\phi}^D(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-1-\eta m}$$

となることがわかる。以上より補題 4.13 を用いれば ${}_m\phi^D$ に対する定理の結論を得る。 ${}_m\psi^D$ についても同様である。

5 メイエの直交ウェーブレット

$\eta \in C^\infty(\mathbf{R})$ を $\text{supp } \eta \subset [-4\pi/3, 4\pi/3]$, $\eta(\omega) \geq 1/2$ ($|\omega| \leq \pi$) なる非負値偶関数とし、

$$\hat{\phi}(\omega) := \frac{\eta(\omega)}{(\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\eta(\omega + 2\pi k)|^2)^{1/2}}$$

により、 ϕ を定義すれば $\text{supp } \hat{\phi} \subset [-4\pi/3, 4\pi/3]$, $\hat{\phi}(\omega) = 1$ ($|\omega| \leq 2\pi/3$) で $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1$ を満たす。 $m_0(\omega) = P(e^{-i\omega}) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{\phi}(2\omega + 4\pi k)$ とおけば、

$$\hat{\phi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2}) \hat{\phi}(\omega/2)$$

$$|P(e^{-i\omega})|^2 + |P(-e^{-i\omega})|^2 = 1$$

が全ての ω に対して成り立ち、 ϕ は多重解像度解析の直交スケーリング関数となる。

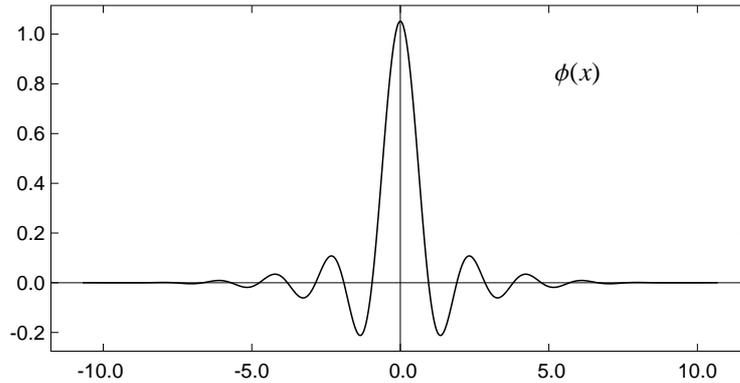


図 1: メイエのスケーリング関数

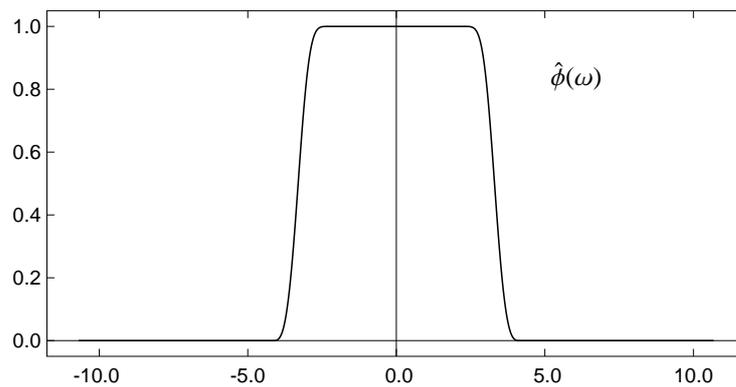


図 2: スケーリング関数のフーリエ変換

ϕ に対応する直交ウェーブレット ψ はツースケールシンボルを $m_1(\omega) = Q(z) = \overline{zP(-z)}$ ($z = e^{-i\omega}$)

と取ればよいので

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega) &= e^{-i\omega/2} \overline{P(e^{-i(\omega+2\pi)/2})} \hat{\phi}(\omega/2) \\ &= e^{-i\omega/2} \left\{ \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{\phi}(\omega + 2\pi(2k + 1)) \right\} \hat{\phi}(\omega/2) \\ &= e^{-i\omega/2} \left\{ \hat{\phi}(\omega + 2\pi) + \hat{\phi}(\omega - 2\pi) \right\} \hat{\phi}(\omega/2)\end{aligned}$$

により定義される。

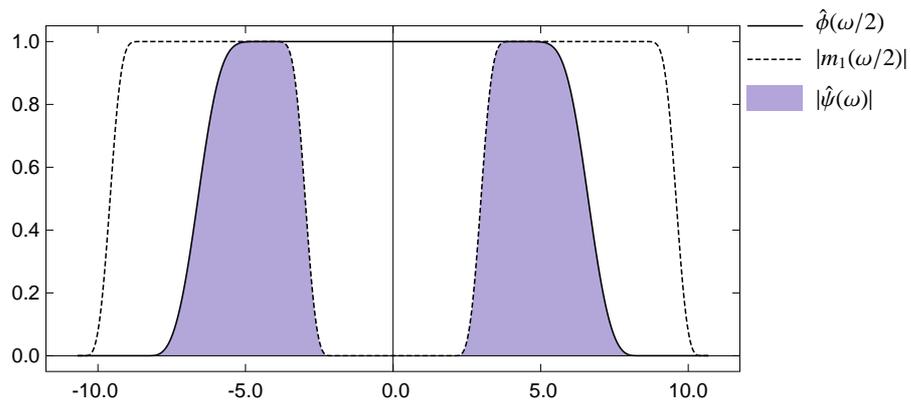


図 3: $|\hat{\psi}(\omega)| = |m_1(\omega/2)| \hat{\phi}(\omega/2)$

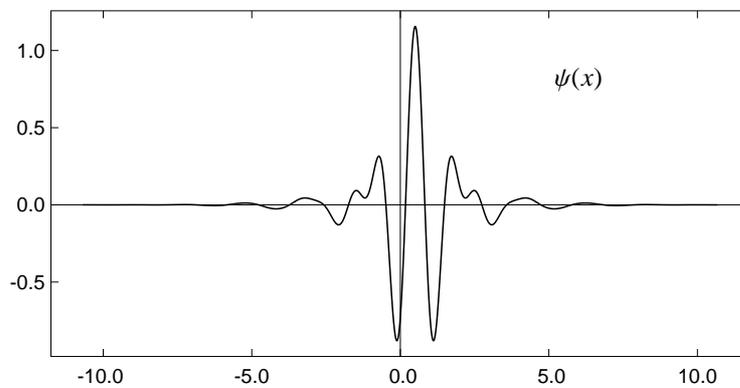


図 4: メイエのウェーブレット

6 ドベシーの直交ウェーブレット

コンパクト台を持つ直交ウェーブレットは作るもっとも簡単な方法は直交スケールリング関数がコンパクト台を持つように選ぶことである。コンパクト台の直交スケールリング関数は有限和のツースケール関係を持つから。適当に平行移動することにより。多項式となるツースケールシンボル

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^M p_k z^k$$

で次の条件を満たすものを見つけられればよい：

$$P(1) = 1, \quad |P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1 \quad (z = e^{-i\omega}). \quad (6.1)$$

6.1 Strichartz の方法

$z = e^{-i\omega}$ とおけば、

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\omega}{2} &= \frac{1 + \cos \omega}{2} = \frac{1}{2} + \frac{z + \bar{z}}{4} = \left| \frac{1+z}{2} \right|^2, \\ \sin^2 \frac{\omega}{2} &= \frac{1 - \cos \omega}{2} = \frac{1}{2} - \frac{z + \bar{z}}{4} = \left| \frac{1-z}{2} \right|^2. \end{aligned}$$

である。条件 (6.1) より $P(-1) = 0$ となるが、 $z = -1$ での零点の次数を N とし、

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2} \right)^N W(z)$$

とおく。

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^{2N-1} \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} \binom{2N-1}{k} \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} \right)^{2N-1-k} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^k \\ &= \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} \right)^N \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} \right)^{N-1-k} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^k \\ &\quad + \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^N \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^{2N-1-k} \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} \right)^k \end{aligned}$$

に注意すれば、直交条件 (6.1) は

$$\begin{aligned} |W(z)|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} \right)^{N-1-k} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} \left(\frac{1}{2} + \frac{z + \bar{z}}{4} \right)^{N-1-k} \left(\frac{1}{2} - \frac{z + \bar{z}}{4} \right)^k \end{aligned}$$

となる $N-1$ 次多項式 $W(z) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k z^k$ を求めることにより達成される。

6.2 ${}_2\phi^D(x), {}_2\psi^D(x)$

$$\begin{aligned}|W(z)|^2 &= \sum_{k=0}^1 \binom{3}{k} \left(\cos^2 \frac{\omega}{2}\right)^{1-k} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^k \\ &= 1 + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \\ &= 2 - \cos \omega \\ &= 2 - \frac{z + \bar{z}}{2}\end{aligned}$$

と

$$|w_0 + w_1 z|^2 = w_0^2 + w_1^2 + w_0 w_1 (z + \bar{z})$$

を比較し

$$w_0^2 + w_1^2 = 2, \quad w_0 w_1 = -\frac{1}{2}$$

よって

$$W_{\pm}(z) = \frac{1}{2} \left\{ (1 \pm \sqrt{3}) + (1 \mp \sqrt{3})z \right\}$$

以下では $W(z) = W_+(z)$ を選ぶ。

$$\begin{aligned}P(z) &= \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \left\{ (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})z \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + \sqrt{3}}{4} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4} z + \frac{3 - \sqrt{3}}{4} z^2 + \frac{1 - \sqrt{3}}{4} z^3 \right\}\end{aligned}$$

6.3 ${}_3\phi^D(x), {}_3\psi^D(x)$

$$\begin{aligned}
 |W(z)|^2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{5}{k} \left(\cos^2 \frac{\omega}{2}\right)^{2-k} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^k \\
 &= 1 + 3 \left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^2 + 6 \left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^4 \\
 &= 4 - \frac{9}{2} \cos \omega + \frac{3}{2} \cos^2 \omega \\
 &= \frac{19}{4} - \frac{9}{4} (z + \bar{z}) + \frac{3}{8} (z^2 + \bar{z}^2)
 \end{aligned}$$

と

$$|w_0 + w_1 z + w_2 z^2|^2 = \{w_0^2 + w_1^2\} + \{w_0 w_1 + w_1 w_2\} (z + \bar{z}) + \{w_0 w_2\} (z^2 + \bar{z}^2)$$

を比較し

$$w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 = \frac{19}{4}, \quad w_0 w_1 + w_1 w_2 = -\frac{9}{4}, \quad w_0 w_2 = \frac{3}{8},$$

これを $W(1) = w_0 + w_1 + w_2 = 1$ の条件で解くと

$$W_{\pm}(z) = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{10} \pm \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) + \frac{1}{2} (1 - \sqrt{10}) z + \frac{1}{4} (1 + \sqrt{10} \mp \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}) z^2$$

を得る。 $W(z) = W_+(z)$ と取れば

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^3 W(z) = \frac{1}{2} \{p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + p_5 z^5\},$$

$$p_0 = \frac{1}{16} (1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}),$$

$$p_1 = \frac{1}{16} (5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}),$$

$$p_2 = \frac{1}{8} (5 - \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}),$$

$$p_3 = \frac{1}{8} (5 - \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}),$$

$$p_4 = \frac{1}{16} (5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}),$$

$$p_5 = \frac{1}{16} (1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}).$$

6.4 カスケードアルゴリズムによる ${}_N\phi^D(x)$, ${}_N\psi^D(x)$ の近似

配列 $p[N][k=1 \dots 2*N-1] = \{p_k^{(N)}\}$ を ${}_N\phi^D$ のツースケール係数とする。すなわち、

$${}_N\phi^D(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} p_k^{(N)} {}_N\phi^D(2x - k)$$

なるツースケール関係式が成り立っているとす。

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} k p_k^{(N)}$$

とおけば、 $\frac{\tau+n}{2^j}$ における関数 ${}_N\phi^D$ の値：

$$\{{}_N\phi^D(x); x = \tau/2^j, (\tau+1)/2^j, \dots, (\tau+2^j(2N-1)-1)/2^j\}$$

は level = j として、以下のアルゴリズムにより任意の精度で計算することができる。

```
double *Cascade(int N, int level)
{
    double *phi = new double[(2*N-1)*(1<<level)];

    phi[0] = 1;
    for (int n = 1; n < 2*N-1; n++)
        phi[n] = 0;

    while (--level >= 0) {
        static int scale = 1;
        scale *= 2;
        double *tmp = new double[(2*N-1)*scale];
        for (int n = 0; 2*n < (2*N-1)*scale; n++)
            tmp[2*n] = phi[n];
        for (int n = 0; n < (2*N-1)*scale; n++) {
            phi[n] = 0;
            for (int k = 0; k < 2*N; k++) {
                if (2*n - scale*k >= 0 && 2*n - scale*k < (2*N-1)*scale) {
                    phi[n] += p[N][k] * tmp[2*n - scale*k];
                }
            }
        }
        delete[] tmp;
    }
    return phi;
}
```

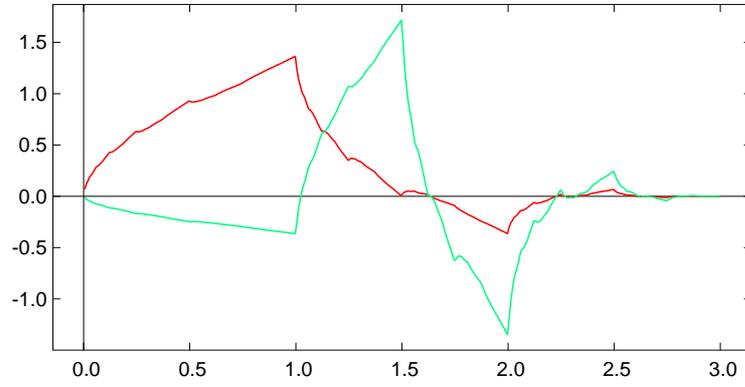


図 5: $2\phi^D(x)$ と $2\psi^D(x)$

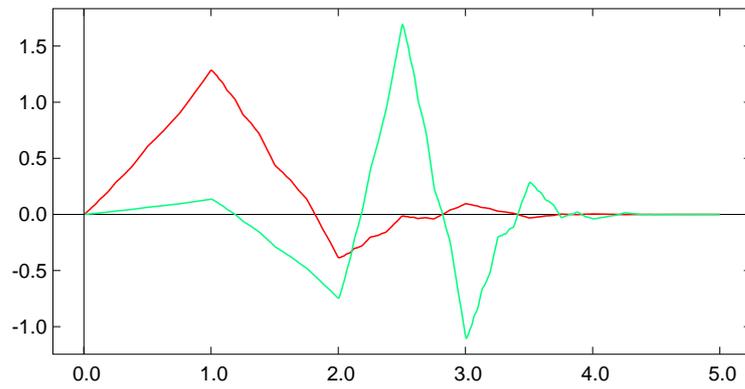


図 6: $3\phi^D(x)$ と $3\psi^D(x)$

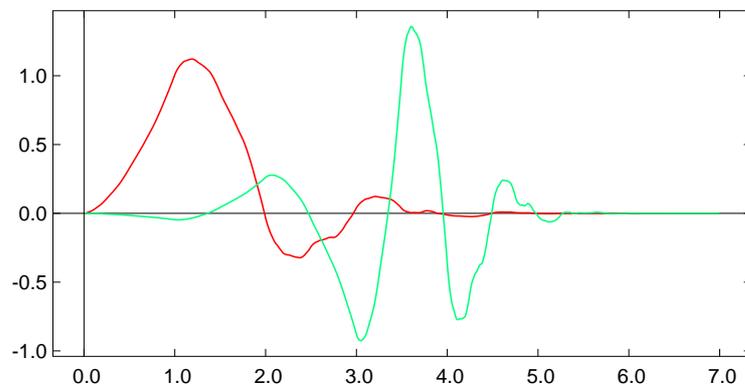


図 7: $4\phi^D(x)$ と $4\psi^D(x)$

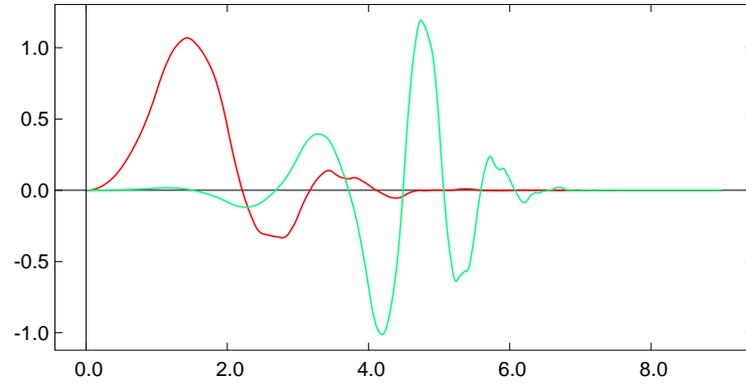


図 8: $5\phi^D(x)$ と $5\psi^D(x)$

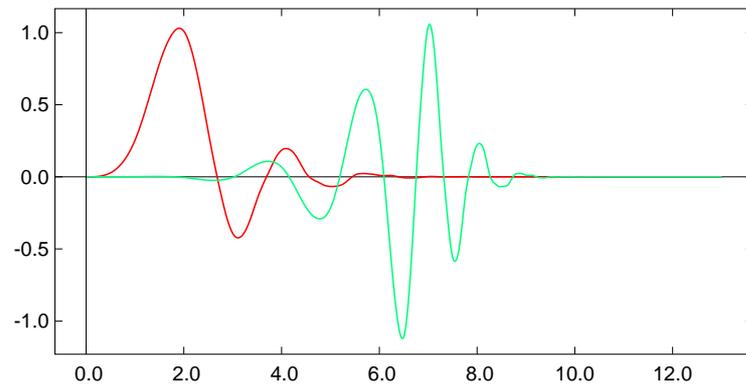


図 9: $7\phi^D(x)$ と $7\psi^D(x)$

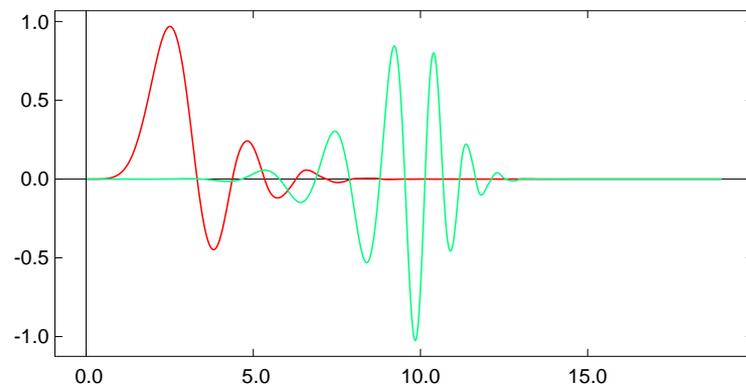


図 10: $10\phi^D(x)$ と $10\psi^D(x)$

謝辞

本論文を作成するにあたり、ご多忙の中いつも暖かくご指導して下さいました櫻井力先生をはじめ数学教室の皆様へ深く感謝し、心より御礼申し上げます。また、経済的、精神的に陰から支えてくれた両親と兄に心より感謝致します。

参考文献

- [1] Chui, C.K. (桜井 明, 新井 勉 訳), 『ウェーブレット入門』, 東京電機大学出版局, 1997.
- [2] Daubechies, I. (山田道夫, 佐々木文夫 訳), 『ウェーブレット 10 講』, シュプリンガー東京, 2003.
- [3] Meyer, Y., “Wavelet and operator”, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [4] Daubechies, I., “Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets”, Comm. Pure and Appl. Math, **41**(1988), 909–996.