

時間遅延フィードバック光を有する
半導体レーザカオスにおける複雑性解析

2014 年 3 月

埼玉大学大学院理工学研究科 (博士後期課程)

理工学専攻 (主指導教員 内田 淳史)

菅野 円隆

概要

戻り光を有する半導体レーザは時間遅延システムであり，高速で複雑なカオスを出力する．これまでに戻り光を有する半導体レーザを用いた様々な応用が研究されており，その1つとして高速物理乱数生成が挙げられる．これはレーザカオスに対してしきい値を設定して周期的にサンプリングすることで，0と1の2値乱数列を得る手法である．レーザカオスは数GHzの高速な振動成分を有するため，従来法よりも高速な物理乱数生成器を実装することができる．

一方でレーザはコンシステンシーを示すことが知られている．コンシステンシーは同一の信号により繰り返し駆動された非線形システムが示す再現性のある振る舞いと定義される．これまでにレーザのコンシステンシーは実験的に観測されており，リザーバコンピューティングや物理的一方向性関数への応用が期待されている．

これらの応用においてカオスの複雑性は重要な評価指標である．高速物理乱数生成におけるカオスの複雑性の評価は，生成された物理乱数のランダム性を理論的に保障するために重要である．カオスの複雑性を定量化する指標としてリアプノフ指数が挙げられる．リアプノフ指数は状態空間においてカオス時系列に与えられた微小揺らぎの指数関数的な拡大率を表し，高いリアプノフ指数を有するシステムは高い複雑性を有していると言える．

しかしながら戻り光を有する半導体レーザのような時間遅延システムは無限次元を有するため，一般的なシステムとは状態空間の構成方法が異なり，戻り光を有する半導体レーザにおけるリアプノフ指数の算出はほとんど行われていない．一方で，Farmerにより時間遅延ダイナミカルシステムにおいてリアプノフ指数を算出する方法が提案されている．しかしながらコンシステンシー状態での半導体レーザにおいてリアプノフ指数による複雑性の評価は行われておらず，特にコンシステンシーと複雑性の関係については全く分かっていないのが現状である．さらにアトラクタの局所的な不安定性を評価する指標として有限時間リアプノフ指数が提案されているが，時間遅延システムにおいて有限時間リアプノフ指数を算出する手法は確立されていない．

そこで本研究では、時間遅延フィードバック光を有する半導体レーザカオスのリアプノフ指数の算出を行うことを目的とする。また光結合された戻り光を有する半導体レーザにおいてリアプノフ指数を用いて複雑性を定量化し、コンシステンシー状態の有無との関係を調査する。さらに時間遅延ダイナミカルシステムにおいて有限時間リアプノフ指数の算出手法を提案し、戻り光を有する半導体レーザに適用する。

第1章では本研究の背景、目的および本論文の構成について述べている。

第2章ではリアプノフ指数、コンシステンシー、半導体レーザの応用について述べている。

第3章では本研究で用いる半導体レーザの数値モデルについて述べている。さらに戻り光を有する半導体レーザの基本的なダイナミクスとその数値的な調査方法について述べている。

第4章では、戻り光を有する半導体レーザの複雑性をリアプノフスペクトラム解析により評価し、高速物理乱数生成への応用に適したレーザパラメータを調査している。リアプノフ指数から算出されたエントロピーと次元のパラメータ依存性を調査したところ、戻り光量および注入電流を最適化することで複雑性の向上が可能となることが明らかとなった。また内部パラメータとして、線幅増幅係数が大きく利得飽和係数が小さな半導体レーザを乱数源として用いることが、複雑性向上のために効果的であることが明らかとなった。

第5章では、一方向に光結合された半導体レーザにおいてリアプノフ指数から算出されたエントロピーと次元を用いて複雑性を評価し、コンシステンシーとの関係について調査している。複雑性はコンシステンシーの有無に依存して3つの領域に分類されることが分かった。システムがコンシステンシー状態である時、複雑性は駆動用レーザと同程度まで低下した。コンシステンシー状態でない時の複雑性は結合が無い時と同程度となるが、コンシステンシー領域の境界付近では複雑性が増加することが明らかとなった。本研究により、コンシステンシーの有無が複雑性に大きく影響を与えることが初めて明らかとなった。

第6章では、時間遅延システムにおける有限時間リアプノフ指数の算出手法を新たに提案し、戻り光を有する半導体レーザに本手法を適用している。初めに代表的な時間遅延システムであるマッキークラスモデルに本手法を適用した。有限時間および遅延時間の変化に対して有限時間リアプノフ指数の確率分布の標準偏差の変化を調査した。その結果、標準偏差はべき乗則に従い減少し、べき指数はほぼ-0.5となった。また戻り光を有する半導体レーザにおいて同様の調査を行った。有限時間

リアプノフ指数の標準偏差は遅延時間の増加に対してべき乗則に従い減少するが、そのべき指数は-0.1程度と小さな値となり、戻り光を有する半導体レーザーは他の時間遅延システムとは異なる特徴を有することが明らかとなった。

第7章では、戻り光を有する半導体レーザーにおいて実験的にリアプノフ指数を算出する手法を提案し、その妥当性を数値計算により示している。その結果、本手法と線形化方程式を用いて算出された最大リアプノフ指数は概ね一致し、本手法の妥当性が示された。さらに戻り光を有する半導体レーザーのリアプノフ指数による複雑性評価の応用として、半導体レーザーカオスの周波数帯域および自己相関関数の増減と複雑性の関係性について調査を行っている。その結果、周波数帯域の増減と複雑性との関係性は低いが、一方で自己相関関数のセカンドピークの減少が最大リアプノフ指数の増加を示すことが分かった。

第8章では本論文で得られた成果をまとめている。

本研究で得られた知見は、半導体レーザーを用いた高速物理乱数生成器の予測不可能性の定量化や、リザーバコンピューティングの情報容量推定への応用に有用であると期待される。

目次

概要	i
第1章 はじめに	1
1.1 背景	1
1.2 目的	3
1.3 本論文の構成	3
第2章 序論	5
2.1 リアプノフ指数	5
2.2 コンシステンシー	7
2.3 物理的一方向性関数	9
2.4 リザーバコンピューティング	12
第3章 戻り光を有する半導体レーザの数値モデルとダイナミクス	15
3.1 半導体レーザのレート方程式	15
3.1.1 シングルモード半導体レーザのレート方程式	16
3.1.2 戻り光を付加した半導体レーザのレート方程式	21
3.1.3 複素電界 E の電界振幅および電界位相への分離	22
3.1.4 複素電界 E の実部および虚部への分離	25
3.1.5 Lang-Kobayashi 方程式の無次元化	26
3.1.6 飽和項	30

3.2	Lang-Kobayashi 方程式の定常解 (平衡点) と線形安定性解析	31
3.2.1	戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式の定常解の導出 . . .	32
3.2.2	定常解に対する線形安定性解析	36
3.2.3	戻り光を有する Lang-Kobayashi 方程式の定常解の導出 . . .	41
3.3	戻り光を有する半導体レーザのダイナミクス	45
3.3.1	戻り光を有する半導体レーザの数値モデルと数値計算におけるパラメータ値	45
3.3.2	戻り光強度の変化	47
3.3.3	利得飽和効果	57
3.4	まとめ	59
第 4 章	戻り光を有する半導体レーザのリアプノフスペクトラム解析	65
4.1	戻り光を有する半導体レーザの数値モデルとレーザパラメータ . . .	65
4.2	一般的なシステムにおけるリアプノフ指数の算出手法	67
4.2.1	リアプノフ指数の定義と QR 分解による算出手法	67
4.2.2	グラム-シュミットの直交化を用いた QR 分解の方法	70
4.3	Lang-Kobayashi 方程式の線形化	72
4.4	戻り光を有する半導体レーザにおける最大リアプノフ指数の算出 . .	74
4.4.1	戻り光を有する半導体レーザにおける最大リアプノフ指数の算出手法	74
4.4.2	最大リアプノフ指数の算出結果	76
4.5	戻り光を有する半導体レーザにおけるリアプノフスペクトラムの算出	78
4.5.1	リアプノフスペクトラムの算出手法	78
4.5.2	リアプノフスペクトラムの算出結果	80
4.6	リアプノフ指数を用いた複雑性の定量化	82
4.6.1	KS エントロピーおよび KY 次元	82

4.6.2	複雑性の戻り光強度への依存性	83
4.6.3	複雑性の様々なパラメータへの依存性	84
4.7	まとめ	88
第 5 章	半導体レーザのコンシステンシーとリアプノフスペクトラム解析	89
5.1	結合レスラーモデルおよび結合マッキークラスモデルにおけるコン システンシー	90
5.1.1	結合レスラーと結合マッキークラスモデル	90
5.1.2	線形化方程式	92
5.1.3	リアプノフスペクトラムの算出手法	94
5.1.4	結合レスラーシステムにおけるリアプノフスペクトラム解析 の数値計算結果	95
5.1.5	結合マッキークラスシステムにおけるリアプノフスペクトラ ム解析の数値計算結果	101
5.2	光結合された半導体レーザにおけるコンシステンシー	103
5.2.1	Response レーザの数値モデル	104
5.2.2	Lang-Kobayashi 方程式の実部・虚部方程式への分離	107
5.2.3	無次元化された結合 Lang-Kobayashi 方程式	108
5.2.4	結合半導体レーザのコンシステンシーの数値計算結果	110
5.3	光結合された半導体レーザにおけるリアプノフスペクトラム解析	113
5.3.1	光結合された Lang-Kobayashi 方程式の線形化	113
5.3.2	光結合された半導体レーザにおけるリアプノフ指数の算出手法	118
5.3.3	リアプノフスペクトラム解析の数値計算結果 (光注入強度へ の複雑性の依存性)	119
5.3.4	リアプノフスペクトラム解析の数値計算結果 (光周波数差へ の複雑性の依存性)	122
5.3.5	2次元パラメータ空間におけるコンシステンシーと複雑性	123

5.3.6	考察	127
5.4	まとめ	128
第 6 章 時間遅延システムにおける有限時間リアプノフ指数の算出手法の提案 130		
6.1	時間遅延ダイナミカルシステムにおける有限時間リアプノフ指数の算出手法	131
6.2	マッキークラスモデルの有限時間リアプノフ指数	133
6.2.1	マッキークラスモデル	133
6.2.2	マッキークラスモデルの有限時間リアプノフ指数の算出結果	133
6.3	戻り光を有する半導体レーザの有限時間リアプノフ指数	139
6.3.1	戻り光を有する半導体レーザモデル	139
6.3.2	Lang-Kobayashi 方程式の線形化	141
6.3.3	有限時間リアプノフ指数の数値計算結果	141
6.4	まとめ	146
第 7 章 戻り光を有する半導体レーザのリアプノフスペクトラム解析の応用 149		
7.1	戻り光を有する半導体レーザにおける一般化同期を用いたリアプノフ指数の推定	149
7.1.1	時間遅延システムにおける完全同期を用いたリアプノフ指数の算出手法	150
7.1.2	戻り光を有する半導体レーザにおける完全同期と一般化同期	152
7.1.3	戻り光を有する半導体レーザにおける一般化同期を用いた最大リアプノフ指数の算出手法	155
7.1.4	数値計算において使用する半導体レーザの数値モデル	156
7.1.5	一般化同期を用いた最大リアプノフ指数の推定の数値計算結果	159
7.1.6	線形化方程式を用いて算出された最大リアプノフ指数との比較	166

7.2	光結合された半導体レーザの周波数帯域および自己相関関数と複雑性増加現象の関係調査	168
7.2.1	半導体レーザモデル	169
7.2.2	周波数帯域の定義	173
7.2.3	自己相関関数の評価方法	174
7.2.4	Lang-Kobayashi 方程式の線形化と最大リアプノフ指数の算出方法	176
7.2.5	光結合された半導体レーザの周波数帯域と自己相関関数の変化	178
7.2.6	周波数帯域および自己相関関数の最大リアプノフ指数との比較	181
7.2.7	周波数帯域, 自己相関関数のセカンドピーク, 最大リアプノフ指数の 2 次元図	183
7.2.8	まとめ	187
第 8 章	結論	189
	謝辞	193

第1章 はじめに

1.1 背景

戻り光を有する半導体レーザは時間遅延ダイナミカルシステムであり、非常に高速で複雑なカオスを出力することができる [1–4]. これまでに戻り光を有する半導体レーザを用いた様々な応用が研究されている. その中の1つとして半導体レーザカオスを用いた高速物理乱数生成が挙げられる [5–11]. これはレーザカオスに対してしきい値を設定し、適当な間隔でサンプリングし、しきい値よりも上ならば1, 下ならば0とすることで0と1のランダムな列を得る手法である. レーザカオスは非常に高速 (数 GHz 程度) であるため, この方法により過去の手法よりも非常に高速な物理乱数生成器を実装することができる.

また近年, 戻り光を有する半導体レーザを用いたリザーバコンピューティングの研究が行われている [12, 13]. リザーバコンピューティングとは機械学習の一種であり, ある信号をリザーバ (貯水池) に入力し, 過渡応答として得られる出力 (水面の振動) の対応関係を予め学習し, その入出力関係により入力信号の分類を行う手法である [14–23]. これは時系列予測や音声認識などの一般に困難な課題に対して有用である. リザーバコンピューティングを実装するために必要な非線形ダイナミカルシステムの性質として, (1) 同一の入力に対して再現性のある出力が得られること, (2) 入力信号を高次元状態空間内へ非線形変換することが挙げられる. 戻り光を有する半導体レーザは時間遅延システムであるため無限次元を有する. そのため前者の性質を満たすことができる. また前者の性質は半導体レーザのコンシステンシー現象により満たすことができる. コンシステンシーとは, 非線形ダイナミカルシステムが繰り返し入力された信号に対して再現性のある応答を示す現象である [3, 24–26]. これまでにレーザにおいてコンシステンシー現象は観測されており, 戻り光を有する半導体レーザを用いたリザーバコンピューティングへの応用が期待されている.

一方で半導体レーザのコンシステンシーを用いた他の応用として, 物理的一方向性関数が期待されている [27, 28]. これはレーザカオスの時間的なダイナミクスを

利用して物理的に一方向性関数を実現する方法であり，ハードウェア依存型の情報セキュリティ方式における重要な要素技術であると考えられる．

これらの応用においてカオスの複雑性は重要な評価指標となりうる．レーザカオスを用いた高速物理乱数生成において，カオスの複雑性を評価することは生成された物理乱数のランダム性を高めるために重要である [29]．また戻り光を有する半導体レーザを用いたリザーバコンピューティングの分類・予測性能や物理的一方向性関数の安全性を高めるためには，コンシステンシー状態の半導体レーザの複雑性を高めることが重要である．

以上の複雑性評価への要望に対し，カオスの複雑性を定量化するための指標としてリアプノフ指数が挙げられる [30]．リアプノフ指数は状態空間において軌道に与えられた微小な揺らぎの指数関数的な拡大率 (縮小率) を表す．リアプノフ指数の逆数はカオスシステムにおける予測の限界時間を与え，高いリアプノフ指数を有するシステムは複雑であると言えることができる．

またリアプノフ指数は時間あるいは空間的に平均化された量であり，レーザカオスを用いた高速物理乱数生成において，局所的な物理乱数のランダム性を評価するために，局所的な軌道の不安定性 (複雑性) も重要となる．これに対してダイナミカルシステムの状態空間における局所的な不安定性を定量化する指標として有限時間リアプノフ指数が提案されている [31–35]．

しかしながらこれまでに戻り光を有する半導体レーザにおけるリアプノフ指数の算出はほとんど行われていない．この理由として，戻り光を有する半導体レーザが時間遅延ダイナミカルシステムであることが挙げられる．連続時間の時間遅延ダイナミカルシステムは無限次元システムであるため，その状態空間の構成方法が一般的なシステムとは異なり，リアプノフ指数の算出を困難にしている．

これに対して Farmer により，時間遅延ダイナミカルシステムの状態空間を定義し，リアプノフ指数を算出する試みが行われた [36]．しかしながら戻り光を有する半導体レーザにおいて高速物理乱数生成に適したレーザパラメータの複雑性の観点からの調査は行われていない．また光結合された半導体レーザにおいてリアプノフ指数を用いた複雑性解析はこれまでに行われておらず，コンシステンシー状態の有無と複雑性の関係は全く分かっていない．加えて時間遅延ダイナミカルシステムにおける有限時間リアプノフ指数の算出手法は未だに確立されていないのが現状である．

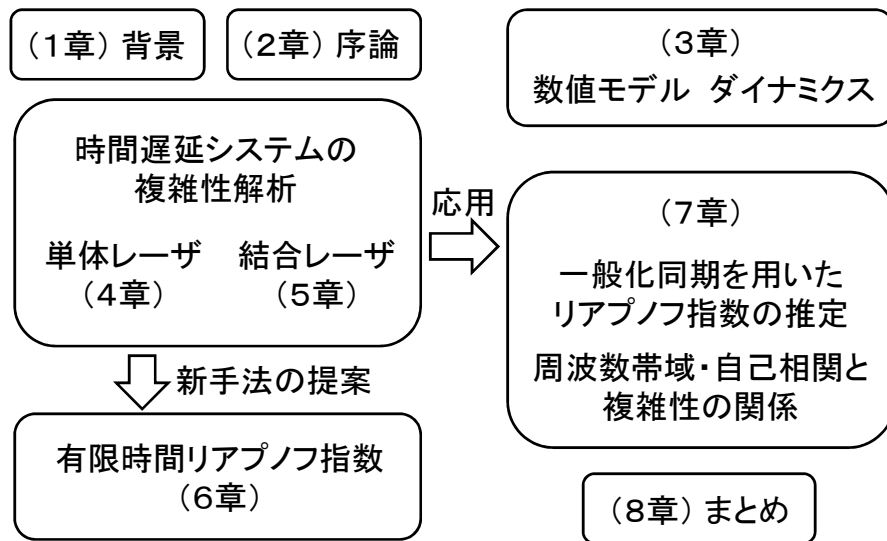


図 1.1: 博士論文の構成

1.2 目的

本研究では戻り光を有する半導体レーザーのリアプノフ指数の算出を行う．さらにリアプノフ指数からエントロピーおよび次元の算出を行うことで複雑性を定量化することで，高速物理乱数生成に適したレーザーパラメータ条件を調査する．また光結合された戻り光を有する半導体レーザーにおいてリアプノフ指数を用いて複雑性を定量化し，コンシステンシー状態の有無との関係を調査する．最後に時間遅延ダイナミカルシステムにおいて有限時間リアプノフ指数の算出手法を提案し，戻り光を有する半導体レーザーに適用する．

1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである (図 1.1 参照)．

第2章ではリアプノフ指数，コンシステンシーや半導体レーザーの応用について述べる．第3章では本研究で使用する戻り光を有する半導体レーザーのレート方程式を示し，数値計算において使用する方程式を導出する．また導出された方程式を用いて戻り光を有する半導体レーザーの基本的なダイナミクスについて示す．第4章では戻り光を有する半導体レーザーにおけるリアプノフ指数の算出方法を説明し，リアプ

ノフ指数を用いた複雑性の解析結果を示す。第5章では一方向に光結合された半導体レーザにおけるコンシステンシーを観測し、リアプノフスペクトラム解析により評価された複雑性とコンシステンシーとの関連性について調査する。第6章では時間遅延ダイナミカルシステムにおける有限時間リアプノフ指数の算出手法を提案し、マッキーグラスモデルおよび戻り光を有する半導体レーザに対して本手法を適用した結果を示す。第7章では戻り光を有する半導体レーザの複雑性解析を用いた応用について述べる。最後に第8章で結論を述べる。

第2章 序論

2.1 リアプノフ指数

カオスの大きな特徴の一つとして、初期値鋭敏性から由来する軌道不安定性が挙げられる。この性質は、力学系において微小な誤差を持つ2つの状態を考えた時に、決定論的な法則に従っているにも関わらず、一定の時間が経過すると全く異なる挙動を示すことである。この軌道不安定性を評価する量のことをリアプノフ指数と呼び、状態空間の軌道に与えられた微小揺らぎの指数関数的な拡大率(縮小率)として定義される [30]。

リアプノフ指数 λ と軌道不安定性の関係を図 2.1 に示す。ある時刻 ($t = 0$) において差が ϵ_0 である2つの状態が時間変化し、 τ 秒後にその差が $\epsilon_0 \exp(\lambda\tau)$ となったとする。この時の差の指数関数的な拡大率 λ がリアプノフ指数である。 $\lambda > 0$ であれば差は指数関数的に拡大するため軌道が不安定であることを示し、システムの振る舞いがカオスであることを意味する。反対に $\lambda < 0$ であれば差は縮小し、軌道が安定であることを意味する。このようにリアプノフ指数はカオスの代表的な特徴である軌道不安定性を定量化するための指標であり、力学系がカオスであるかどうかを判定するための方法として用いることができる。

対象とする力学系の次元が2以上である場合、リアプノフ指数は力学系の次元と

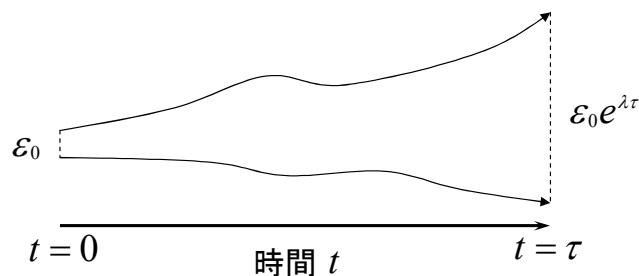


図 2.1: リアプノフ指数と誤差拡大率の関係

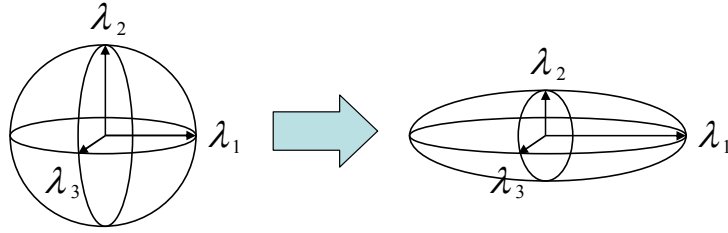


図 2.2: 3次元力学系におけるリアプノフスペクトラムの概念図

同じ数だけ算出することが可能である．図 2.2 に 3 次元力学系における状態空間とリアプノフ指数の関係を示す．3 次元の力学系において，3 つのリアプノフ指数を算出することができる．図 2.2 に示されるように，3 次元の空間において力学系の初期状態の集合からなる球を考える．この空間を力学系により発展させた時，ある方向に空間が拡大し，またある方向には伸びも縮みもせず，ある方向には空間が縮小したとする．この時，拡大した方向のリアプノフ指数 λ_1 は正であり，伸びも縮みもしない方向のリアプノフ指数 λ_2 は 0 であり，縮小する方向のリアプノフ指数 λ_3 は負である．このように多次元力学系において次元と等しい数のリアプノフ指数を算出することができ，このリアプノフ指数の組をリアプノフスペクトラムと呼ぶ．

非線形ダイナミカルシステムのリアプノフ指数はこれまでに数値的および実験的のどちらにおいても多くの研究が行われている．対象とするシステムのモデル方程式が既知である場合，リアプノフ指数を算出するための最もスタンダードな手法は，状態空間の軌道に対して微小揺らぎを仮定し，モデル方程式を線形化する方法である [30, 37–41]．この時システムが離散時間ダイナミカルシステムであれば，線形化により得られるヤコビ行列は微小揺らぎを時間発展させる写像行列となり，ヤコビ行列を用いてリアプノフ指数を算出することができる [38]．一方でシステムが連続時間ダイナミカルシステムの場合，線形化方程式を適当な方法により数値積分することで微小揺らぎの時間発展を計算する必要がある．線形化方程式を数値積分することで微小揺らぎの時間発展させる写像行列を算出し，この写像行列を用いることでリアプノフ指数を算出することができる [30, 37–40, 42, 43]．離散時間および連続時間のどちらのシステムにおいても，線形化方程式を用いてリアプノフ指数を算出する場合，QR 分解や特異値分解 (Singular Value Decomposition, SVD) を用いる手法が一般的である [37, 38, 44]．しかしながらこれらの方法は数値計算において微小揺らぎの規格化と直交化を必要とするため計算量が大きくなる．これに対して連続時間ダイナミカルシステムにおいて Continuous Method と呼ばれる手法が提案されている [38]．この方法は既存の QR 分解や特異値分解を応用した手法であり，線形化方程式からリアプノフ指数の時間発展を表す微分方程式を導出し，その方程式を

用いてリアプノフ指数を算出する．この方法では規格化や直交化といった操作は必要ないが，一部のリアプノフ指数のみを算出することができないという問題が存在する．この問題に対して個々のリアプノフ指数を算出可能にした方法も提案されている [40, 45, 46]．

以上のようにモデル方程式が既知である場合には線形化方程式を用いることで，良い精度でリアプノフ指数を算出することができる．一方でモデル方程式が未知である場合，時系列から埋め込み手法により状態空間の軌道を再構成してリアプノフ指数を算出する方法が一般的である [47–53]．これらの方法では埋め込みにより得られた軌道に対して微小揺らぎを仮定し，ヤコビ行列に相当する微小揺らぎを時間発展させる行列を算出し，その行列を用いてリアプノフ指数を算出する．実験で得られた時系列などは必ずノイズを含んでいるため，ノイズに強い手法も提案されている [51, 52]．

以上のように数值的，実験的にリアプノフ指数の算出に関する研究はこれまでに広く行われている．またリアプノフ指数の算出は生物，化学，物理システムに対する非線形時系列解析手法，カオスダイナミクスの複雑性解析手法として広く用いられている [26, 29, 54, 55]．リアプノフ指数は決定論的カオスの力学的特徴である軌道不安定性を定量化する指標であり，対象とするシステムのモデルが未知であってもリアプノフ指数が正であれば決定論的カオスであることが判別できる．これはシステムが決定論的な性質を持つという意味で重要である．またリアプノフ指数が大きければ，解析対象のシステムはより強い不安定性を有していることを意味し，これはシステムが高い複雑性を有していると考えることができる．さらに予測の分野においてもリアプノフ指数の推定は重要である．対象とするシステムがカオスな振る舞いを示すシステムであったとしても，そのシステムのモデルを用いることで高精度な予測が可能かもしれない．しかしながらカオスが持つ初期値鋭敏性のため予測には必ず限界が存在する．この時の予測限界の尺度を表すのが正のリアプノフ指数の和により定量化される Kolmogorov-Sinai エントロピーである [30]．このように予測の限界を与えるという意味でリアプノフ指数の推定が重要となる．

2.2 コンシステンシー

非線形ダイナミカルシステムが示す特徴の一つとしてコンシステンシー現象が挙げられる．コンシステンシーとは非線形ダイナミカルシステムが同一の信号によって繰り返し駆動された時に得られる出力の再現性を言う [24]．コンシステンシーの概念図を図 2.3 に示す．非線形ダイナミカルシステムがカオスのような複雑

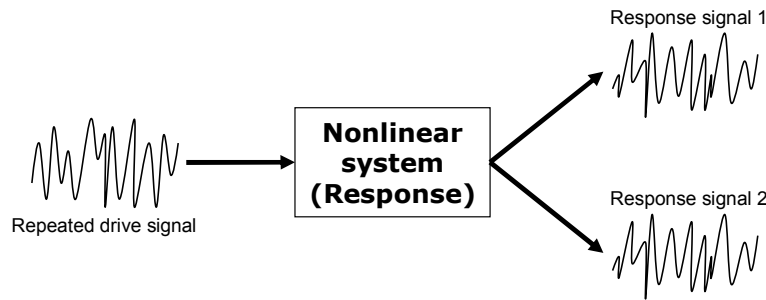


図 2.3: コンシステンシーの概念図. 1つの複雑信号 (Repeated drive signal) で非線形システム (Nonlinear system) を繰り返し駆動した時に, それぞれの入力に対して非線形システムの応答信号 (Response signal 1, Response signal 2) を得た時に同一の信号となる.

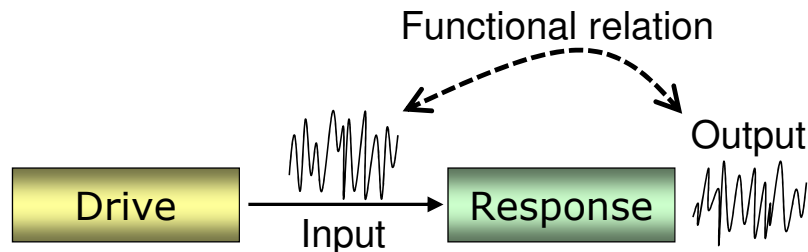


図 2.4: 一方向に結合された2つのシステムにおける一般化同期の概念図. Drive してむから出力された信号を Response システムに入力し, Response システムの応答出力を得る. この時に Drive-Response 間に関数関係が存在する.

な振る舞いを示しているときに全く同一の信号で繰り返し駆動することを考える. この時システムの状態が入力を行うたびに異なるため, システムは同一入力に対して同一の応答を示さない. しかしながらコンシステンシー状態であれば, 入力ごとにシステムの状態が異なっていたとしても同一の応答出力を示す.

コンシステンシーは一般化同期に関係した現象である. 一般化同期とは一方向に結合された2つのシステムが関数関係により関係づけられる同期現象である [56–60]. 図2.4に一般化同期の概念図を示す. Drive から出力された信号を一方向に Response に入力することを考える. 一般的な同期現象は Drive と Response を結合させることにより, それぞれの出力信号が一致する (完全同期), または出力信号の振動の位相が一致する (位相同期) 現象を言う. しかしながら一般化同期では Drive と Response の出力信号は一致せず, 関数関係のみ存在する. これは同一の Drive 信号に対して同一の Response 信号が得られるという意味である. この点でコンシステンシーと良く

似た現象である。しかし一般化同期は2つのシステム (図 2.4 では Drive と Response) の関係について述べられた現象であるのに対して、コンシステンシーは1つのシステムに対して任意の入力に対するシステムの応答の関係について述べられた現象である点で異なる。つまりコンシステンシーは入力側のシステムを考える必要がなく、任意の信号を用いるという点が重要である。

コンシステンシーは様々な非線形システムにおいて観察することができる。これまでにレーザにおけるコンシステンシーが実験的に観察されている [24]。戻り光を有する半導体レーザのような非線形システムのコンシステンシーを用いることにより、比較的複雑でない入力信号を複雑な応答信号に変換することができるポテンシャルを有していると考えられる。これは複雑な応答信号から入力信号が推測不可能という観点から物理的一方向性関数のようなハードウェア依存型のセキュリティ方式への応用が考えられる [27]。またコンシステンシーはリザーバコンピューティングを実現するために重要な性質である [17]。このようにコンシステンシーを用いた様々な応用が期待されている。

またコンシステンシーのように入力に対するシステムの応答の再現性を調査することは、脳の情報処理において重要であると考えられ、これまでにニューラルネットワークにおけるコンシステンシーも調査されている [61]。さらに入力に対するシステムの応答出力をアンサンブル平均により特徴化し、再現性のある振る舞いを調査する研究も行われている [62]。

2.3 物理的一方向性関数

現代の暗号技術の多くは一方向性関数に基づいている。一方向性関数の概念図を図 2.5 に示す。一方向性関数とは、 $f(x) = y$ となる関数を考えた時に、入力 x から y は容易に求めることができるが、出力 y から x を求めることが困難な関数のことを言う。例えば、大きな素数の積を計算することは多項式時間で行うことができるが、積の素数要素を見つけることは指数時間の計算量を必要とすると考えられている。

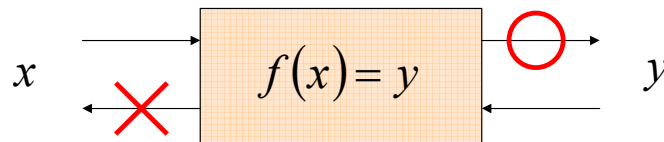


図 2.5: 一方向性関数の概念図

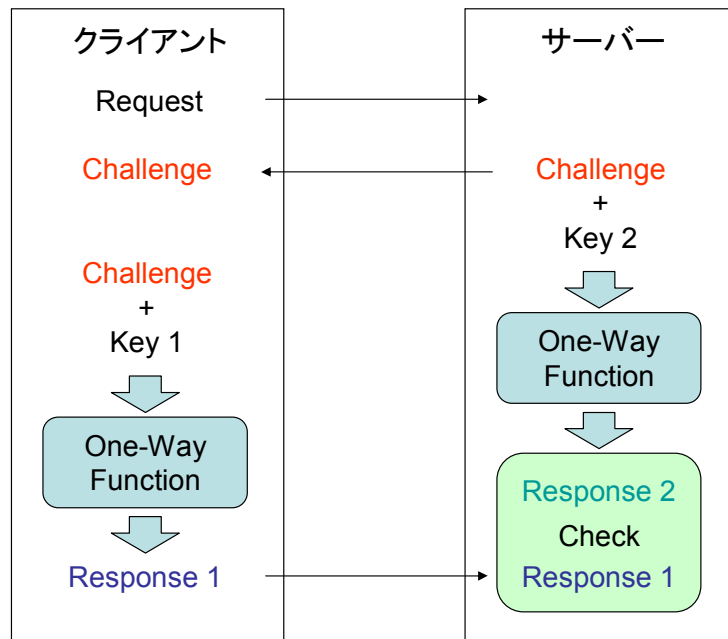


図 2.6: Challenge-Response 認証方式

この一方向性関数の応用の一つとして Challenge-Response 認証方式が挙げられる。図 2.6 に一方向性関数を利用した Challenge-Response 認証方式の概要を示す。まずクライアントがサーバに対して認証要求 (Request) を行う。Request を受け取ったサーバはクライアントに Challenge と呼ばれるデータを送信する。クライアントは送られてきた Challenge とあらかじめ用意してある鍵 (Key 1) を一方向性関数 (One-Way Function) を用いて暗号化する。暗号化して得られたデータ (Response 1) をサーバに送信する。サーバもクライアントと同様にあらかじめ登録されていた鍵 (Key 2) とクライアントに送信した Challenge データを一方向性関数を用いて暗号化し、Response 2 データを得る。この時、クライアントから送られてきた Response 1 とサーバ自身が作成した Response 2 が同じデータであれば認証が成功されたことになる。Response 1 と Response 2 が同一となるためには、サーバに用意されていた鍵とクライアントが用いた鍵が等しくなければならず、また使用する一方向性関数も同じものでなければならない。

このように使用されている一方向性関数の中でも、アルゴリズムで実現されたものは広く用いられているが、いくつかの課題も存在する。例えば、超並列計算機が安全であると考えられていた暗号を破ってしまうことや、安全であると考えられてきた暗号プリミティブに対する効率的な攻撃方法が新たに発見されてしまうといっ

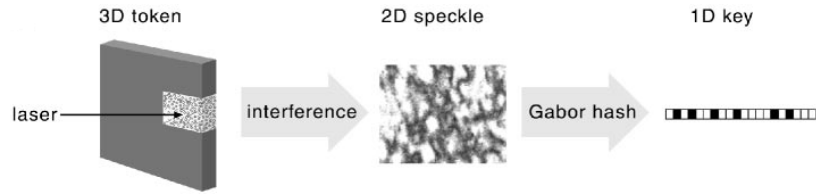


図 2.7: レーザのスペックル散乱を利用した物理的一方向性関数 [27]

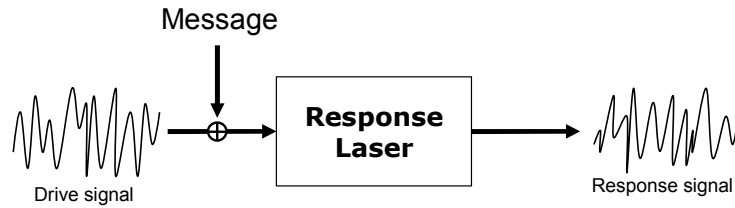


図 2.8: レーザのコンシステンシーを利用した物理的一方向性関数

たことである。

このような課題は物理的一方向性関数を用いることで解決可能であることがすでに述べられている [27]。図 2.7 にレーザのスペックル散乱を利用した物理的一方向性関数の例を示す。スペックル散乱とは、表面が不均質な媒体に対してレーザ光を照射した時にレーザ光が散乱される現象である。図 2.7 ではまず不均質な媒体を内部に複数含む散乱体 (3D token) を用意する。この散乱体にレーザ光を照射することでスペックル散乱が生じ、その時の散乱されたレーザ光強度の二次元画像を得る。ここで得られた二次元画像に対して Gabor 変換を施すことで鍵を得る。散乱体に、同じ位置、同じ角度および同じ強度でレーザを照射すれば同じスペックル散乱画像を得ることができるので一方向性関数として利用することができる。

ここで示した例では散乱体の空間的な配置を利用して物理的一方向性関数を実現しているが、レーザの時間的なダイナミクスを利用して物理的一方向性関数を実現することが考えられている。これがレーザのコンシステンシーを利用した物理的一方向性関数である。図 2.8 で示すように、駆動信号 (Drive signal) にメッセージ (Message) を付加して Response レーザに入力することで応答信号 (Response signal) を得る。レーザがコンシステンシー状態であれば同じ駆動信号とメッセージによって同じ応答信号を得ることができる。しかしながら応答信号から駆動信号およびメッセージを推測することは困難であり、物理的一方向性関数を実装することができる。

2.4 リザーバコンピューティング

リザーバコンピューティング (Reservoir Computing) は機械学習の一種であり，時系列予測や音声認識などの一般に計算困難な課題に対して有用な情報処理手法である [16–19, 63]．リザーバコンピューティングによる情報処理の概念は，ある信号をリザーバ (貯水池) に入力し，過渡応答として得られる出力 (水面の振動) の対応関係を予め学習し，その入出力関係により入力信号の分類を行うということである．リザーバコンピューティングとして Liquid State Machines [14]，Echo State Networks [64]，Backpropagation-Decorrelation [65] といった手法がこれまでに提案されている．

リザーバコンピューティングの模式図を図 2.9 に示す．図 2.9 に示されているように，リザーバコンピューティングは入力部，リザーバ，および出力部の 3 つの部分から構成される．通常リザーバはランダムに内部結合された多くの非線形ノード，つまりリカレントニューラルネットワークからなる [66]．この時ネットワークの各ノードの結合強度は時間に対して変化しない．このリザーバの各ノードに対してランダムに重み付けされた入力信号を与える．入力に対して各ノードは過渡応答を示し，その状態を変化させる．この時の各ノードの状態の重み付き線形和をリザーバの出力とする．ここで繰り返し同一の信号を入力した時に，リザーバの応答出力に再現性 (コンシステンシー) があれば入力信号の分類が可能となり，時系列予測や音声認識を行うことが可能となる．

リザーバとして用いられる非線形システムに要求される能力として，(1) 同一の入力に対して再現性のある出力が得られること，(2) 入力信号を高次元状態空間内へ非線形変換すること，の二点が挙げられる．前者は入力信号の分類を行うための基本的な能力であり，コンシステンシーを用いて達成可能であると考えられる．後者の概念を図 2.10 に示す．図 2.10 の上の図は 2 次元空間において黄色の丸と赤色の星を分類することを考えている．しかしながら 2 次元空間上では直線により線形分

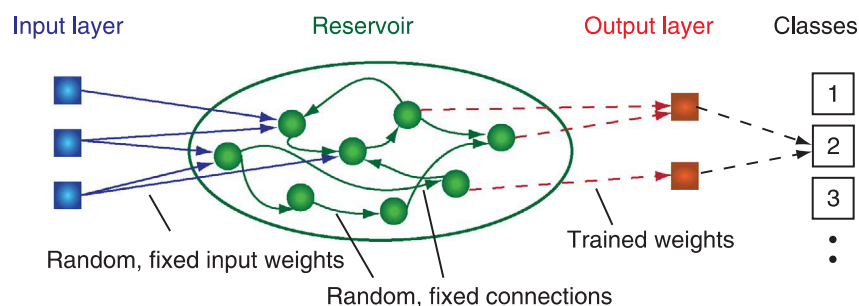


図 2.9: ニューラルネットワークを用いたリザーバコンピューティング [17]．

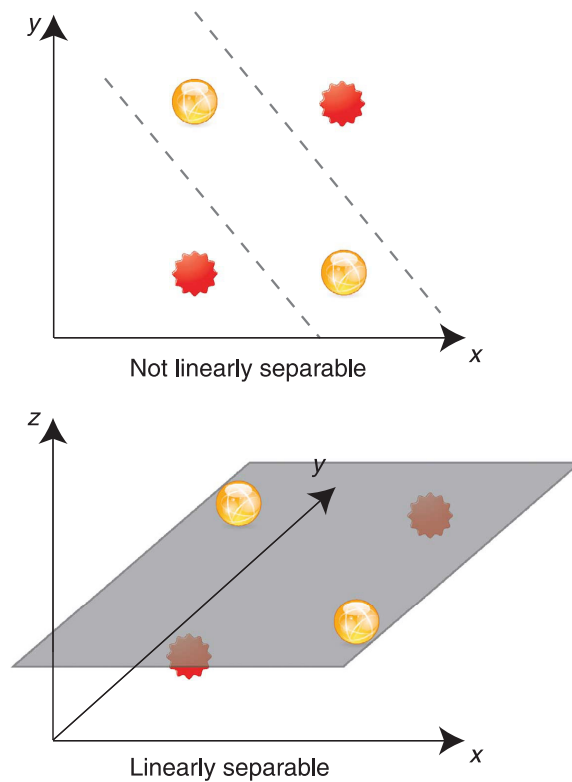


図 2.10: (a) ニューラルネットワークを用いたリザーバコンピューティングおよび (b) 時間遅延ダイナミカルシステムを用いたリザーバコンピューティング [17].

離できないことを表している．一方で図 2.10 の下の図は上の黄色の丸と赤色の星を 3 次元空間上に写像した図を表している．図 2.10 上では平面を用いて線形分離可能であることが分かる．このように低次元空間では分離できなかった状態は高次元空間に写像することにより分離することができるようになる．したがってリザーバコンピューティングにおいて，リザーバは入力信号をより複雑な信号に変換する能力を有していなければならない．

ニューラルネットワークを用いたリザーバコンピューティングにおいてリザーバの次元を高めるには，ネットワークのノード数を増加させる必要がある．しかしながらリザーバコンピューティングに用いるニューラルネットワークのノード数は 100 から 1000 個と多く，実験的にリザーバコンピューティングを実装する時にノード数を増加させることが容易ではない．しかしながら近年，時間遅延ダイナミカルシステムを用いたリザーバコンピューティングが提案されており，このシステムでは容易にノード数を増加させることができる [12, 13, 17, 20–23]．図 2.11 に時間遅延ダ

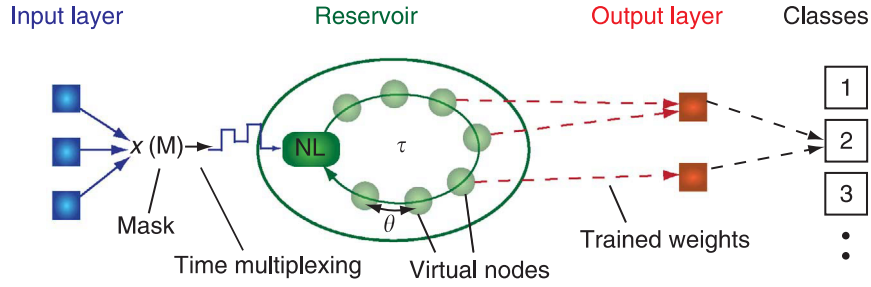


図 2.11: 時間遅延ダイナミカルシステムを用いたリザーバコンピューティング [17]. τ は遅延時間, θ は仮想ノードの間隔を表す.

イナミカルシステムを用いたリザーバコンピューティングの模式図を示す. リザーバは1つの非線形ノード (NL) と時間遅延フィードバックからなる. このシステムにおいて遅延時間 τ を微小な時間 θ で区切ることにより仮想的なノードの集合であるとする. このシステムは1つの非線形ノードと時間遅延フィードバックにより構成されるために実験実装が容易である. また時間遅延フィードバックを長くすることにより容易にノード数を増加させることができる.

時間遅延ダイナミカルシステムは理論的に無限次元の状態空間を持つことが知られている. 実用的には状態空間は有限次元であるが [67], それでも非常に高い次元を有しているため複雑なダイナミクスを示す. ゆえに入力信号を高次元空間へ写像するというリザーバとして必要な能力を有していると考えられる. また戻り光を有する半導体レーザのような非常に速いダイナミクス (数 GHz 程度の振動周波数) を有する時間遅延ダイナミカルシステムを用いることで, 高速な情報処理が可能なりザーバコンピューティングを実装することができる [12, 13].

リザーバコンピューティングへの応用において非線形システムが有する複雑性 (次元やエントロピー) は, その分類性能の評価指標となり得る. コンシステンシー状態の非線形システムがより高い次元を持つならばリザーバコンピューティングの分類性能は向上すると期待できる. これに対して非線形ダイナミカルシステムの複雑性を定量化する指標として, リアプノフ指数から算出可能な Kaplan-York 次元と Kolmogorov-Sinai エントロピーが挙げられる. リザーバコンピューティングの性能はリザーバが持つ複雑性 (入力信号を複雑な信号に変換する能力) に依存すると考えられるが, これまでに非線形時系列解析手法により定量化されたりザーバ (非線形ダイナミカルシステム) の複雑性とリザーバコンピューティングの性能の関係性は調査されていない. これはより性能の高いリザーバコンピューティングを実装するために重要な課題である.

第3章 戻り光を有する半導体レーザの数値モデルとダイナミクス

本章では数値計算において使用する戻り光を有する半導体レーザの数値モデルである Lang-Kobayashi 方程式の導出を行い，導出された方程式を用いて戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスの数値計算結果を示す．本章で導出された Lang-Kobayashi 方程式は複素電界およびキャリア密度の微分方程式からなる．しかしながら複素数は数値計算に適さないため，複素電界を電界振幅と電界位相に分離した方程式と電界実部と電界虚部に分離した2種類の方程式を示す．また次章以降で行うリアプノフスペクトラム解析を行う場合，方程式が無次元化されていることが数値計算上望ましい．そのため導出された方程式の無次元化の方法について説明する．

さらに本章では以上の方法により得られた数値モデルを用いて戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスを調査する方法について述べる．まず戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式の定常解(平衡点)を導出し，線形安定性解析を適用することにより，半導体レーザの基本的な特性である緩和振動周波数を導出する．次に戻り光を有する Lang-Kobayashi 方程式の定常解を導出する．戻り光を有する Lang-Kobayashi 方程式は多くの定常解を持ち，これらの解が次に示すダイナミクスと密接に関連するため，半導体レーザのダイナミクスを理解するために重要である．最後に Lang-Kobayashi 方程式を数値的に解くことにより，戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスを示す．特に戻り光強度を変化させた時の分岐現象と半導体レーザのダイナミクスを調査するために有用となる手法について述べる．

3.1 半導体レーザのレート方程式

本節では戻り光を有する半導体レーザのレート方程式である Lang-Kobayashi 方程式の導出を行う．第 3.1.1 節ではシングルモードの半導体レーザのレート方程式を導出する．ここでは光共振器に対して境界条件を仮定することによりレート方程式の導出を行っている．第 3.1.2 節では第 3.1.1 節で導出したレート方程式に対して，

戻り光を付加したレート方程式の導出を行っている．第 3.1.2 節で導出された方程式は半導体レーザの電界 E が複素数であるため数値計算に適さない．そのため第 3.1.3 節および第 3.1.4 節において複素数を含まないレート方程式の導出を行う．さらに第 3.1.5 節では導出された Lang-Kobayashi 方程式の無次元化を行う．方程式の無次元化は次章以降で戻り光を有する半導体レーザのリアプノフスペクトラム解析を行う際に，数値計算の誤差を避けるために必要である．第 3.1.6 節では導出された Lang-Kobayashi 方程式に対して飽和効果を付加する．

3.1.1 シングルモード半導体レーザのレート方程式

本節ではシングルモードの端面発光半導体レーザのレート方程式の導出を示す [2, 3, 68]．特に光電界 $\hat{E}(t)$ の包絡線成分であるゆっくり変化する複素電界振幅 $E(t)$ の時間的な振る舞いを描写するレート方程式を導出する．半導体レーザのレート方程式を導出するために，まず単純な Fabry-Perot 共振器のモデルを図 3.1 に示す．図 3.1 において l は共振器長を表し，共振器の前部および後部の反射率をそれぞれ r_1 , r_2 として表す．共振器内部で前方および後方に伝搬する複素電界を \hat{E}_f , \hat{E}_b と表す．ある固定された時間において共振器の位置に依存して，複素電界 $\hat{E}_f(z)$, $\hat{E}_b(z)$ は

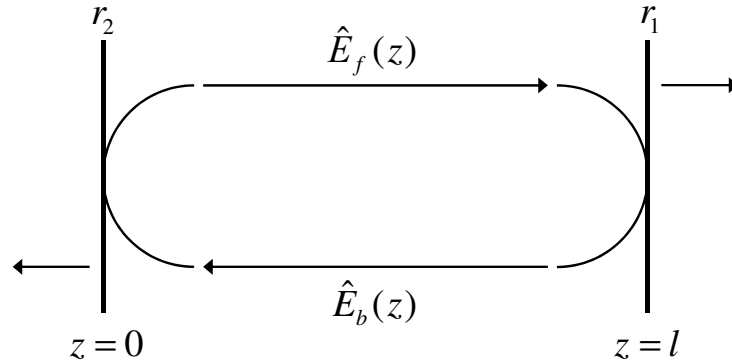


図 3.1: 2つの鏡 (それぞれの反射率は r_1 , r_2) を有する共振器からなる半導体レーザのモデル． $\hat{E}_f(z)$, $\hat{E}_b(z)$ はそれぞれ前方と後方に進む光の位置 z における複素電界を表す．また l は共振器長を表す．

それぞれ次のように表される.

$$\hat{E}_f(z) = \hat{E}_{0f} \exp \left[ikz + \frac{1}{2}(g - a)z \right] \quad (3.1)$$

$$\hat{E}_b(z) = \hat{E}_{0b} \exp \left[ik(l - z) + \frac{1}{2}(g - a)(l - z) \right] \quad (3.2)$$

上式において, g はレーザ媒質内における誘導放出による利得であり a は光の散乱や吸収による損失である. 全てのパラメータはレーザ強度に関連して定義されているため, 式 (3.1), (3.2) において要素 $1/2$ が挿入されている. また k は波数と呼ばれ, レーザ媒質の屈折率 η に依存し, レーザの発振しきい値における光角周波数 ω_{th} , キャリア密度 n_{th} および屈折率 η_0 を用いて次のように表される.

$$k = \eta \frac{\omega}{c} = \frac{\omega_{th}}{c} \left\{ \eta_0 + \frac{\partial \eta}{\partial N} (N - N_{th}) + \frac{\eta_e}{\omega_{th}} (\omega - \omega_{th}) \right\} \quad (3.3)$$

ここで N はキャリア密度, ω は光角周波数, η_e は実効屈折率である.

共振器の端面における境界条件 ($\hat{E}_f(0) = r_2 \hat{E}_b(0)$, $\hat{E}_b(l) = r_1 \hat{E}_f(l)$) から, レーザ発振のための定常状態の条件は次のように与えられる.

$$r_1 r_2 \exp \{ -2ikl + (g - a)l \} = 1 \quad (3.4)$$

式 (3.4) の実部からレーザ発振のための媒質のしきい値利得 g_{th} は次のように表される.

$$g_{th} = a + \frac{1}{2l} \ln \left(\frac{1}{r_1 r_2} \right) \quad (3.5)$$

半導体レーザは活性層内で自然放出光を持つため, 実際のしきい値利得は式 (3.5) よりも少し小さくなる. また式 (3.4) の虚部から以下の位相条件が与えられる.

$$kl = m\pi \quad (3.6)$$

ここで m は整数である. 式 (3.5) はレーザの発振しきい値のための条件であり, 共振器内部の利得と光の反射や吸収による損失のバランスを表すと解釈できる.

半導体レーザのレート方程式を導出するために, 発振しきい値における利得を考える. 共振器内部において光が一往復した後の光利得は定常状態のレーザ発振条件を表す式 (3.4) と同じ方程式により表される.

$$G = r_1 r_2 \exp \{ -2ikl + (g - a)l \} \quad (3.7)$$

式 (3.3) を用いると利得 G は次のように周波数依存の項 G_2 と周波数無依存の項 G_1 に分けることができる.

$$G = G_1 G_2 \quad (3.8)$$

$$G_1 = r_1 r_2 \exp \left\{ (g - a)l - 2i \frac{\omega_{th} l}{c} \frac{\partial \eta}{\partial N} (N - N_{th}) \right\} \quad (3.9)$$

$$G_2 = \exp \left[-2i \frac{\omega_{th} l}{c} \left\{ \eta_0 + \frac{\eta_e}{\omega_{th}} (\omega - \omega_{th}) \right\} \right] \quad (3.10)$$

式 (3.10) で, レーザ発振の条件から位相 $2\omega_{th}\eta_0 l/c$ が 2π の整数倍でなければならない. また $i\omega$ が作用素 d/dt と等価であるとして置き換え, 共振器内での光の往復時間 $\tau_{in} = 2\eta_e l/c$ を用いることにより式 (3.10) は

$$G_2 = \exp\{-i\tau_{in}(\omega - \omega_{th})\} = \exp(i\omega_{th}\tau_{in}) \exp(-\tau_{in} \frac{d}{dt}) \quad (3.11)$$

と書き表すことができる.

レーザ発振が達成されるためには, 共振器内での光の往復後の複素電界が往復前の電界と正確に一致しなければならないので, $z = 0$ での複素電界は

$$\hat{E}_f(t) = G \hat{E}_f(t) \quad (3.12)$$

という関係を持つ. ここで G は式 (3.8), 式 (3.11) を用いて

$$G = G_1 \exp(i\omega_{th}\tau_{in}) \exp\left(-\tau_{in} \frac{d}{dt}\right) \quad (3.13)$$

と表すことができる. 式 (3.12) に式 (3.13) を代入すると,

$$\hat{E}_f(t) = G_1 \exp(i\omega_{th}\tau_{in}) \exp\left(-\tau_{in} \frac{d}{dt}\right) \hat{E}_f(t) \quad (3.14)$$

となる. $\exp(-\tau_{in} d/dt)$ は $-\tau_{in}$ 秒の時間シフトを意味するので, 式 (3.14) は次のように式変形される.

$$\hat{E}_f(t) = G_1 \exp(i\omega_{th}\tau_{in}) \hat{E}_f(t - \tau_{in}) \quad (3.15)$$

ここで $\hat{E}_f(t)$ をレーザの光角周波数 ω_{th} で変化する項と, それと比較してゆっくりと変化する項 $E_f(t)$ 分けると考えると, 複素電界は

$$\hat{E}_f(t) = E_f(t) \exp(i\omega_{th}t) \quad (3.16)$$

と表される. 式 (3.16) を式 (3.15) に代入して整理すると

$$E_f(t) = G_1 E_f(t - \tau_{in}) \quad (3.17)$$

となる．ここまで前方向に伝搬する光電界について考えてきたが，後方向に伝搬する光電界についても式 (3.17) と同様の関係を得ることができる．この時，全体の電界 $E(t)$ も式 (3.17) の関係を満たすと考えることができる．さらに共振器内における光の往復時間 τ_{in} は非常に小さいので，

$$E(t - \tau_{in}) = E(t) - \tau_{in} \frac{dE(t)}{dt} \quad (3.18)$$

と近似することができる．この時，式 (3.18) と $E(t)$ が式 (3.17) を満たすことから

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_{in}} \left(1 - \frac{1}{G_1} \right) E(t) \quad (3.19)$$

を得る．ここで G_1 はレーザ発振の振動に対して一定に非常に近いので，

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_1} &= \exp \left[-(g - a)l - \frac{1}{2} \ln(R_1 R_2) + 2i \frac{\omega_{th} l}{c} \frac{\partial \eta}{\partial N} (N - N_{th}) \right] \\ &\approx 1 - (g - a)l - \frac{1}{2} \ln(R_1 R_2) + 2i \frac{\omega_{th} l}{c} \frac{\partial \eta}{\partial N} (N - N_{th}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

と近似できる．式 (3.19) に式 (3.20)，(3.5) を代入して整理すると，

$$\frac{1}{\tau_{in}} \left(1 - \frac{1}{G_1} \right) = \frac{c}{2\eta_e} (g - g_{th}) - i \frac{\omega_{th}}{\eta_e} \frac{\partial \eta}{\partial N} (N - N_{th}) \quad (3.21)$$

となる．ただし

$$\tau_{in} = \frac{2\eta_e l}{c} \quad (3.22)$$

という関係を用いた．さらに利得 g はレーザ閾値付近でキャリア密度 n にほとんど線形に増加することから，

$$g = g_{th} + \frac{\partial g}{\partial N} (N - N_{th}) \quad (3.23)$$

という関係が得られるため，これと式 (3.21) から

$$\frac{dE(t)}{dt} = \left[\frac{c}{2\eta_e} \frac{\partial g}{\partial N} (N - N_{th}) - i \frac{\omega_{th}}{c} \frac{\partial \eta}{\partial N} (N - N_{th}) \right] E(t) \quad (3.24)$$

という微分方程式を得られる．ここで線幅増幅係数 α というパラメータを導入する．このパラメータは屈折率の実部と虚部を関係付けるパラメータであり

$$\alpha = -2 \frac{\omega}{c} \frac{\partial \eta / \partial N}{\partial g / \partial N} \quad (3.25)$$

のように表される．半導体レーザにおける線幅増幅係数は非常に大きく，一般的には3から7程度である．線幅増幅係数を用いると，式 (3.24) は

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{c}{2\eta_e} \frac{\partial g}{\partial N} (1 + i\alpha)(N - N_{th})E(t) \quad (3.26)$$

となり，さらに微分利得 $G_N = \frac{c}{\eta_e} \frac{\partial g}{\partial N}$ を用いると，

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2} G_N (1 + i\alpha)(N - N_{th})E(t) \quad (3.27)$$

と表すことができる．式 (3.27) が半導体レーザの複素電界を表す微分方程式である．式 (3.27) は光子寿命 τ_p と閾値でのキャリア密度 N_{th} の関係

$$G_N(N_{th} - N_0) = \frac{1}{\tau_p} \quad (3.28)$$

を用いると

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1 + i\alpha}{2} \left[G_N(N - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] E(t) \quad (3.29)$$

を得る．これがシングルモードレーザの複素電界 $E(t)$ を表すレート方程式である．

レーザの振る舞いを表すには式 (3.29) だけでは十分ではなく，キャリア密度を表すレート方程式が必要である．キャリア密度 N の振る舞いを描写する一般的な方程式は

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\nabla^2 N + \frac{I}{e} - \frac{N}{\tau_s} - R_{st}(N, |E|^2) \quad (3.30)$$

である．式 (3.30) の最初の項はキャリア拡散を意味し， D は拡散係数である．活性層内のキャリア分布が大きく変化しないと仮定すると，式 (3.30) の拡散の項は無視できる．2番目の項は電流 J によって活性層に注入されるホール電子対を表している． e は電子の電荷の大きさである．3番目の項は自然放出や非放射遷移によるキャリアの損失を表しており， τ_s はキャリア寿命である．最後の項は誘導放出によるキャリアの損失率を表しており，

$$R_{ST}(N, |E|^2) = G_N(N - N_0)|E|^2 \quad (3.31)$$

で与えられる．したがってキャリア密度のレート方程式は

$$\frac{dN(t)}{dt} = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - G_N(N(t) - N_0)|E|^2 \quad (3.32)$$

と表される．ここで $I/e = J$ と置いた．式 (3.32) および式 (3.29) が本節で目的としていたレート方程式である．

3.1.2 戻り光を付加した半導体レーザのレート方程式

本節ではコヒーレントな戻り光を付加した半導体レーザのレート方程式を導出する [2, 3, 68]. まずレーザ光の出力面から距離 l_{ext} の位置に反射率 r_3 の外部鏡があり, その鏡により反射されたレーザ光がレーザ自身に戻されるというモデルを考える. そのモデルが図 3.2 であり, その外部共振器長における光の往復時間 τ は $\tau = 2l_{ext}/c$ である.

図 3.2 において t_2 および t'_2 はそれぞれレーザ内部から出力される光の振幅透過率とレーザ外部から入射される光の振幅透過率である. 共振器内へと入射する外部鏡により反射された複素電界 $t'_2 E_{ext}(t)$ は外部共振器内では無限に往復するため,

$$t'_2 \hat{E}_{ext}(t) = r_3 t_2 t'_2 \hat{E}_b(t - \tau) + r'_2 r_3^2 t_2 t'_1 \hat{E}_b(t - 2\tau) + \cdots + \frac{(r'_2 r_3)^2}{r'_2} t_2 t'_2 \hat{E}_b(t - n\tau) \quad (3.33)$$

と表すことができる. ここで r'_2 は共振器の外側から入射する光の反射率であり, $\hat{E}_b(t)$ は

$$\hat{E}_f(t) = r_2 \hat{E}_b(t) \quad (3.34)$$

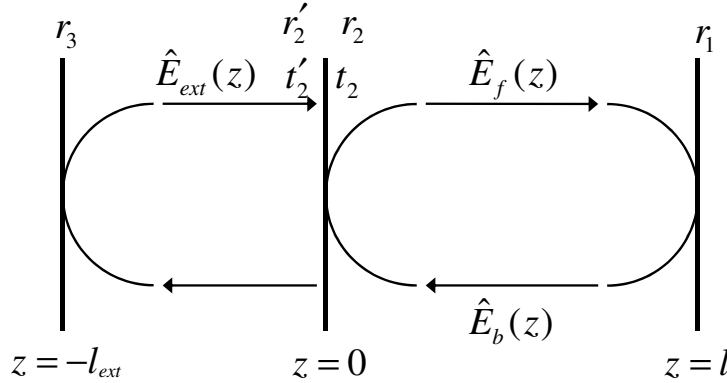


図 3.2: 反射率 r_3 の外部鏡から反射された戻り光を有する半導体レーザのモデル. $\hat{E}_{ext}(z)$ は位置 z における共振器外部の光電界であり, $\hat{E}_f(z)$ および $\hat{E}_b(z)$ はそれぞれ共振器内部の位置 z における前方あるいは後方に伝搬する光電界である. r_1 , r_2 はそれぞれ共振器端面の内側の光反射率であり, r'_2 は共振器の外側から入射する光の端面反射率を表す. t_2 , t'_2 はそれぞれ共振器の内側から外側に出射する光の透過率および外側から内側に入射する光の透過率を表す. l_{ext} は外部共振器長の長さである.

という関係を持つ $z = 0$ で後方へ伝搬する複素電界である。また

$$t_2 t'_2 = 1 - r_2^2 \quad (3.35)$$

$$r_2 = -r'_2 \quad (3.36)$$

という関係を利用すると，戻り光が有る場合の $z = 0$ での複素電界 $E(t)$ は次のような関係を持つ．

$$\hat{E}_f(t) = G_1 \exp(i\omega_{th}\tau_{in}) \hat{E}_f(t - \tau_{in}) + \frac{r_2^2 - 1}{r_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-r_2 r_3)^n \hat{E}_f(t - n\tau) \quad (3.37)$$

ここで 3.1 節と同様の方法を用いると，戻り光が有る場合のゆっくりと変化する複素電界 $E(t)$ は以下のように書き表すことができる．

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} = & \frac{1 + i\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] E(t) \\ & + \frac{1}{\tau_{in}} \frac{r_2^2 - 1}{r_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-r_2 r_3)^n E(t - n\tau) \exp(-in\omega_{th}\tau) \end{aligned} \quad (3.38)$$

光の強度は外部鏡によって反射されるたびに弱くなるため，式 (3.38) におけるフィードバックの項は外部共振器における 1 回の往復のみで表すことができる．そのため戻り光を有する半導体レーザのレート方程式 (3.38) は次のように変形される．

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} = & \frac{1 + i\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] E(t) \\ & + \kappa E(t - \tau) \exp(-i\omega_{th}\tau) \end{aligned} \quad (3.39)$$

式 (3.39) の右辺第 2 項の戻り光を表す項において κ は戻り光強度を表し，次のように定義される．

$$\kappa = \frac{1}{\tau_{in}} \frac{(1 - r_2^2)r_3}{r_2} \quad (3.40)$$

数値計算では外部鏡反射率 r_3 を変化させることにより戻り光強度 κ を変化させる．

式 (3.39) および式 (3.32) が Lang-Kobayashi 方程式 [1] と呼ばれる戻り光を有する半導体レーザのレート方程式である．

3.1.3 複素電界 E の電界振幅および電界位相への分離

第 3.1.1 節および第 3.1.2 節で戻り光を有する半導体レーザのレート方程式 (3.39) および (3.32) を導出した．しかしながらこれらの方程式において，電界 E は複素数

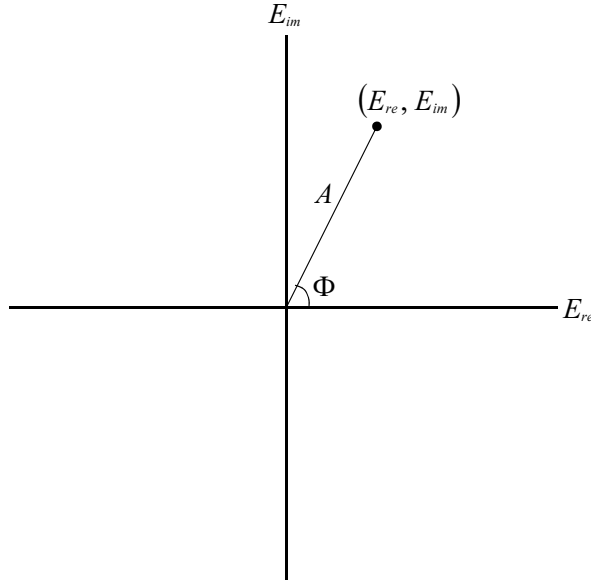


図 3.3: 複素平面における複素電界 $E = E_{re} + iE_{im}$ の振幅 A および位相 Φ と電界の実部 E_{re} と虚部 E_{im} との関係.

であるため，数値計算において実装面および計算時間の面で手間や問題が生じる．例えば，複素数を扱うことができないプログラミング言語では数値計算を行うことができず，また複素数を扱うことができるプログラミング言語であっても，複素数の計算であるために実数で計算を行うよりも計算時間が長くなってしまう場合がある．このような理由から本節では複素電界 E に関する微分方程式 (3.39) を 2 つの状態変数に関する微分方程式に分離する．

まず第 3.1.2 節で導出した戻り光を有する半導体レーザの複素電界 E の振る舞いを表す微分方程式を以下に再度示す．

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1 + i\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] E(t) + \kappa E(t - \tau) \exp(-i\omega_{th}\tau) \quad (3.41)$$

ここで E はレーザの複素電界， N はキャリア密度を表す．電界 E は複素数であるので，次のように実部 E_{re} と虚部 E_{im} に分離することができる．

$$E = E_{re} + iE_{im} \quad (3.42)$$

ここで i は虚数単位である．複素平面 E_{re} - E_{im} の複素電界 E の振る舞いは図 3.3 に示されているように考えることができる．図 3.3 において， A および Φ はそれぞれ複素電界 E の絶対値と偏角を表し，また半導体レーザの電界振幅と電界位相であ

る．本節では A と Φ に関する微分方程式を導出する．図 3.3 から複素電界 E の実部 E_{re} と虚部 E_{im} は $E_{re} = A \cos \Phi$, $E_{im} = A \sin \Phi$ と表される．さらに複素電界 E は A と Φ を用いて次のように表される．

$$E = A \cos \Phi + iA \sin \Phi \quad (3.43)$$

ここでオイラーの公式 $\cos \Phi + i \sin \Phi = \exp(i\Phi)$ を用いると，式 (3.43) は次のように表される．

$$E = A \exp(i\Phi) \quad (3.44)$$

上式を半導体レーザの複素電界 E のレート方程式 (3.41) に代入する．

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} \exp(i\Phi(t)) + i \frac{d\Phi(t)}{dt} A(t) \exp(i\Phi(t)) \\ = \frac{1+i\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] A(t) \exp(i\Phi(t)) \\ + \kappa A(t - \tau) \exp(i\Phi(t - \tau)) \exp(-i\omega_{th}\tau) \end{aligned} \quad (3.45)$$

式 (3.45) の両辺を $\exp(i\Phi(t))$ で割ることで以下の方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} + i \frac{d\Phi(t)}{dt} A(t) = \frac{1+i\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] A(t) \\ + \kappa A(t - \tau) \exp(-i\{\omega_{th}\tau + \Phi(t) - \Phi(t - \tau)\}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

ここで再びオイラーの公式 $\exp[i\theta] = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて，実部と虚部ごとに整理すると以下の方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} + i \frac{d\Phi(t)}{dt} A(t) = \frac{1}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] A(t) + \kappa A(t - \tau) \cos \theta(t) \\ + i \left\{ \frac{\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] A(t) - \kappa A(t - \tau) \sin \theta(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

ここで $\theta(t) = \omega_{th}\tau + \Phi(t) - \Phi(t - \tau)$ である．式 (3.47) から，レーザ電界の振幅 E および位相 Φ のレート方程式は次のように表される．

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] A(t) + \kappa A(t - \tau) \cos \theta(t) \quad (3.48)$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] - \kappa \frac{A(t - \tau)}{A(t)} \sin \theta(t) \quad (3.49)$$

これらの2つの方程式とキャリア密度 N のレート方程式 (式 (3.32)) を用いることで、時間遅延を有する半導体レーザのダイナミクスを数値計算することができる。しかしながら方程式 (3.49) は数値計算において問題がある。それは右辺第2項において分母に $A(t)$ が存在しているため、 $A(t) \approx 0$ の時に数値計算誤差を生じやすいということである。この問題を解決するために次節において複素電界 E のレート方程式を実部 E_{re} と E_{im} に分離する。

3.1.4 複素電界 E の実部および虚部への分離

前節で数値計算上の問題点を解決するために半導体レーザの複素電界 E のレート方程式を電界振幅 A と電界位相 Phi に分離した。しかしながら導出されたレート方程式 (3.48), (3.49) を使用したとしても数値計算において問題点が生じる場合が存在する。具体的には、戻り光強度あるいは光結合された半導体レーザにおけるレーザ間の結合強度が大きい場合、電界振幅 A の振る舞いがパルス的になってしまい、瞬間的に0に非常に近い値になってしまうことがある。この時、位相のレート方程式 (3.49) の右辺の第2項において、電界振幅が分母にあるため値が非常に大きくなってしまい、それに伴い誤差も非常に大きくなる。これを解決するための最も単純な方法は、数値計算における時間刻みを小さくすることであるが、これは計算時間を増大させてしまうためにあまり良い方法とは言えない。そこで本節では、複素電界 E を振幅と位相ではなく、実部と虚部に分離することでこの問題の解決を行う。

まず3.1.2節で導出した戻り光を有する半導体レーザの電界の振る舞いを表す微分方程式を以下に示す。

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1+i\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] E(t) + \kappa E(t - \tau) \exp(-i\omega_{th}\tau) \quad (3.50)$$

電界 E は複素であるので、次のように実部 E_{re} と虚部 E_{im} に分離することができる。

$$E = E_{re} + iE_{im} \quad (3.51)$$

またオイラーの公式より、

$$\exp(-i\omega_{th}\tau) = \cos(\omega_{th}\tau) - i \sin(\omega_{th}\tau) \quad (3.52)$$

である。式 (3.51) および式 (3.52) を式 (3.50) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dE_{re}(t)}{dt} + i \frac{dE_{im}(t)}{dt} &= \frac{1+i\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] [E_{re}(t) + iE_{im}(t)] \\ &\quad + \kappa [E_{re}(t - \tau) + iE_{im}(t - \tau)] [\cos(\omega_{th}\tau) - i \sin(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.53)$$

となる．式 (3.53) の右辺を実部および虚部ごとに整理すると，

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{re}(t)}{dt} + i\frac{dE_{im}(t)}{dt} = & \frac{1}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] [E_{re}(t) - \alpha E_{im}(t)] \\
& + \kappa [E_{re}(t - \tau) \cos(\omega_{th}\tau) + E_{im}(t - \tau) \sin(\omega_{th}\tau)] \\
& + i \left\{ \frac{1}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] [\alpha E_{re}(t) + E_{im}(t)] \right\} \\
& + i \{ \kappa [-E_{re}(t - \tau) \sin(\omega_{th}\tau) + E_{im}(t - \tau) \cos(\omega_{th}\tau)] \}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

となり，この式の左辺と右辺を比較して実部と虚部を分離すると

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{re}(t)}{dt} = & \frac{1}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] [E_{re}(t) - \alpha E_{im}(t)] \\
& + \kappa [E_{re}(t - \tau) \cos(\omega_{th}\tau) + E_{im}(t - \tau) \sin(\omega_{th}\tau)]
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{im}(t)}{dt} = & \frac{1}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] [\alpha E_{re}(t) + E_{im}(t)] \\
& + \kappa [-E_{re}(t - \tau) \sin(\omega_{th}\tau) + E_{im}(t - \tau) \cos(\omega_{th}\tau)]
\end{aligned} \tag{3.56}$$

が得られる．式 (3.55) および式 (3.56) が実部と虚部に分離した半導体レーザの電界を表す微分方程式である．複素電界を振幅と位相に分離した方程式 (3.48) および (3.49) と比較すると，分母に変数が存在する項が無いことが確認できる．このことから，式 (3.55) および (3.56) の方が数値計算に適していると考えられる．

3.1.5 Lang-Kobayashi 方程式の無次元化

多くの物理量は次元を持ち，次元が異なる複数の量に対して和や積などの演算を行うことはできない．特に数値計算では一般に次元を扱うことはできないので，実装によっては計算に大きな矛盾が生じてしまう可能性がある．また対象とするシステムが複数の状態変数を有すると考える．その中の1つの変数が他の変数よりも非常に大きいあるいは小さい値を持つ場合，丸め誤差などの影響で計算誤差が非常に大きくなってしまいう可能性がある．このような問題を解決するための1つの方法として無次元化が考えられる．無次元化とは，次元を持つ変数を基準量と無次元量によって表すことで変数を無次元に変えることである．基準量を適当に変えることで変数の変動値を適切に調節することも可能である．本節では前節までに導出した Lang-Kobayashi 方程式に対して無次元化を行う．

まず複素電界 E を電界振幅 A および電界位相 Φ に分離した Lang-Kobayashi 方程式の無次元化を行う．無次元化を行う方程式を以下に示す．

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] A(t) + \kappa A(t - \tau) \cos \theta(t) \quad (3.57)$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] - \kappa \frac{A(t - \tau)}{A(t)} \sin \theta(t) \quad (3.58)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - G_N(N(t) - N_0) A^2(t) \quad (3.59)$$

本節における無次元化の目的は， A ， Φ および N の変動を同程度に揃えることであるのでこれらの変数を無次元化する．また時間 t と外部共振器の光往復時間 τ の無次元化も行う．そこで式 (3.57)-(3.59) に以下の変数変換を行う．

$$\begin{aligned} A &= \bar{A}a & \Phi &= \bar{\Phi}\phi & N &= \bar{N}n \\ t &= \bar{t}t' & \tau &= \bar{t}\tau' \end{aligned} \quad (3.60)$$

ここで \bar{E} ， \bar{N} ， $\bar{\Phi}$ ， \bar{t} は無次元化定数であり， a ， ϕ ， n ， t' ， τ' は無次元量である．式 (3.60) を Lang-Kobayashi 方程式 (3.57)-(3.59) に代入し整理すると

$$\frac{da(t')}{dt'} = \left[\frac{\bar{t}\bar{N}G_N}{2}(n(t') - \frac{N_0}{\bar{N}}) - \frac{\bar{t}}{2\tau_p} \right] a(t') + \bar{t}\kappa a(t' - \tau') \cos \theta'(t') \quad (3.61)$$

$$\frac{d\phi(t')}{dt} = \left[\frac{\alpha\bar{t}\bar{N}G_N}{2\bar{\Phi}}(n(t') - \frac{N_0}{\bar{N}}) - \frac{\bar{t}}{2\bar{\Phi}\tau_p} \right] - \frac{\bar{t}\kappa}{\bar{\Phi}} \frac{a(t' - \tau')}{a(t')} \sin \theta'(t') \quad (3.62)$$

$$\frac{dn(t')}{dt'} = \frac{\bar{t}}{\tau_s} \left[\frac{N_{th}}{\bar{N}} \frac{J}{J_{th}} - n(t') \right] - \bar{t}\bar{A}^2 G_N \left[n(t') - \frac{N_0}{\bar{N}} \right] a^2(t') \quad (3.63)$$

となる．これらの方程式の定数を次のように整理する．

$$\begin{aligned} g_e &= \frac{\bar{t}\bar{N}G_N}{2} & g_\phi &= \frac{\alpha\bar{t}\bar{N}G_N}{2\bar{\Phi}} & g_n &= \bar{t}\bar{A}^2 G_N & \kappa_e &= \bar{t}\kappa & \kappa_\phi &= \frac{\bar{t}\kappa}{\bar{\Phi}} \\ \gamma_e &= \frac{\bar{t}}{2\tau_p} & \gamma_\phi &= \frac{\bar{t}}{2\bar{\Phi}\tau_p} & \gamma_n &= \frac{\bar{t}}{\tau_s} & n_0 &= \frac{N_0}{\bar{N}} & n_{th} &= \frac{N_{th}}{\bar{N}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

すると式 (3.61)-(3.63) は

$$\frac{da(t')}{dt'} = [g_e(n(t') - n_0) - \gamma_e] a(t') + \kappa_e a(t' - \tau') \cos \theta'(t') \quad (3.65)$$

$$\frac{d\phi(t')}{dt} = [g_\phi(n(t') - n_0) - \gamma_\phi] - \kappa_\phi \frac{a(t' - \tau')}{a(t')} \sin \theta'(t') \quad (3.66)$$

$$\frac{dn(t')}{dt'} = \gamma_n(n_{th} \frac{J}{J_{th}} - n(t')) - g_n(n(t') - n_0)a^2(t') \quad (3.67)$$

と表すことができる．また，無次元化に用いた無次元化定数 \bar{E} , $\bar{\Phi}$, \bar{N} および \bar{t} は，レーザの定常解を用いて次のように定義する．

$$\begin{aligned} \bar{A} = A_s &= \sqrt{N_{th} \frac{\tau_p}{\tau_s} \left(\frac{J}{J_{th}} - 1 \right)} & \bar{N} &= \frac{N_s}{100} = \frac{N_{th}}{100} & \bar{\Phi} &= 2\pi \\ \bar{t} &= 1.0 \times 10^{-9} \end{aligned} \quad (3.68)$$

以上が電界を振幅および位相で表した時の Lang-Kobayashi 方程式の無次元化方程式である．後に説明するリアプノフ指数を算出する場合，各変数の変動幅が大きく異なると誤差が増大してしまう．このような理由から変動幅は同程度であることが望ましいので，リアプノフ指数算出の際には，本節で導出した無次元化方程式を用いる．

次に複素電界 E を実部 E_{re} および虚部 E_{im} で表した Lang-Kobayashi 方程式の無次元化を行う．無次元化を行う方程式を以下に示す．

$$\begin{aligned} \frac{dE_{re}(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] [E_{re}(t) - \alpha E_{im}(t)] \\ &\quad \kappa [E_{re}(t - \tau) \cos(\omega_{th}\tau) + E_{im}(t - \tau) \sin(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_{im}(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] [\alpha E_{re}(t) + E_{im}(t)] \\ &\quad + \kappa [-E_{re}(t - \tau) \sin(\omega_{th}\tau) + E_{im}(t - \tau) \cos(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - G_N(N(t) - N_0)(E_{re}^2(t) + E_{im}^2(t)) \quad (3.71)$$

E_{re} , E_{im} および N を無次元化する．また時間 t と戻り光の外部共振器光往復時間 τ も無次元化する．式 (3.69)-(3.71) に以下の変数変換を行う．

$$\begin{aligned} E_{re} &= \bar{A} e_{re} & E_{im} &= \bar{A} e_{im} & N &= \bar{N} n \\ t &= \bar{t} t' & \tau &= \bar{t} \tau' \end{aligned} \quad (3.72)$$

ここで \bar{A} , \bar{N} および \bar{t} は基準量であり, e_{re} , e_{im} , n , t' , τ' は無次元量である. 式 (3.72) を Lang-Kobayashi 方程式 (3.69)-(3.71) に代入し整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{de_{re}(t')}{dt'} = & \left[\frac{\bar{t}\bar{N}G_N}{2} \left(n(t') - \frac{N_0}{\bar{N}} \right) - \frac{\bar{t}}{2\tau_p} \right] (e_{re}(t') - \alpha e_{im}(t')) \\ & + \bar{t}\kappa [e_{re}(t' - \tau') \cos(\omega_{th}\tau) + e_{im}(t' - \tau') \sin(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im}(t')}{dt'} = & \left[\frac{\bar{t}\bar{N}G_N}{2} \left(n(t') - \frac{N_0}{\bar{N}} \right) - \frac{\bar{t}}{2\tau_p} \right] (\alpha e_{re}(t') + e_{im}(t')) \\ & + \bar{t}\kappa [-e_{re}(t' - \tau') \sin(\omega_{th}\tau) + e_{im}(t' - \tau') \cos(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\frac{dn(t')}{dt'} = \frac{\bar{t}}{\tau_s} \left[\frac{N_{th}}{\bar{N}} \frac{J}{J_{th}} - n(t') \right] - \bar{t}\bar{A}^2 G_N \left[n(t') - \frac{N_0}{\bar{N}} \right] (e_{re}^2(t') + e_{im}^2(t')) \quad (3.75)$$

となる. これらの方程式の定数を次のように整理する.

$$\begin{aligned} g_e = \frac{\bar{t}\bar{N}G_N}{2} & \quad g_n = \bar{t}\bar{A}^2 G_N & \quad \kappa_e = t'\kappa & \quad \gamma_e = \frac{\bar{t}}{2\tau_p} \\ \gamma_n = \frac{\bar{t}}{\tau_s} & \quad n_0 = \frac{N_0}{\bar{N}} & \quad n_{th} = \frac{N_{th}}{\bar{N}} & \end{aligned} \quad (3.76)$$

定数の変換は振幅および位相の無次元化の場合と同様の変換を用いている. すると式 (3.73)-式 (3.75) は,

$$\begin{aligned} \frac{de_{re}(t')}{dt'} = & [g_e(n(t') - n_0) - \gamma_e] (e_{re}(t') - \alpha e_{im}(t')) \\ & + \kappa_e [e_{re}(t' - \tau') \cos(\omega_{th}\tau) + e_{im}(t' - \tau') \sin(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im}(t')}{dt'} = & [g_e(n(t') - n_0) - \gamma_e] (\alpha e_{re}(t') + e_{im}(t')) \\ & + \kappa_e [-e_{re}(t' - \tau') \sin(\omega_{th}\tau) + e_{im}(t' - \tau') \cos(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\frac{dn(t')}{dt'} = \gamma_n \left[n_{th} \frac{J}{J_{th}} - n(t') \right] - g_n(n(t') - n_0)(e_{re}^2(t') + e_{im}^2(t')) \quad (3.79)$$

と表すことができる. また, 無次元化に用いた無次元量 \bar{A} , \bar{N} および \bar{t} は, レーザの定常解を用いて次のように定義する.

$$\begin{aligned} \bar{A} = A_s = \sqrt{N_{th} \frac{\tau_p}{\tau_s} \left(\frac{J}{J_{th}} - 1 \right)} & \quad \bar{N} = \frac{N_s}{100} = \frac{N_{th}}{100} \\ \bar{t} = 1.0 \times 10^{-9} & \end{aligned} \quad (3.80)$$

以上が電界を振幅および位相で表した時の Lang-Kobayashi 方程式の無次元化方程式である. 無次元化した振幅-位相方程式の場合と同様に, リアプノフ指数算出の際にはこれらの方程式を用いる.

3.1.6 飽和項

第3.1.1節においてレーザ電界のレート方程式を導出する際に、レーザ媒質の利得 g がレーザ閾値付近でキャリア密度に線形に増加するという仮定から式 (3.23) の関係を得た。しかしながら実際には、高いレーザ強度で飽和効果が観察される。この効果の主な要因として空間的なホールバーニングが挙げられる。光電界強度はレーザの活性層に沿って一定になっておらず、電子-正孔対は強度が最大となっている場所で非常に早く再結合し、部分的なキャリアの欠乏状態を引き起こす。空間的なホールバーニングはキャリアが欠乏している箇所に新しいキャリアの供給が十分でない時に生じる。

このような飽和効果を考慮する場合、第3.1.3節で導出した振幅-位相方程式 (3.48), (3.49) およびキャリア密度のレート方程式 (3.32) は

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N(t) - N_0)}{1 + \epsilon A^2(t)} - \frac{1}{\tau_p} \right] A(t) + \kappa A(t - \tau) \cos \theta(t) \quad (3.81)$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{G_N(N(t) - N_0)}{1 + \epsilon A^2(t)} - \frac{1}{\tau_p} \right] - \kappa \frac{A(t - \tau)}{A(t)} \sin \theta(t) \quad (3.82)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - \frac{G_N(N(t) - N_0)A^2(t)}{1 + \epsilon A^2(t)} \quad (3.83)$$

と表される。式 (3.81)-(3.83) における利得 G_N の項の分母

$$1 + \epsilon A^2(t) \quad (3.84)$$

が飽和効果を表している。ここで ϵ は飽和効果の強度を表す。式 (3.84) から電界振幅 A が大きいほど飽和効果が強くなることが分かる。さらに式 (3.81)-(3.83) の無次元化方程式に飽和効果を付加すると以下の方程式が得られる。

$$\frac{da(t')}{dt'} = \left[\frac{g_e(n(t') - n_0)}{1 + \epsilon' a^2(t)} - \gamma_e \right] a(t') + \kappa_e a(t' - \tau') \cos \theta'(t') \quad (3.85)$$

$$\frac{d\phi(t')}{dt'} = \left[\frac{g_\phi(n(t') - n_0)}{1 + \epsilon' a^2(t)} - \gamma_\phi \right] - \kappa_\phi \frac{a(t' - \tau')}{a(t')} \sin \theta'(t') \quad (3.86)$$

$$\frac{dn(t')}{dt'} = \gamma_n(n_{th} \frac{J}{J_{th}} - n(t')) - \frac{g_n(n(t') - n_0)a^2(t')}{1 + \epsilon' a^2(t)} \quad (3.87)$$

ここで $\epsilon' = \epsilon \bar{A}^2$ である.

また第 3.1.4 節で導出した実部-虚部方程式 (3.55), (3.56) およびキャリア密度のレート方程式 (3.32) に飽和効果を付加すると以下の方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{dE_{re}(t)}{dt} = & \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N(t) - N_0)}{1 + \epsilon(E_{re}^2(t) + E_{im}^2(t))} - \frac{1}{\tau_p} \right] [E_{re}(t) - \alpha E_{im}(t)] \\ & + \kappa [E_{re}(t - \tau) \cos(\omega_{th}\tau) + E_{im}(t - \tau) \sin(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_{im}(t)}{dt} = & \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N(t) - N_0)}{1 + \epsilon(E_{re}^2(t) + E_{im}^2(t))} - \frac{1}{\tau_p} \right] [\alpha E_{re}(t) + E_{im}(t)] \\ & + \kappa [-E_{re}(t - \tau) \sin(\omega_{th}\tau) + E_{im}(t - \tau) \cos(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - \frac{G_N(N(t) - N_0)(E_{re}^2(t) + E_{im}^2(t))}{1 + \epsilon(E_{re}^2(t) + E_{im}^2(t))} \quad (3.90)$$

さらに式 (3.88)-(3.90) の無次元化方程式は

$$\begin{aligned} \frac{de_{re}(t')}{dt'} = & \left[\frac{g_e(n(t') - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} - \gamma_e \right] (e_{re}(t') - \alpha e_{im}(t')) \\ & + \kappa_e [e_{re}(t' - \tau') \cos(\omega_{th}\tau) + e_{im}(t' - \tau') \sin(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im}(t')}{dt'} = & \left[\frac{g_e(n(t') - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} - \gamma_e \right] (\alpha e_{re}(t') + e_{im}(t')) \\ & + \kappa_e [-e_{re}(t' - \tau') \sin(\omega_{th}\tau) + e_{im}(t' - \tau') \cos(\omega_{th}\tau)] \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\frac{dn(t')}{dt'} = \gamma_n(n_{th} \frac{J}{J_{th}} - n(t')) - \frac{g_n(n(t') - n_0)(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} \quad (3.93)$$

と表される.

以上が飽和項を付加した Lang-Kobayashi 方程式である. 以降, 飽和項を付加した式を用いる場合はその都度述べる.

3.2 Lang-Kobayashi 方程式の定常解 (平衡点) と線形安定性解析

第 3.1 節では本研究で用いる戻り光を有する半導体レーザのレート方程式である Lang-Kobayashi 方程式の導出を行った. 数値モデルを用いて解析を行う場合, 計算

機を用いて数値的に解を得る方法と方程式を直接解く方法が考えられる．本研究で扱うカオスダイナミクスは複雑であり，時間発展を方程式を直接解いて調査することが困難であるため，計算機を用いて数値的に解くのが比較的容易である．しかしながらモデル方程式を解くことで得られる解はシステムのパラメータ依存性を直接表現していることが多く，数値的に得られた解よりも非常に多くの情報を得ることができる．本節ではモデル方程式から比較的容易に得られる定常解(平衡点)を戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式において導出する．また得られた定常解に対して線形安定性解析を行うことで，半導体レーザの緩和発振周波数を導出する．さらに戻り光を有する半導体レーザの定常解を導出する．

3.2.1 戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式の定常解の導出

本節では戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式の定常解を導出する．ここでは複素電界 E を電界振幅 A および電界位相 Φ に分離した方程式 (3.81) および (3.82)，キャリア密度の方程式 (3.83) を用いる．ただし戻り光の項を持たないことに注意する．

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N(t) - N_0)}{1 + \epsilon A^2(t)} - \frac{1}{\tau_p} \right] A(t) \quad (3.94)$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{G_N(N(t) - N_0)}{1 + \epsilon A^2(t)} - \frac{1}{\tau_p} \right] \quad (3.95)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - \frac{G_N(N(t) - N_0)A^2(t)}{1 + \epsilon A^2(t)} \quad (3.96)$$

上記の方程式の状態変数 $A(t)$ ， $\Phi(t)$ ， $N(t)$ のそれぞれに対して，次のように解を仮定する．

$$A(t) = A_s, \quad \Phi(t) = (\omega_s - \omega)t, \quad N(t) = N_s \quad (3.97)$$

ここで ω は半導体レーザの基本光角周波数であり， A_s ， ω_s ， N_s はそれぞれ電界振幅，光角周波数，キャリア密度の定常解である．式 (3.97) において， $\Phi(t)$ は時間に対して一定でない解が仮定されている． $\Phi(t)$ は半導体レーザの基本光周波数から光位相がどの程度ずれているかを表す量であり，ここで仮定されている解は，基本光角周波数に対して半導体レーザが定常解 ω_s を持つ時の光位相のずれとして定義されている．式 (3.97) を式 (3.94)–(3.96) に代入すると以下の方程式が得られる．

$$0 = \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} - \frac{1}{\tau_p} \right] A_s \quad (3.98)$$

$$\omega_s - \omega = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} - \frac{1}{\tau_p} \right] \quad (3.99)$$

$$0 = J - \frac{N_s}{\tau_s} - \frac{G_N(N_s - N_0)A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \quad (3.100)$$

式 (3.98) において $A_s \neq 0$ を仮定すると、次の条件が得られる。

$$0 = \frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} - \frac{1}{\tau_p} \quad (3.101)$$

式 (3.101) を式 (3.99) に代入すると式 (3.99) は $\omega_s - \omega = 0$ となるため、光角周波数の解は次のように与えられる。

$$\omega_s = \omega \quad (3.102)$$

したがって戻り光を持たない半導体レーザの光角周波数の定常解は基本光角周波数と一致する。電界振幅とキャリア密度の解を得るために、式 (3.100) の右辺第 3 項を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{G_N(N_s - N_0)A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} &= \frac{1}{\epsilon} \frac{G_N(N_s - N_0)\epsilon A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \\ &= \frac{1}{\epsilon} \frac{G_N(N_s - N_0)(1 + \epsilon A_s^2) - G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} \\ &= \frac{1}{\epsilon} G_N(N_s - N_0) - \frac{1}{\epsilon} \frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} \end{aligned} \quad (3.103)$$

最初の等号では、利得飽和係数 ϵ を分母と分子に掛けることで分子に ϵA_s^2 が得られる。2 番目の等号では、分子に $G_N(N_s - N_0)$ を加えて因数分解することにより $(1 + \epsilon A_s^2)$ の因数が得られる。また値が変化しないように $G_N(N_s - N_0)$ を差し引いている。3 番目の等号では、2 番目の等号で因数 $G_N(N_s - N_0)$ を持つ項を分数の外に出している。式 (3.103) の右辺第 2 項は式 (3.101) の右辺第 1 項に $1/\epsilon$ を掛けた式と同一であることが重要である。式 (3.103) を用いると、式 (3.100) は次のように変形される。

$$\begin{aligned} 0 &= J - \frac{N_s}{\tau_s} - \frac{1}{\epsilon} G_N(N_s - N_0) + \frac{1}{\epsilon} \frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} \\ \frac{1}{\epsilon} \frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} &= \frac{1}{\epsilon} G_N(N_s - N_0) + \frac{N_s}{\tau_s} - J \\ \frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} &= G_N(N_s - N_0) + \epsilon \frac{N_s}{\tau_s} - \epsilon J \end{aligned} \quad (3.104)$$

式 (3.104) を式 (3.101) に代入することにより、キャリア密度の解 N_s に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
0 &= G_N(N_s - N_0) + \epsilon \frac{N_s}{\tau_s} - \epsilon J - \frac{1}{\tau_p} \\
G_N N_s + \epsilon \frac{N_s}{\tau_s} &= G_N N_0 + \epsilon J + \frac{1}{\tau_p} \\
N_s \left(G_N + \frac{\epsilon}{\tau_s} \right) &= G_N N_{th} + \epsilon j \frac{N_{th}}{\tau_s} \\
N_s &= \frac{G_N N_{th} + \epsilon j \frac{N_{th}}{\tau_s}}{G_N + \frac{\epsilon}{\tau_s}} \\
N_s &= \frac{\tau_s G_N + \epsilon j}{\tau_s G_N + \epsilon} N_{th}
\end{aligned} \tag{3.105}$$

第 2 式から第 3 式の変形において、右辺第 1 項に $N_0 = N_{th} - 1/(G_N \tau_p)$ を代入し、右辺第 2 項に $J = j J_{th} = j N_{th}/\tau_s$ を代入した。ここで j は発振しきい値電流 J_{th} に対する半導体レーザへの注入電流の比である。以上がキャリア密度の定常解である。また式 (3.105) において利得飽和効果が無い時 ($\epsilon = 0$)、キャリア密度の定常解は $N_s = N_{th}$ となる。電界振幅の定常解 A_s は式 (3.104) に式 (3.105) を代入することにより得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} &= G_N N_s - G_N N_0 + \epsilon \frac{N_s}{\tau_s} - \epsilon j \frac{N_{th}}{\tau_s} \\
\frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} &= \frac{N_s}{\tau_s} (\tau_s G_N + \epsilon) - G_N N_0 - \epsilon j \frac{N_{th}}{\tau_s} \\
\frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} &= \frac{N_{th}}{\tau_s} (\tau_s G_N + \epsilon j) - G_N N_0 - \epsilon j \frac{N_{th}}{\tau_s} \\
\frac{N_s - N_0}{1 + \epsilon A_s^2} &= N_{th} - N_0 \\
\frac{1 + \epsilon A_s^2}{N_s - N_0} &= G_N \tau_p \\
1 + \epsilon A_s^2 &= G_N \tau_p \left(\frac{\tau_s G_N + \epsilon j}{\tau_s G_N + \epsilon} N_{th} - N_{th} + \frac{1}{G_N \tau_p} \right) \\
A_s^2 &= \frac{\tau_p G_N N_{th} (j - 1)}{\tau_s G_N + \epsilon}
\end{aligned} \tag{3.106}$$

第 1 式は式 (3.104) の右辺第 3 項に $J = j J_{th} = j \frac{N_{th}}{\tau_s}$ を代入することで得られる。第 2 式から第 3 式の変形において、右辺第 1 項に式 (3.105) を代入した。第 3 式を整理し、両辺を G_N で割ると第 4 式が得られる。第 4 式から第 5 式の変形では

Symbols	Parameter	Value
G_N	Gain coefficient	$8.40 \times 10^{-13} m^3 s^{-1}$
N_0	Carrier density at transparency	$1.40 \times 10^{24} m^{-3}$
τ_p	Photon lifetime	$1.927 \times 10^{-12} s$
τ_s	Carrier lifetime	$2.04 \times 10^{-9} s$
J/J_{th}	Normalized injection current	Variable
α	Linewidth enhancement factor	3.0
λ	Optical wavelength	$1.537 \times 10^{-6} m$
c	Speed of light	$2.998 \times 10^8 ms^{-1}$
N_{th}	Carrier density at threshold	$2.018 \times 10^{24} m^{-3}$
J_{th}	Injection current at threshold	$9.892 \times 10^{32} m^{-3} s^{-1}$
ω	Optical angular frequency	$1.215 \times 10^{15} s^{-1}$
ϵ	Gain saturation coefficient	Variable

表 3.1: 第 3.2 節で用いる Lang-Kobayashi 方程式のパラメータとパラメータ値.

$N_{th} - N_0 = 1/(G_N \tau_p)$ を代入して分母と分子を反転させた. 第 5 式の両辺を $N_s - N_0$ で割り, 式 (3.105) および $N_0 = N_{th} - 1/(G_N \tau_p)$ を代入することで第 6 式が得られる. 第 6 式を整理すると, 電界振幅の定常解 A_s の方程式である式 (3.106) が得られる.

以上を整理すると, Lang-Kobayashi 方程式の電界振幅, 光角周波数, キャリア密度の定常解である A_s , ω_s , N_s はそれぞれ以下のように表される.

$$A_s^2 = \frac{\tau_p G_N N_{th} (j - 1)}{\tau_s G_N + \epsilon} \quad (3.107)$$

$$\omega_s = \omega \quad (3.108)$$

$$N_s = \frac{\tau_s G_N + \epsilon j}{\tau_s G_N + \epsilon} N_{th} \quad (3.109)$$

本章の定常解は飽和効果 ϵ を持つ Lang-Kobayashi 方程式において導出されている. 方程式 (3.107)–(3.109) において飽和効果 ϵ が増加すると, $j > 1$ の条件 (半導体レーザへの注入電流値がしきい値よりも高い) の下で半導体レーザ強度に相当する A_s^2 が減少する. またキャリア密度も ϵ の増加とともに減少することが分かる.

図 3.4 は, 半導体レーザへの規格化注入電流 j を変化させた時の A_s^2 の変化を示している. 計算に用いたパラメータ値は表 3.1 である. A_s^2 は半導体レーザの強度に相当するため, 図 3.4 は半導体レーザの L-I 特性である. 図中の結果では, 5 つの飽和効果 ϵ について示されている. 黒は飽和効果が無い場合であり ($\epsilon = 0$), 赤は

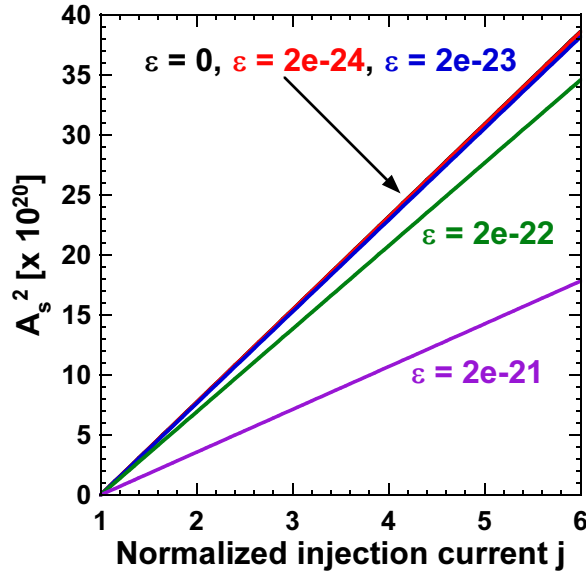


図 3.4: 半導体レーザへの規格化注入電流 j を変化させた時の戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式の電界振幅の定常解 A_s^2 の変化. A_s^2 は半導体レーザ強度に相当するため, この図はレーザの L-I 特性である. 半導体レーザへの規格化注入電流 j は発振しきい値に対する比であり, $j = 1$ の時に半導体レーザは発振し始める. 図の結果は 5 つの飽和効果 ϵ の場合について示されている. 黒は飽和効果が無い場合であり ($\epsilon = 0$), 赤は $\epsilon = 2e^{-24}$, 青は $\epsilon = 2e^{-23}$, 緑は $\epsilon = 2e^{-22}$, 紫は $\epsilon = 2e^{-21}$ である.

$\epsilon = 2e^{-24}$, 青は $\epsilon = 2e^{-23}$, 緑は $\epsilon = 2e^{-22}$, 紫は $\epsilon = 2e^{-21}$ である. 黒, 赤, 青は線がほぼ重なってしまっていることに注意する. いずれの ϵ の場合についても j の増加に対して A_s^2 は線形に増加している. これは式 (3.107) から確認できる. 飽和効果を大きくすると ($\epsilon = 2e^{-22}$, $2e^{-21}$), 傾きが減少していることが分かる. もし Lang-Kobayashi 方程式を用いて実験結果を数値計算により再現する場合, ϵ の値は図 3.4 の L-I 特性の傾きを実験結果を一致させるようにすると良いかもしれない.

3.2.2 定常解に対する線形安定性解析

本章では前節で導出された定常解のまわりで Lang-Kobayashi 方程式に対して線形安定性解析を行い, 半導体レーザの緩和発振周波数を導出する. 線形安定性解析とは, 基準となる解に対して微小な揺らぎを仮定し, その揺らぎの時間発展が収束するか発散するかにより, 基準となる解の安定性を解析する手法である. 基準と

なる解の付近の解析に限定することにより，対象のシステムが非線形であっても線形なシステムとして扱うことができるため，解析が非常に容易になる．ここでは前節で導出された定常解に微小な揺らぎを加えた軌道を仮定し，定常解のまわりで Lang-Kobayashi 方程式を線形化することで微小な揺らぎの時間発展方程式を得る．

戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式 (3.94)–(3.96) において，定常解に微小な揺らぎを加えた軌道を以下のように仮定する．

$$A(t) = A_s + \delta A(t) \quad (3.110)$$

$$\Phi(t) = (\omega_s - \omega)t + \delta\Phi(t) \quad (3.111)$$

$$N(t) = N_s + \delta N(t) \quad (3.112)$$

ここで $\delta A(t)$ ， $\delta\Phi(t)$ ， $\delta N(t)$ は微小な揺らぎを表す． A_s ， ω_s ， N_s は前節で導出された戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式の定常解である．式 (3.110)–(3.112) を戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式 (3.94)–(3.96) に代入し，定常解まわりでテイラー展開を行う．テイラー展開された方程式の 2 次以上の微小揺らぎの項を無視することで線形化すると，微小揺らぎの時間発展を表す以下の方程式が得られる．

$$\frac{d\delta A(t)}{dt} = -\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)}\delta A(t) + \frac{G_N A_s}{2(1 + \epsilon A_s^2)}\delta N(t) \quad (3.113)$$

$$\frac{d\delta\Phi(t)}{dt} = -\frac{\alpha\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)}\delta A(t) + \frac{\alpha G_N}{2(1 + \epsilon A_s^2)}\delta N(t) \quad (3.114)$$

$$\frac{d\delta N(t)}{dt} = -\frac{2A_s}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)}\delta A(t) - \left(\frac{1}{\tau_s} + \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2}\right)\delta N(t) \quad (3.115)$$

式 (3.113)–(3.115) の第 1 項の変形において式 (3.101) の関係を用いた．これらの方程式を線形化方程式と呼ぶ．本章では飽和効果 ϵ を持つ Lang-Kobayashi 方程式について考えており，飽和効果が無い時 ($\epsilon = 0$)，式 (3.113) および (3.114) の第 1 項の $\delta A(t)$ の係数は 0 となる．また戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式は電界位相 Φ の変数を持たないため，式 (3.113)–(3.115) において $\delta\Phi(t)$ の項は現れない．

式 (3.113)–(3.115) はヤコビ行列を用いて書き表すことも可能である．戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式 (3.94)–(3.96) の右辺をそれぞれ f_A ， f_Φ ， f_N と置くと，式 (3.113)–(3.115) は以下のように行列形式で表される．

$$\begin{pmatrix} \frac{d\delta A(t)}{dt} \\ \frac{d\delta\Phi(t)}{dt} \\ \frac{d\delta N(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_A}{\partial A} & \frac{\partial f_A}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_A}{\partial N} \\ \frac{\partial f_\Phi}{\partial A} & \frac{\partial f_\Phi}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_\Phi}{\partial N} \\ \frac{\partial f_N}{\partial A} & \frac{\partial f_N}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_N}{\partial N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \delta\Phi(t) \\ \delta N(t) \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

ここで,

$$\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_A}{\partial A} & \frac{\partial f_A}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_A}{\partial N} \\ \frac{\partial f_\Phi}{\partial A} & \frac{\partial f_\Phi}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_\Phi}{\partial N} \\ \frac{\partial f_N}{\partial A} & \frac{\partial f_N}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_N}{\partial N} \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

は行列の各要素が関数 f_A , f_Φ , f_N の変数 $A(t)$, $\Phi(t)$, $N(t)$ による偏微分からなるヤコビ行列である. このヤコビ行列 \mathbf{J}_f の要素は式 (3.113)–(3.115) の $\delta A(t)$, $\delta N(t)$ の係数に相当する. 式 (3.113)–(3.115) を式 (3.116) の行列形式に直すと, 以下のようになる.

$$\begin{pmatrix} \frac{d\delta A(t)}{dt} \\ \frac{d\delta \Phi(t)}{dt} \\ \frac{d\delta N(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} & 0 & \frac{G_N A_s}{2(1 + \epsilon A_s^2)} \\ -\frac{\alpha \epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} & 0 & \frac{\alpha G_N}{2(1 + \epsilon A_s^2)} \\ -\frac{2A_s}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} & 0 & -\frac{1}{\tau_s} - \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta A(t) \\ \delta \Phi(t) \\ \delta N(t) \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

式 (3.118) のようにヤコビ行列を用いた行列形式で表現することの利点は, ヤコビ行列 \mathbf{J}_f による写像としてとらえることができる点である. 本章で対象としている系は連続時間であるため, 式 (3.118) はヤコビ行列 \mathbf{J}_f による写像が微小揺らぎの変化率を表すことになる.

ヤコビ行列 \mathbf{J}_f の固有値を求めることで, 固有ベクトル方向への微小揺らぎの拡大率を得ることができる. 式 (3.118) のヤコビ行列 \mathbf{J}_f は 3×3 行列であるため, 3つの固有値を得ることができる. 3つの固有値の中で最も大きな固有値が負であれば, 微小な揺らぎの拡大率は全て負となるため, 定常解は安定であるといえることができる. 一方で固有値が複素数である場合, その虚部は振動周波数を表し, これが半導体レーザの緩和発振周波数となる. ヤコビ行列 \mathbf{J}_f の固有値を算出するために,

以下の特性方程式を解くことを考える．

$$\begin{aligned}
|\mathbf{J}_f - \lambda \mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} -\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} - \lambda & 0 & \frac{G_N A_s}{2(1 + \epsilon A_s^2)} \\ -\frac{\alpha \epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} & -\lambda & \frac{\alpha G_N}{2(1 + \epsilon A_s^2)} \\ -\frac{2A_s}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} & 0 & -\frac{1}{\tau_s} - \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda \left[\lambda^2 + \left(\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} + \frac{1}{\tau_s} + \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \right) \lambda + \frac{G_N A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} \right] = 0 \quad (3.119)
\end{aligned}$$

ここで \mathbf{I} は単位行列， λ はヤコビ行列 \mathbf{J}_f の固有値である．式 (3.119) から $\lambda = 0$ の解は自明である．残りの2つの解を得るため，以下の2次方程式を解く．

$$\lambda^2 + \left(\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} + \frac{1}{\tau_s} + \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \right) \lambda + \frac{G_N A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} = 0 \quad (3.120)$$

2次方程式の解の公式から λ の解は以下のように表される．

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} + \frac{1}{\tau_s} + \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \right) \\
&\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} + \frac{1}{\tau_s} + \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \right)^2 - \frac{G_N A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)}} \quad (3.121)
\end{aligned}$$

式 (3.121) の第2項のルート内部はパラメータ値の関係で以下の条件が満たされる．

$$\frac{G_N A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} \gg \frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} + \frac{1}{\tau_s} + \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \right)^2 \quad (3.122)$$

したがって式 (3.121) の解は複素数である．

定常解の安定性は固有値 λ の実部により決定され，緩和発振周波数は実部により決定される．固有値を $\lambda = \lambda_{re} + i\lambda_{im}$ として実部と虚部に分離した時，実部 λ_{re} と虚部 λ_{im} は次のように表される．

$$\lambda_{re} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} + \frac{1}{\tau_s} + \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \right) \quad (3.123)$$

$$\lambda_{im} = \sqrt{\frac{G_N A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} - \frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} + \frac{1}{\tau_s} + \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \right)^2} \quad (3.124)$$

式 (3.123) において、括弧内の項は全て正である．したがって $\lambda_{re} < 0$ となり、対応する固有ベクトルの方向の変化率が負となるため、定常解は安定となることが分かる．

固有値の実部を表す式 (3.124) から戻り光を持たない半導体レーザの緩和発振周波数 f_{ro} は次のように表される．

$$f_{ro} = \frac{1}{2\pi} \lambda_{im} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G_N A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} - \frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)} + \frac{1}{\tau_s} + \frac{G_N A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \right)^2} \quad (3.125)$$

式 (3.122) の条件から式 (3.125) のルート内部の第 2 項を無視することにより、式 (3.125) は次のように近似される．

$$f_{ro} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G_N A_s^2}{\tau_p(1 + \epsilon A_s^2)}} \quad (3.126)$$

式 (3.126) の根号内の分子の A_s^2 に式 (3.107) を代入すると以下の方程式が得られる．

$$f_{ro} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G_N^2 N_{th}(j-1)}{(\tau_s G_N + \epsilon)(1 + \epsilon A_s^2)}} \quad (3.127)$$

式 (3.127) から緩和発振周波数 f_{ro} は半導体レーザの規格化電流値 j に依存することが分かる．

図 3.5 は半導体レーザの規格化注入電流 j を変化させた時の緩和発振周波数 f_{ro} の変化を示している．計算に用いられたパラメータ値は第 3.2.1 節に示されている表 3.1 である．図中の結果では、5つの飽和効果 ϵ について示されている．黒は飽和効果が無い場合であり ($\epsilon = 0$)、赤は $\epsilon = 2e^{-24}$ 、青は $\epsilon = 2e^{-23}$ 、緑は $\epsilon = 2e^{-22}$ 、紫は $\epsilon = 2e^{-21}$ である．黒、赤は線がほぼ重なってしまっていることに注意する．規格化注入電流 j の増加とともに緩和発振周波数 f_{ro} が単調に増加していることが分かる．また飽和効果 ϵ を増加させるにつれて、 f_{ro} の増加率が減少していることが分かる．図 3.4 の場合と同様に、もし Lang-Kobayashi 方程式を用いて実験結果を数値計算により再現する場合、 ϵ の値は図 3.5 の変化と実験結果を一致させるようにすると良いかもしれない．

図 3.5 の結果の正しさを数値的に確かめる場合、戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式 (3.94)–(3.96) に自然放出光を表すノイズ項を付加して数値計算すると良い．数値計算により得られた時系列に対して Fast Fourier Transform (FFT) を適用することで周波数スペクトルを得る．得られた周波数スペクトルのピーク周波数が緩和発振周波数に相当する．以上のようにして図 3.5 の結果を数値的に確かめることができる．

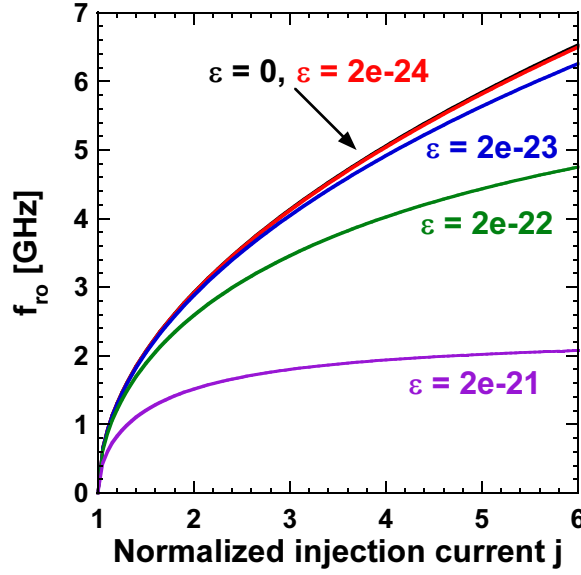


図 3.5: 半導体レーザへの規格化注入電流 j を変化させた時の半導体レーザの緩和発振周波数 f_{ro} の変化. 半導体レーザへの規格化注入電流 j は発振しきい値に対する比であり, $j = 1$ の時に半導体レーザは発振し始める. 図の結果は5つの飽和効果 ϵ の場合について示されている. 黒は飽和効果が無い場合であり ($\epsilon = 0$), 赤は $\epsilon = 2e^{-24}$, 青は $\epsilon = 2e^{-23}$, 緑は $\epsilon = 2e^{-22}$, 紫は $\epsilon = 2e^{-21}$ である.

3.2.3 戻り光を有する Lang-Kobayashi 方程式の定常解の導出

第 3.2.1 節では戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式の定常解を導出し, 第 3.2.2 節において解に対する線形安定性解析を用いて半導体レーザの緩和発振周波数を算出した一方で本研究では戻り光を有する半導体レーザについて着目する. 戻り光を有する半導体レーザの定常解を算出することは, 半導体レーザのダイナミクスや分岐現象について調査する際に重要となる. 戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスは戻り光強度を増加させることにより分岐現象を生じカオスとなることが知られており, 分岐現象について詳細に調査するためには定常解 (平衡点) を知ることが必要不可欠である. またカオスダイナミクスは不安定平衡点を通る安定多様体および不安定多様体と関連, ダイナミクスを説明するのに重要な役割を果たす場合がある. 本節では戻り光を有する Lang-Kobayashi 方程式の定常解 (平衡点) を導出し, 半導体レーザの戻り光強度の変化による定常解の変化を観察する.

本節で用いる戻り光を有する Lang-Kobayashi 方程式を以下に示す.

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N(t) - N_0)}{1 + \epsilon A^2(t)} - \frac{1}{\tau_p} \right] A(t) + \kappa A(t - \tau) \cos \theta(t) \quad (3.128)$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{G_N(N(t) - N_0)}{1 + \epsilon A^2(t)} - \frac{1}{\tau_p} \right] - \kappa \frac{A(t - \tau)}{A(t)} \sin \theta(t) \quad (3.129)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - \frac{G_N(N(t) - N_0)A^2(t)}{1 + \epsilon A^2(t)} \quad (3.130)$$

ただし $\theta(t) = \omega\tau + \Phi(t) - \Phi(t - \tau)$ であり, ここで ω は半導体レーザの基本光角周波数である. 上記の方程式の状態変数 $A(t)$, $\Phi(t)$, $N(t)$ および時間遅延された状態変数 $A(t - \tau)$, $\Phi(t - \tau)$ のそれぞれに対して, 次のように解を仮定する.

$$A(t) = A(t - \tau) = A_s, \quad \Phi(t) = (\omega_s - \omega)t, \quad \Phi(t - \tau) = (\omega_s - \omega)(t - \tau), \quad N(t) = N_s \quad (3.131)$$

ここで A_s , ω_s , N_s はそれぞれ電界振幅, 光角周波数, キャリア密度の定常解である. 式 (3.131) において, 電界位相 $\Phi(t)$ は時間に対して一定でないため, 時間遅延された状態変数 $\Phi(t - \tau)$ と異なる解が仮定されている. 式 (3.131) を式 (3.128)–(3.130) に代入すると以下の方程式が得られる.

$$0 = \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} - \frac{1}{\tau_p} \right] A_s + \kappa A_s \cos(\omega_s \tau) \quad (3.132)$$

$$\omega_s - \omega = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} - \frac{1}{\tau_p} \right] - \kappa \sin(\omega_s \tau) \quad (3.133)$$

$$0 = J - \frac{N_s}{\tau_s} - \frac{G_N(N_s - N_0)A_s^2}{1 + \epsilon A_s^2} \quad (3.134)$$

ただし $\theta(t) = \omega\tau + (\omega_s - \omega)t - (\omega_s - \omega)(t - \tau) = \omega_s\tau$ を用いた. 式 (3.132) の右辺第 1 項を左辺に移動させ, 両辺を A_s で割ると以下の方程式が得られる.

$$\frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N_s - N_0)}{1 + \epsilon A_s^2} - \frac{1}{\tau_p} \right] = -\kappa \cos(\omega_s \tau) \quad (3.135)$$

式 (3.135) を式 (3.131) に代入すると, ω_s に関する次の方程式が得られる.

$$\omega_s - \omega = -\alpha\kappa \cos(\omega_s \tau) - \kappa \sin(\omega_s \tau) \quad (3.136)$$

Symbols	Parameter	Value
τ_{in}	Roundtrip time in internal cavity	8.0×10^{-12} s
r_2	Reflectivity of laser facet	0.556
r_3	Reflectivity of an external mirror	0.03
L	External cavity length	0.3 or 0.6 m
τ	Roundtrip time in external cavity (feedback delay time)	1.501×10^{-9} s

表 3.2: 第 3.2.3 節で用いる Lang-Kobayashi 方程式の戻り光に関するパラメータ.

式 (3.136) の右辺を三角関数の和の公式により整理すると次の方程式が得られる.

$$\omega_s - \omega = -\kappa\sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\omega_s \tau + \tan^{-1} \alpha) \quad (3.137)$$

式 (3.137) は ω_s に関する方程式であり, これを解くことにより ω_s を得ることができる. しかしながら式 (3.137) は解析的に解くのが困難であるため, オイラー法などの数値解法を用いるのが良い. ω_s の具体的な算出手法と算出結果についてはあとで示す.

式 (3.104) を式 (3.132) に代入することによりキャリア密度の定常解に関する方程式を得ることができる.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \left[G_N(N_s - N_0) + \epsilon \frac{N_s}{\tau_s} - \epsilon J - \frac{1}{\tau_p} \right] A_s + \kappa A_s \cos(\omega_s \tau) \\
0 &= G_N N_s + \epsilon \frac{N_s}{\tau_s} - \epsilon j \frac{N_{th}}{\tau_s} - G_N N_{th} + 2\kappa \cos(\omega_s \tau) \\
0 &= N_s \left(G_N + \frac{\epsilon}{\tau_s} \right) - N_{th} \left(G_N + \frac{\epsilon j}{\tau_s} \right) + 2\kappa \cos(\omega_s \tau) \\
0 &= (N_s - N_{th}) \left(G_N + \frac{\epsilon}{\tau_s} \right) + \frac{\epsilon N_{th}(1 - j)}{\tau_s} + 2\kappa \cos(\omega_s \tau) \\
N_s - N_{th} &= \frac{\epsilon N_{th}(j - 1) - 2\kappa \tau_s \cos(\omega_s \tau)}{\tau_s G_N + \epsilon} \quad (3.138)
\end{aligned}$$

第 1 式から第 2 式の変形では, 両辺に 2 を掛けて両辺を A_s で割り, $J = jJ_{th} = jN_{th}/\tau_s$ を代入した. 第 3 式から第 4 式の変形では, 右辺第 1 項に $N_s - N_{th}$ の因数を作るために $N_{th}(G_N + \epsilon/\tau_s)$ を足し引いている. 第 4 式では $N_s - N_{th}$ の方程式を得るために $G_N + \epsilon/\tau_s$ で両辺を割っている. 式 (3.138) がキャリア密度に関する定常解である. しかしながら式 (3.138) は光角周波数の定常解 ω_s を含んでいるため, N_s を得るために ω_s をあらかじめ計算する必要がある.

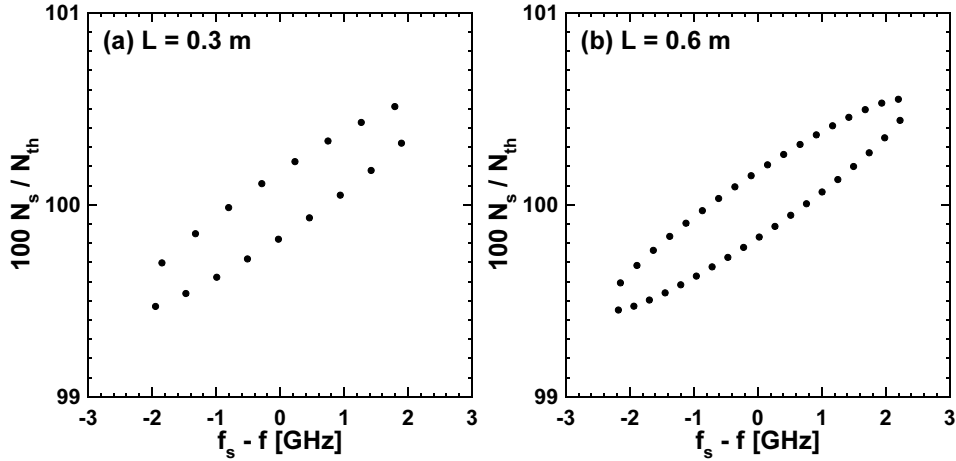


図 3.6: 式 (3.137) および式 (3.138) を用いて計算された戻り光を有する半導体レーザの状態空間における定常解の分布. 図の縦軸と横軸はそれぞれ規格化されたキャリア密度と半導体レーザの光周波数である. この時の戻り光反射率は $r_3 = 0.03$ ($\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$) であり, 外部鏡反射率は (a) $L = 0.3 \text{ m}$, (b) $L = 0.6 \text{ m}$ である. また規格化電流値 $j = 1.36$, 飽和効果 $\epsilon = 0$ である.

式 (3.137) および式 (3.138) を用いた定常解の算出結果を示す. 式 (3.137) は非線形方程式であり, κ の大きさにより解が複数存在するため数値的に解く必要がある. 式 (3.137) の数値解法について Appendix A に示す. 図 3.6 は戻り光を有する半導体レーザの状態空間における定常解の分布を示している. 計算に用いられたパラメータ値は第 3.2.1 節に示されている表 3.1 と, 戻り光に関するパラメータである表 3.2 である. 図の縦軸は式 (3.138) から計算されたキャリア密度の定常解 N_s であり, $N_{th}/100$ で規格化されている. 第 3.3 節の戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスにおいて, 無次元化された Lang-Kobayashi 方程式が用いられる. したがって第 3.3 節の結果と比較可能であるように図 3.6 の縦軸は規格化されている. 一方で図の横軸は基本光周波数 f と光角周波数の定常解 ω_s から得られる光周波数 f_s との差 $f_s - f$ である. f_s は式 (3.137) から得られる光角周波数の定常解 ω_s から計算される ($f_s = \omega_s/(2\pi)$).

図 3.6(a) は戻り光反射率 $r_3 = 0.03$ ($\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$), 外部共振器長 $L = 0.3 \text{ m}$ の時の定常解の分布を示している. 図 3.6(a) の外部共振器長は第 3.3 節と同じ値が用いられている. 図から定常解が複数存在していることが確認できる. これらの定常解はキャリア密度と光周波数の状態空間上において楕円上に分布することが知られている [69–71]. これは図 3.6(b) のように外部共振器長 L を長くすることでわかりやすく観測できる. 図 3.6(b) は図 3.6(a) の 2 倍の外部共振器長の時の結果である.

($L = 0.6$ m). 図 3.6(a) と比較して定常解の数が増加し，楕円状に定常解が分布していることが分かる．この楕円状に分布した定常解のうち，上半分の解はアンチモード，下半分は単にモードと一般的に呼ばれる．これは定常解が戻り光反射率 r_3 を増加させた時にサドルノード分岐により増加し，上半分の解がサドル，下半分の解がノードとなるためである．したがって楕円の上半分の解は常に不安定であり，一方で下半分の解はパラメータに依存して安定性が変化する．

以上の定常解の結果は戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスを説明するために有用である．この例を第 3.3 節で示す．

3.3 戻り光を有する半導体レーザのダイナミクス

半導体レーザは自身の戻り光を付加することで，その出力強度が不安定化し容易にカオスとなることが知られている．この半導体レーザカオスは光カオス通信 [72] や高速物理乱数生成 [5] への応用が期待されており，これらの応用においてカオスダイナミクスのパラメータ依存性は重要である．本章では第 3.1 節で導出したレート方程式を用いた数値計算により半導体レーザカオスを観測し，さらにレーザパラメータの変化に対するダイナミクスの変化を調査する．

3.3.1 戻り光を有する半導体レーザの数値モデルと数値計算におけるパラメータ値

本節の数値計算において扱う戻り光を有する半導体レーザのモデルを図 3.7 に示す．図 3.7 の κ は式 (3.40) で定義される戻り光の強さを表すパラメータであり，外

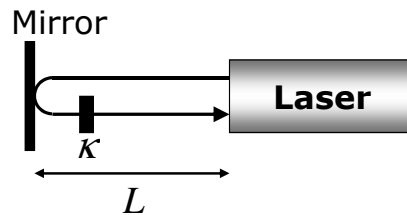


図 3.7: 戻り光を有する半導体レーザモデル．外部鏡により反射された光がレーザ自身に戻されている． κ は戻り光強度， L は半導体レーザから外部鏡までの距離を表す．

Symbols	Parameter	Value
G_N	Gain coefficient	$8.40 \times 10^{-13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
N_0	Carrier density at transparency	$1.40 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$
τ_p	Photon lifetime	$1.927 \times 10^{-12} \text{ s}$
τ_s	Carrier lifetime	$2.04 \times 10^{-9} \text{ s}$
τ_{in}	Roundtrip time in internal cavity	$8.0 \times 10^{-12} \text{ s}$
r_2	Reflectivity of laser facet	0.556
r_3	Reflectivity of an external cavity	0.03
J/J_{th}	Normalized injection current	1.36
L	External cavity length	0.3 m
α	Linewidth enhancement factor	3.0
λ	Optical wavelength	$1.537 \times 10^{-6} \text{ m}$
c	Speed of light	$2.998 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$
τ	Roundtrip time in external cavity (feedback delay time)	$1.501 \times 10^{-9} \text{ s}$
N_{th}	Carrier density at threshold	$2.018 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$
J_{th}	Injection current at threshold	$9.892 \times 10^{32} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$
ω	Optical angular frequency	$1.215 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$
ϵ	Gain saturation coefficient	0.0 or 2.0×10^{-23}

表 3.3: 本章の数値計算で使用するレーザパラメータ

部鏡反射率 r_3 を変化させることで戻り光強度 κ を変える．また L は外部共振器長と呼ばれるレーザから外部鏡までの距離である．レーザから出力された光が外部鏡により反射されてレーザ自身に戻るまでの時間を τ とすると， τ は外部共振器長 L を用いて次のように表される．

$$\tau = \frac{2L}{c} \quad (3.139)$$

ここで c は光速である．このようなモデルについて数値計算を行い，戻り光強度 κ を変化させた時のダイナミクスの変化について調査を行う．

次に本章で用いる戻り光を有する半導体レーザの数値モデルを示す．本章では第 3.1 節で導出した複素電界を実部と虚部に分離した無次元化 Lang-Kobayashi 方程式

(3.91)–(3.93) を用いる．以下に Lang-Kobayashi 方程式 (3.91)–(3.93) を再度示す．

$$\begin{aligned} \frac{de_{re}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} - \gamma_e \right] (e_{re}(t) - \alpha e_{im}(t)) \\ & + \kappa_e [e_{re}(t - \tau) \cos(\omega\tau) + e_{im}(t - \tau) \sin(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} - \gamma_e \right] (\alpha e_{re}(t) + e_{im}(t)) \\ & + \kappa_e [-e_{re}(t - \tau) \sin(\omega\tau) + e_{im}(t - \tau) \cos(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (3.141)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \gamma_n(n_{th} \frac{J}{J_{th}} - n(t)) - \frac{g_n(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} (e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)) \quad (3.142)$$

これらの式において，規格化された時間 t' および規格化された遅延時間 τ' を簡単のためそれぞれ t と τ に置き換えている．式 (3.140) および (3.141) の右辺第 2 項は戻り光を表す． κ_e は時間 \bar{t} により規格化された半導体レーザの戻り光強度であり，次のように定義される．

$$\kappa_e = \bar{t}\kappa = \bar{t} \frac{1}{\tau_{in}} \frac{(1 - r_2^2)r_3}{r_2} \quad (3.143)$$

ここで $\bar{t} = 10^{-9}$ は無次元化のために用いられた定数である．次節では戻り光強度 κ (r_3) を変化させた時の半導体レーザのダイナミクスを調査する．

方程式中のその他のパラメータについては第 3.1 節で説明されている．また本章の数値計算において使用するパラメータ値を表 3.3 に示す．方程式 (3.140)–(3.142) を数値積分するための方法として，本研究では Runge-Kutta 法を用いる．Runge-Kutta 法の詳細については Appendix B で述べられている．また本章の Runge-Kutta 法のための時間刻みは $h = 5.0 \times 10^{-12}$ としている．さらに過渡状態として数値計算により得られた最初の 10000 ns のデータは捨てている．

3.3.2 戻り光強度の変化

図 3.8 に様々な戻り光強度 κ に対する半導体レーザの出力強度 $I(t)$ の時系列を示す．戻り光強度 κ は時間遅延成分の強さであるため， κ を増加させることで時間遅延成分の影響が大きくなり，より複雑なダイナミクスが得られることが期待できる．また実験的に変化させることが容易であるため，応用に適したカオスを生成するための可変パラメータとして良く用いられる．図 3.8(a) は $\kappa = 0.00 \text{ ns}^{-1}$ ，つまり戻り

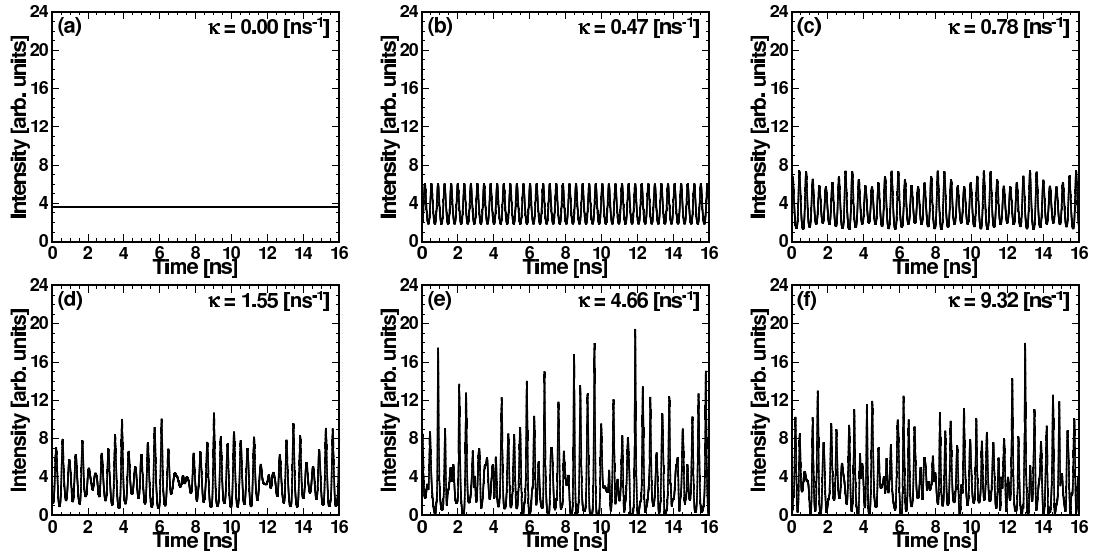


図 3.8: 様々な戻り光強度 κ に対するレーザ出力強度 $I(t)$ の時系列の数値計算結果．使用されている戻り光強度 κ はそれぞれ (a) $\kappa = 0.00 \text{ ns}^{-1}$, (b) $\kappa = 0.47 \text{ ns}^{-1}$, (c) $\kappa = 0.78 \text{ ns}^{-1}$, (d) $\kappa = 1.55 \text{ ns}^{-1}$, (e) $\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$, (f) $\kappa = 9.32 \text{ ns}^{-1}$.

光が付加されていない時のレーザ強度の時系列である．この時，半導体レーザは一定の光強度を出力する．しかし実際には半導体レーザは自然放出光によるノイズ成分を含む．したがって実験的には緩和振動を持つほぼ一定の出力強度となる．戻り光をレーザに付加し， $\kappa = 0.47 \text{ ns}^{-1}$ となると図 3.8(b) に示されるような 1 周期の時系列が観測される．さらに κ を増加させる ($\kappa = 0.78 \text{ ns}^{-1}$) と図 3.8(c) に示される準周期の時系列が観測される．図 3.8(c) では (b) で観測された時系列に遅い振動成分が付加された時系列となっていることが確認できる． $\kappa = 1.55 \text{ ns}^{-1}$ では図 3.8(e) に示されるようなカオス時系列が観測される．このような周期状態から準周期を介してカオス状態となる分岐現象はカオスへの準周期ルートとして知られている．図 3.8(d) は $\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$ であり，戻り光強度が大きい場合のカオス時系列である．戻り光強度が大きくなると，パルスのように振動する比較的大きな光強度の割合が増加する．図 3.8(f) は戻り光強度をさらに増加させ， $\kappa = 9.32 \text{ ns}^{-1}$ となった時のカオス時系列である．時系列からは (e) のカオス時系列と区別できる振る舞いは観察できないが，(e) と (f) のカオス時系列は後に示す周波数スペクトル，アトラクタで異なる特徴を有することが確認できるだろう．

戻り光強度を変化させた時の半導体レーザのダイナミクスの変化は，レーザ強度の周波数スペクトルの変化からも観測できる．レーザ強度の周波数スペクトルは時系列に対して高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform, FFT) を適用することによ

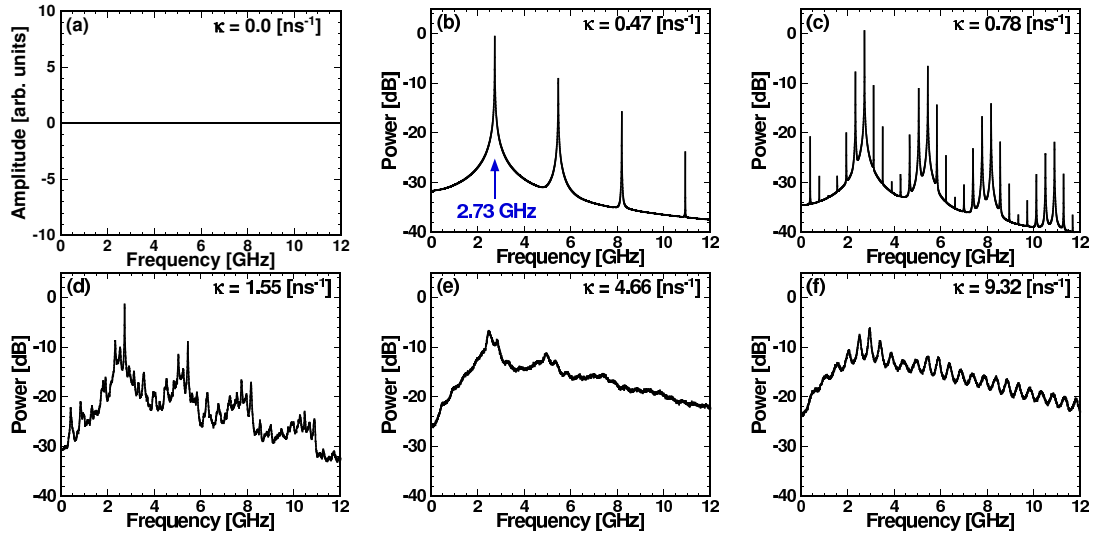


図 3.9: 様々な戻り光強度 κ に対するレーザ出力強度 $I(t)$ の周波数スペクトルの 数値計算結果. 使用されている戻り光強度 κ はそれぞれ (a) $\kappa = 0.00 \text{ ns}^{-1}$, (b) $\kappa = 0.47 \text{ ns}^{-1}$, (c) $\kappa = 0.78 \text{ ns}^{-1}$, (d) $\kappa = 1.55 \text{ ns}^{-1}$, (e) $\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$, (f) $\kappa = 9.32 \text{ ns}^{-1}$.

り得ることができる. 図 3.9 は異なる戻り光強度 κ に対するレーザ強度の周波数スペクトルを表している. 図 3.9(b)–(f) の周波数スペクトルは図 3.8 の時系列 (b)–(f) に対応している. カオスは周期信号とは異なり広がりを持つ周波数スペクトルを示す. このとき周波数スペクトルの形状を明確に示すために, 複数の時系列に対して FFT を行い, 周波数スペクトルのパワーを平均化してやると良い. 図 3.9 では, 163.84 ns (数値計算の刻み幅 0.005 ns で, 2^{15} 点に相当) の時系列を 200 個用意し, これに対して FFT を行い, パワーの平均化を行っている.

図 3.9(b) は $\kappa = 0.47 \text{ ns}^{-1}$ の時の周波数スペクトルであり, 対応する時系列は 1 周期である (図 3.8(b)). 大きなピークが 2.73 GHz に存在し, これは戻り光を持たない半導体レーザの緩和振動周波数とほとんど一致する. 図 3.9(c) はダイナミクスが準周期となる $\kappa = 0.78 \text{ ns}^{-1}$ の時の周波数スペクトルである. 2.73 GHz に位置している緩和振動周波数に相当する最も大きいピークのすぐそばに小さな周波数間隔でピークが観測できる. この周波数間隔は外部共振器長と関係づけられており, 外部共振器長を長くすることで減少する. しかしながらこの周波数の間隔は 0.4 GHz 程度であり, 光の外部共振器往復周波数 ($f_{\text{ext}} = c/(2L) \approx 0.5 \text{ GHz}$) に近い値となるが必ずしも一致しない. 戻り光強度をさらに増加させ, $\kappa = 1.55 \text{ ns}^{-1}$ となると, 図 3.9(d) のような周波数スペクトルをが観察される. 周期や準周期と比較して周波数スペクトルのパワーが全体的に高く, スペクトルが広がっていることが確認でき

る．これは時系列に非常にたくさんの周波数成分を含んでいることを示しており，ダイナミクスがカオスとなっていると考えられる．しかしながら細かなピークが多く観測することができ，物理乱数生成などの応用に適したカオスとは言えない．図 3.9(e) は戻り光強度がさらに大きな場合 ($\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$) の周波数スペクトルである．(d) と比較して，周波数スペクトルが平坦でなめらかになっていることが確認できる．さらに戻り光強度を増加させ， $\kappa = 9.32 \text{ ns}^{-1}$ となると，図 3.9(f) の周波数スペクトルが観察される．戻り光強度を増加させたことで，光の外部共振器往復周波数に対応する周波数間隔 (0.5 GHz) のピークが現れている．図 3.9(e) と (f) の周波数スペクトルの変化を調べることで，図 3.8(e) と (f) の時系列の比較からは観測することができないカオスダイナミクスの違いを観測することができる．物理乱数生成などへの応用を考えると，図 3.9(e) のカオスの周波数スペクトルがよりフラットに近く，外部共振器の長さの特徴が観察されにくいため，良い周波数スペクトルである．このように戻り光を有する半導体レーザにおける光強度の周波数領域での調査は，緩和振動周波数や光の外部共振器往復周波数といったレーザのダイナミクスにおいて重要とされる周波数成分の変化を観測することができるため，ダイナミクスを調査する際に非常に有用である．

非線形ダイナミカルシステムのためのダイナミクスの一般的な調査手法として，システムの状態空間におけるアトラクタを調査する方法が挙げられる．半導体レーザはレーザ強度 $I(t)$ ，光位相 $\Phi(t)$ (または光周波数) およびキャリア密度 $n(t)$ の 3 つの物理変数を持つ．状態空間におけるアトラクタの調査は各変数間の相互作用の理解への助けとなり，これは半導体レーザのダイナミクスを理解することにつながる．数値計算ではこれらのうちの 2 つの変数を用い構成された状態空間上でのアトラクタの振る舞いについて良く調査されている．実験的に光位相 $\Phi(t)$ およびキャリア密度 $n(t)$ の時間的な変化を調べることはかなり困難であるが，レーザ強度 $I(t)$ とキャリア密度 $n(t)$ の状態空間におけるアトラクタの実験的な調査の試みは行われており，実験的なアトラクタの調査も不可能ではない [73]．

注意しなければならないこととして，戻り光を有する半導体レーザが時間遅延ダイナミカルシステムであることが挙げられる．時間遅延ダイナミカルシステムの状態変数は遅延時間内の全ての状態変数により構成される．したがってその状態空間も非常に高次元 (理論的には無限次元) となる．しかしながら観測の容易さから，アトラクタの調査は 2 次元か 3 次元の空間において行われる．ゆえに時間遅延ダイナミカルシステムの場合，観測されるアトラクタは状態空間のほんの一部の空間に射影された軌道であることに注意しなければならない．

図 3.10 は図 3.8 の時系列に相当するレーザ強度 $I(t)$ とキャリア密度 $n(t)$ の状態空間に射影されたアトラクタを示している．図 3.10(a) は $\kappa = 0.00 \text{ ns}^{-1}$ の時，つまり

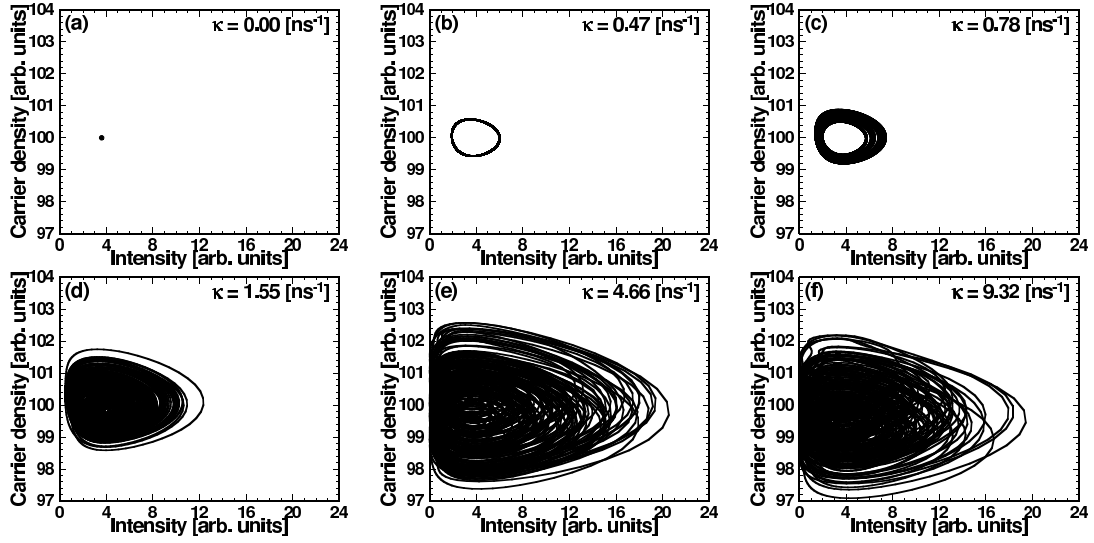


図 3.10: 様々な戻り光強度 κ に対するレーザ出力強度 $I(t)$ とキャリア密度 $n(t)$ の位相平面上でのアトラクタの数値計算結果. 使用されている戻り光強度 κ はそれぞれ (a) $\kappa = 0.00 \text{ ns}^{-1}$, (b) $\kappa = 0.47 \text{ ns}^{-1}$, (c) $\kappa = 0.78 \text{ ns}^{-1}$, (d) $\kappa = 1.55 \text{ ns}^{-1}$, (e) $\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$, (f) $\kappa = 9.32 \text{ ns}^{-1}$.

戻り光が付加されていない時のアトラクタである. 戻り光が付加されていないため, アトラクタは戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式から導出される平衡点に引き込まれている. 図 3.10(b) は $\kappa = 0.47 \text{ ns}^{-1}$ の時のアトラクタであり, リミットサイクルとなっている. これはダイナミクスが 1 周期であることを表す. 図 3.10(c) は $\kappa = 0.78 \text{ ns}^{-1}$ の時のアトラクタであり, トーラスアトラクタであることからダイナミクスが準周期であることが分かる. $\kappa = 1.55 \text{ ns}^{-1}$ のアトラクタ (図 3.10(d)) は (a)–(c) と比べて複雑なアトラクタであり, ダイナミクスがカオス的であることを示している. 戻り光強度をさらに増加させ, $\kappa = 3.11 \text{ ns}^{-1}$ となると (図 3.10(e)), 図 3.10(d) のアトラクタよりも大きくなっており, レーザ強度とキャリア密度のどちらについてもより大きな値を取り得ることが分かる. 図 3.10(e) よりも大きな戻り光強度 ($\kappa = 9.32 \text{ ns}^{-1}$) を用いた時のアトラクタが図 3.10(f) である. (e) のアトラクタと比較してキャリア密度が全体的に低くなっており, これは戻り光強度を増加させた結果である. 共振器内部の光量が増加したため, キャリア密度が減少していると考えられる.

次に半導体レーザの光周波数およびキャリア密度の状態空間に射影されたアトラクタを示す. 半導体レーザの光周波数は数百 THz 程度の非常に高速な周波数を持つが, 戻り光や光注入などの外部変調により数百 MHz から数十 GHz 程度の時間的な

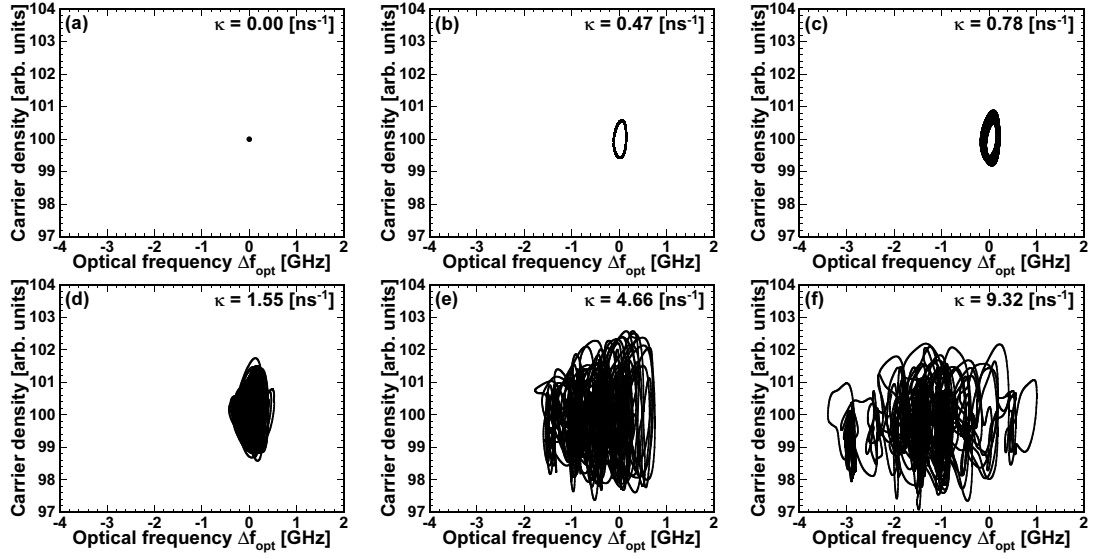


図 3.11: 様々な戻り光強度 κ に対する光周波数シフト $\Delta f_{\tau}(t)$ とキャリア密度 $n(t)$ の位相平面上でのアトラクタの数値計算結果. 使用されている戻り光強度 κ はそれぞれ (a) $\kappa = 0.00 \text{ ns}^{-1}$, (b) $\kappa = 0.47 \text{ ns}^{-1}$, (c) $\kappa = 0.78 \text{ ns}^{-1}$, (d) $\kappa = 1.55 \text{ ns}^{-1}$, (e) $\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$, (f) $\kappa = 9.32 \text{ ns}^{-1}$.

変化を生じる. 実験的には戻り光を持たない半導体レーザの光スペクトルがシャープなピークを持つのに対して, 戻り光などにより半導体レーザがカオス状態となると光スペクトルの幅が広がることに相当する. 戻り光を有する半導体レーザの場合, 光周波数 (または光位相) の時間的な変化は遅延時間 τ に関係づけられることが多く, 本研究においても遅延時間 τ の光位相 $\Phi(t)$ の変化率として光周波数を定義する.

$$\Delta f_{opt}(t) = f_{opt}(t) - f = \frac{\Phi(t) - \Phi(t - \tau)}{2\pi\tau} \quad (3.144)$$

ここで $f_{opt}(t)$ は時間的に変化する半導体レーザの光周波数, f は戻り光を持たない半導体レーザの光周波数 $f = \omega/(2\pi)$ である. したがって $\Delta f_{opt}(t)$ は基準 f との差を表す.

図 3.11 は図 3.8 に相当する光周波数 Δf_{opt} とキャリア密度 $n(t)$ の状態空間に射影されたアトラクタを示している. 図 3.11(a) は $\kappa = 0.00 \text{ ns}^{-1}$, つまり戻り光が付加されていない時のアトラクタを示している. 戻り光を付加されていないため, アトラクタは戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式の定常解 (平衡点) に収束する. 光周波数は $\Delta f_{opt} = 0.0 \text{ GHz}$ であり, これは光周波数が基準の光周波数 f と一致していることを表す. 戻り光を付加し, $\kappa = 0.47 \text{ ns}^{-1}$ となると図 3.11(b) のリミットサイクルのアトラクタが得られる. 図 3.11(c) は $\kappa = 0.78 \text{ ns}^{-1}$ の時のアトラクタで

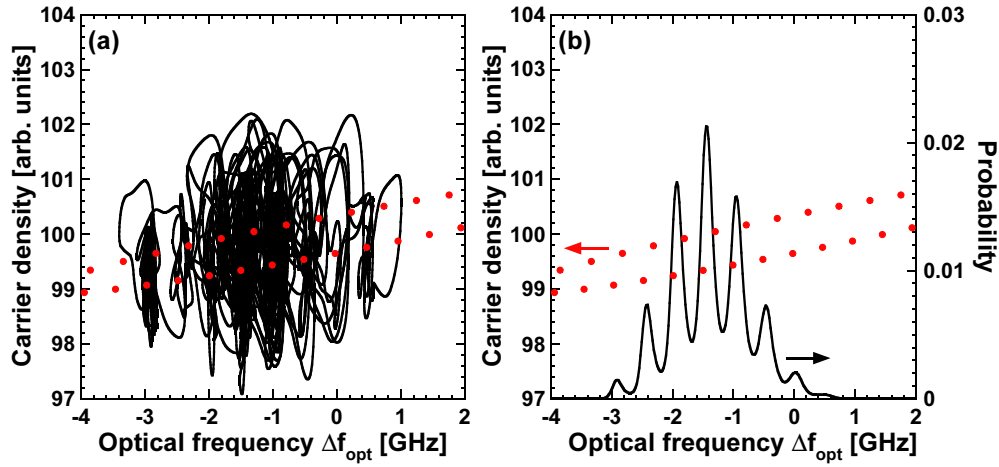


図 3.12: (a) 戻り光を有する半導体レーザの状態空間におけるアトラクタと定常解の分布. 図の縦軸と横軸はそれぞれキャリア密度と光周波数である. (b) (a) で示されている定常解の分布に光周波数の確率分布を重ねた図.

あり, トーラスとなっている. 戻り光強度を増加させ, $\kappa = 1.55 \text{ ns}^{-1}$ となると, ダイナミクスはカオスとなり, 図 3.11(d) のアトラクタを得ることができる. 光周波数は 0 GHz 付近を中心に $\pm 0.5 \text{ GHz}$ 程度の変化を示していることが分かる. これに対してさらに戻り光強度を増加させ, $\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$ となると (図 3.11(e)), Δf_{opt} は -2.0 GHz から 1.0 GHz の範囲で変化しており, 光周波数の変化領域が κ により変化することが分かる. さらに戻り光強度を増加させ, $\kappa = 9.32 \text{ ns}^{-1}$ となると, 図 3.11(f) のアトラクタが得られ, 光周波数 Δf_{opt} の分布範囲はさらに広がっている. 特に Δf_{opt} が負の方向に広がることが分かる. このように戻り光強度により光周波数の変化領域が広がる. また戻り光強度が強いほど光周波数が基準の光周波数から減少する. 半導体レーザの光周波数はカオス同期や周波数帯域拡大と密接に関係しているため, 光周波数の時間的な変化の調査は重要である.

図 3.11 に示されているような状態空間におけるアトラクタと第 3.2.3 節で導出した定常解の関係を述べることで, 戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスをより理解することができる. 図 3.12(a) は図 3.11(f) のアトラクタ上に第 3.2.3 節の方法で計算された定常解をプロットした図を示している. 図から定常解が分布している付近にアトラクタが存在していることが分かる. カオス状態の戻り光を有する半導体レーザの軌道はモード (楕円の下半分の解) ごとにローカルなカオスアトラクタを構成する傾向を示す. これは図 3.12(b) から観測することができる. 図 3.12(b) は図 3.12(a) の定常解の分布に光周波数 Δf_{opt} の確率分布を重ねた図である. 確率分布は複数のピークを有しており, ピークが得られる光周波数 Δf_{opt} はモードの位置

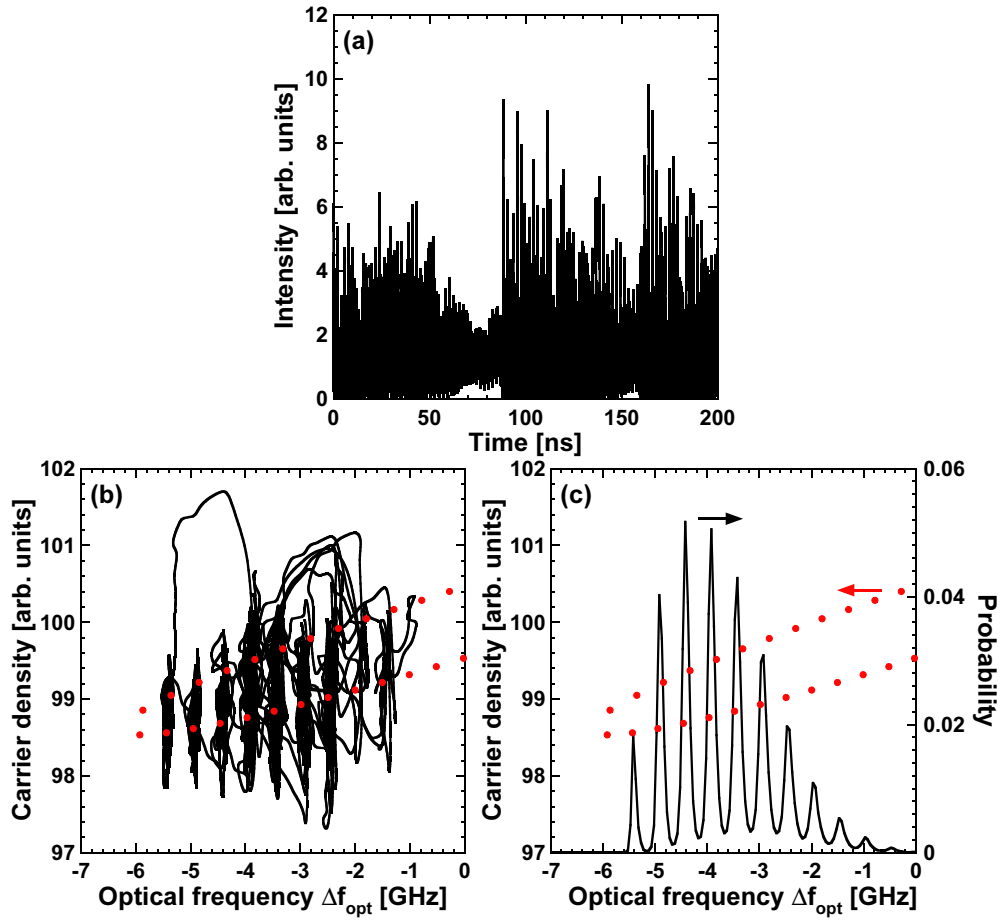


図 3.13: (a) 戻り光を有する半導体レーザの状態空間におけるアトラクタと定常解の分布. 図の縦軸と横軸はそれぞれキャリア密度と光周波数である. (b) (a) で示されている定常解の分布に光周波数の確率分布を重ねた図.

とほぼ一致していることが分かる.

より低い注入電流と高い戻り光強度を用いることで, アトラクタと定常解の関係をよりはっきりと観測することができる. 図 3.13 は注入電流 $j = 1.1$, 戻り光反射率 $r_3 = 0.08$ ($\kappa = 12.43 \text{ ns}^{-1}$) の時の (a) 時系列, (b) アトラクタ, (c) 光周波数の確率分布を示している. 時系列において, 80 ns 付近において振幅の小さな振動から急に振幅の大きな振動が現れていることが確認できる. このようなダイナミクスは低い電流値と高い戻り光強度において容易に観測することができる. この種のダイナミクスとして良く知られているのが Low Frequency Fluctuation (LFF) である [69, 70, 73, 74]. LFF は戻り光を有する半導体レーザが示すカオス的遍歴であると

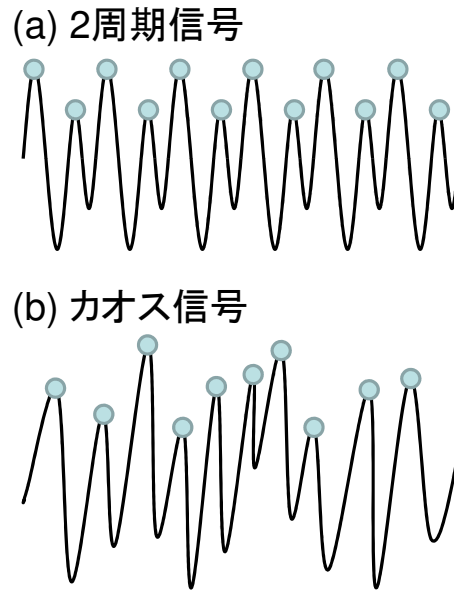


図 3.14: 分岐図の作成方法の模式図. (a) は 2 周期信号の場合, (b) はカオス信号の場合を表している.

考えられており, LFF を用いた様々な研究がこれまでに行われている [75–77]. カオス的遍歴とはシステムが状態空間において複数のローカルなアトラクタを有するときに, それらのアトラクタをカオス的に遍歴する現象である [78–80]. ローカルアトラクタは定常解 (平衡点) のまわりに存在するため, 状態空間におけるアトラクタと定常解を比較することで, 軌道が遍歴する様子を観測できる. 図 3.13(b) は光周波数とキャリア密度の状態空間におけるアトラクタと定常解の分布を示しており, 図 3.13(b) の時系列と同じパラメータで作成されている. 軌道がモード (楕円の下半分) 付近に存在していることが確認できる. LFF ダイナミクスでは光周波数が減少する方向に軌道がモードを遍歴し, 楕円の左端に到達した後, キャリア密度の急激な増加 (レーザ強度の急激な減少, ドロップアウト) を示す. 図 3.13(c) は光周波数の確率分布と定常解の分布を示しており, モードごとにピークが存在していることが分かる. 図 3.12(b) と比較してピークが大きく (縦軸のスケールが異なることに注意する), 各モードの周辺に分布が偏っていることが分かる. このように戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスを理解するために定常解の分布は有用である.

最後に戻り光強度 κ を変化させた時の分岐現象をレーザ強度 $I(t)$ の分岐図を用いて観測する. 分岐図はパラメータを変化させた時のダイナミクスの変化を観察するのに非常に便利である. 図 3.14 に分岐図の作成方法の模式図を示す. 最も簡単に作

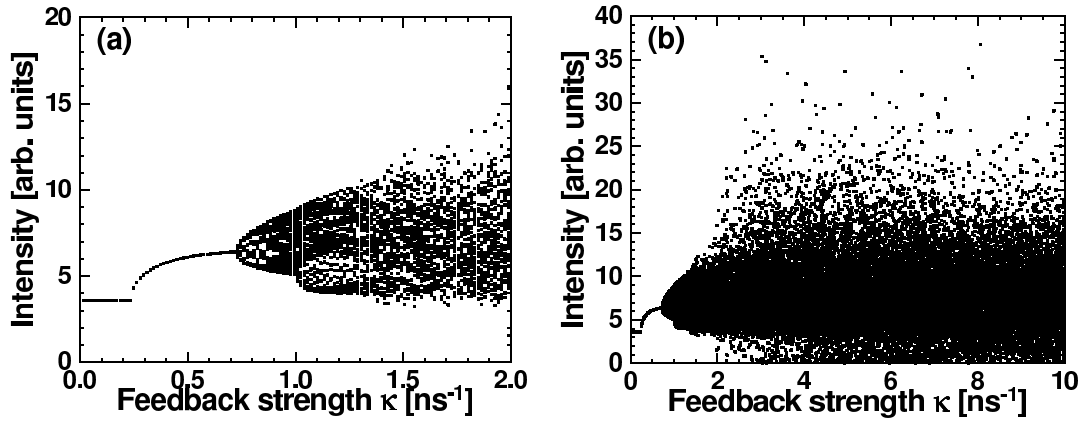


図 3.15: 戻り光強度 κ を変化させた時のレーザ強度の分岐図．レーザ強度時系列の極大値をそれぞれの κ で 50 点ずつプロット．初期状態はそれぞれの κ で同じ値に初期化している．

成可能な分岐図は観測可能な時系列を用いて作成する方法である．本章では図 3.14 に示されているように，レーザ強度時系列の極大値をプロットすることにより分岐図を作成する．図 3.14 において 2 周期信号とカオス信号の場合について具体的な例が示されている．図 3.14(a) のように 2 周期信号だった場合，極大値がとり得る値は 2 値となる．一方で図 3.14(b) のようにカオス信号であった場合，極大値はある範囲の全ての値がとり得る値となる．したがって，ダイナミクスが 1 周期や 2 周期の場合には分岐図において点が 1 つ，2 つとなるが，カオスの場合，ある範囲を点が稠密に埋め尽くす．このようにダイナミクスの周期性が分岐図に現れるため，分岐図を用いて簡易的に分岐現象を観測し，またダイナミクスを判定することができる．しかしながら分岐のタイプ (ホップ分岐やサドルノード分岐など) を判別することはできないため，より詳細に分岐を調べる必要があるならば，固定点や周期ダイナミクスの分岐解析を行う必要がある．戻り光を有する半導体レーザは時間遅延システムであるため，一般的なシステムとは分岐解析の方法も多少異なるが，これまでに時間遅延システムにおける分岐解析手法が提案されており [81]，戻り光を有する半導体レーザにも適用されている [82–87]．

図 3.15(a) は戻り光強度 κ が比較的小さい領域における分岐図である．戻り光強度を $\kappa = 0.00 \text{ ns}^{-1}$ から増加させていくと， $\kappa = 0.23 \text{ ns}^{-1}$ まではレーザ強度が変化せず，安定状態となっている． $\kappa > 0.23 \text{ ns}^{-1}$ となるとレーザ強度が増加し始めることから，ダイナミクスが 1 周期になっていることが分かり，1 周期は $\kappa < 0.71 \text{ ns}^{-1}$ まで続く． $\kappa > 0.71 \text{ ns}^{-1}$ では分岐図に点が複数存在しており，一方で点の分布が構造的であることから，ダイナミクスが準周期であることが分かる．この準周期ダイ

ナミクスは $\kappa = 1.3 \text{ ns}^{-1}$ 付近まで続く．さらに戻り光強度を増加させると， $\kappa > 1.4 \text{ ns}^{-1}$ では点がばらついており，ダイナミクスがカオスであることが分かる．数値的に得られた時系列により作成した分岐図を用いたダイナミクスの判定は，あいまいさは残ってしまうが容易に行うことができるため，ダイナミクスの調査に良く用いられる．より正確にダイナミクスを判定する必要があるのであれば，分岐解析により平衡点や周期解の安定性を調べる必要がある．またカオス性の判定のみが必要とされるのであれば，最大リアプノフ指数の符号を調べるのが良い．戻り光を有する半導体レーザのリアプノフ指数の算出結果については第4章で詳しく述べられている．

図 3.15(b) は戻り光強度 κ を広い範囲で変化させた時の分岐図である．分岐図の主な利用方法はダイナミクスの判定であるが，パラメータを変化させた時の時系列の分布の傾向を調査するためにも有用である．図 3.15(b) において戻り光強度 κ を増加させた時，レーザ強度が 5 から 10 の範囲に点が集合していることが分かる．一方で強度が 35 程度と非常に大きな点も存在し，パルス的な振動も得られていることが分かる．このように分岐図によりパラメータを変化させた時のダイナミクスの変化を調査することができる．

3.3.3 利得飽和効果

半導体レーザにおいて利得飽和効果はダイナミクスに大きな影響を与えることが知られている．半導体レーザは発振に必要とするしきい値注入電流値 J_{th} を持つが，光出力面で光子が拡散するため，実際に発振に必要とされる電流値は J_{th} よりも大きくなる．これは飽和効果により表現することができる．この飽和効果が半導体レーザダイナミクスに与える影響として，光利得の非線形性が挙げられ，Lang-Kobayashi 方程式では ϵ でその強さが表される．飽和強度 ϵ が 0 でなく光強度が強い場合，レーザ媒質の利得がキャリアや光の形でレーザ媒質に注入されるエネルギーに対して飽和する．これはレーザカオスダイナミクスにおいて強い光強度を抑制する効果を持つ．

図 3.16 は利得飽和効果が無い場合 ($\epsilon = 0$) とある場合 ($\epsilon = 2.0 \times 10^{-23}$) のレーザ強度の時系列および確率分布である．図 3.16(a) は飽和効果が無い場合 ($\epsilon = 0$) のレーザ強度の時系列であり，振幅が大きくパルス的な振動が多く観察されている．この時のレーザ強度の確率分布が図 3.16(b) であり，分布が 0 付近に多く偏っていることが分かる．大きな振幅を持つレーザ強度が得られた場合，半導体レーザが持つキャリア密度が多く消費され，レーザ強度はその後すぐに 0 付近となってしまうため，0

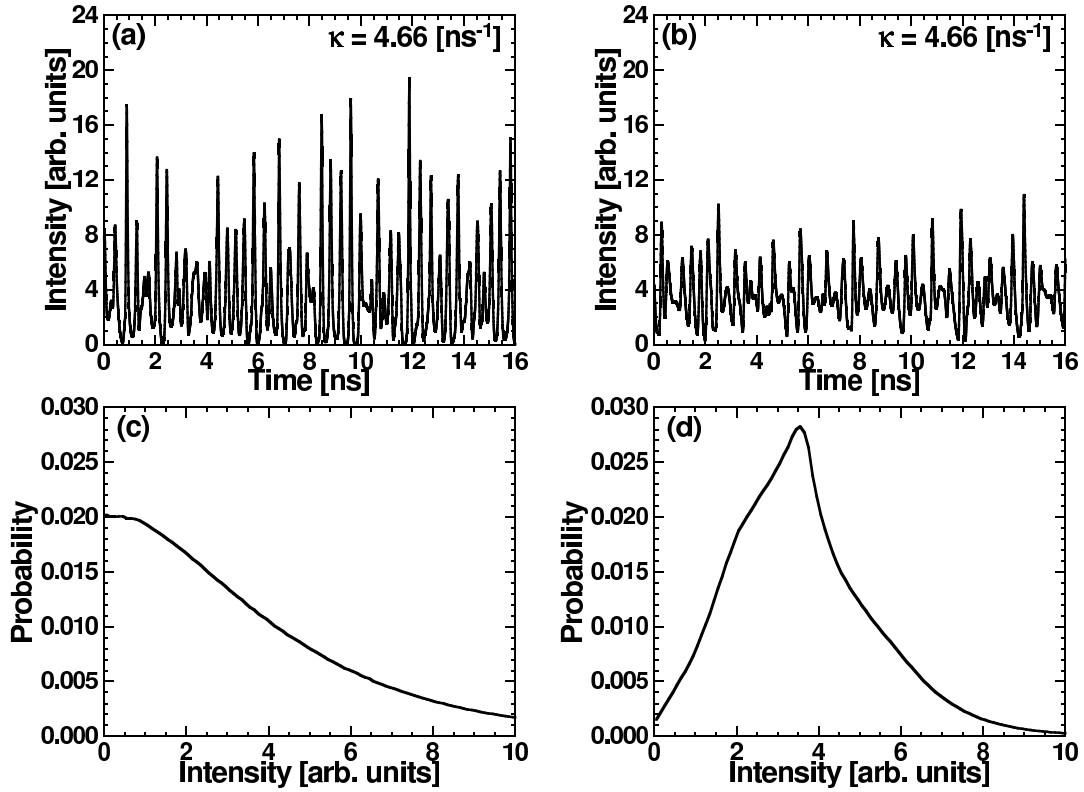


図 3.16: 飽和効果が無い場合と有る場合におけるレーザ強度の時系列 (a), (b) と確率分布 (c), (d) の比較. (a), (c) は飽和が無い場合 ($\epsilon = 0.0$) の結果であり, (b), (d) は飽和効果が有る場合 ($\epsilon = 2.0 \times 10^{-23}$) の結果である.

付近のレーザ強度の分布が多くなってしまふ. これは実験的に観察されるレーザ強度の確率分布とは大きく異なっており, 戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスを再現できているとは言えない. 一方で利得飽和効果がある場合 ($\epsilon = 2.0 \times 10^{-23}$) の時系列 (図 3.16(c)) は比較的振幅が小さい振動となっており, パルスのような瞬間的に強い光強度は観測されない. またレーザ強度の確率分布 (図 3.16(d)) は 0 付近の頻度が少なくなっており, 飽和効果が無い場合と比較してガウス分布に近づいている. この確率分布は実験で得られるものと比較的似ており, 実験を再現するために飽和効果が重要であることが確認できる.

さらにレーザ強度の分岐図を比較することで利得飽和効果による影響を観測する. 図 3.17 は飽和効果が無い場合と有る場合に対して, 戻り光強度 κ を変化させた時のレーザ強度時系列の分岐図である. 図 3.17(a) は利得飽和効果が無い場合 ($\epsilon = 0$) のレーザ強度の分岐図であり, 図 3.15(b) と同じ分岐図である. 戻り光強度 κ を増加させることでレーザ強度の分布が急激に広がり, パルスのようなカオス振動が得られるこ

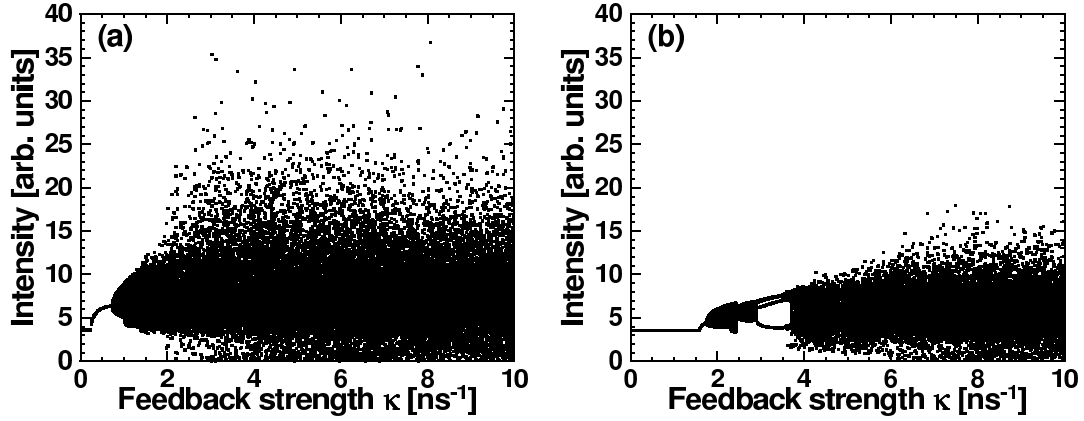


図 3.17: 戻り光強度 κ を変化させた時のレーザ強度の分岐図．レーザ強度時系列の極大値をそれぞれの κ で 50 点ずつプロット．初期状態はそれぞれの κ で同じ値に初期化している．

とが分かる．一方で利得飽和効果がある場合 ($\epsilon = 2.0 \times 10^{-23}$) の分岐図 (図 3.17(b)) では、戻り光強度 κ を増加させてもレーザ強度は比較的小さな値のままであることが分かる．このように飽和効果によりレーザカオスの出力強度分布の 0 への偏りを減らし、比較的ガウス分布に近づけることができる．また図 3.17(a) と (b) を比較すると、カオスとなるために必要な戻り光強度 κ が異なる点も重要である．飽和効果が有る場合、ダイナミクスがカオスとなるためにより大きな κ が必要となる．このように飽和効果はレーザの分岐現象にも影響を与える．

3.4 まとめ

本章ではまず、戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスを良く表現する Lang-Kobayashi 方程式の導出を行った．導出された方程式は複素電界とキャリア密度の微分方程式からなる．ここで複素電界は複素数であるため、これらの方程式を数値積分すると計算量が大きくなってしまう場合がある．そこで複素電界を電界振幅と電界位相に分離した方程式と電界実部と電界虚部に分離した方程式を導出した．本研究の戻り光を有する半導体レーザの数値計算では、電界実部と電界虚部の方程式を用いる．また方程式の無次元化も行った．無次元化は次節以降でリアプノフ指数を算出する際に、数値計算の誤差を避けるために重要である．

次に戻り光を持たない Lang-Kobayashi 方程式の定常解を算出した．定常解に対して線形安定性解析を行うことで、半導体レーザの緩和発振周波数を表す方程式を

導出した．また戻り光を有する Lang-Kobayashi 方程式の定常解を算出した．

最後に Lang-Kobayashi 方程式を数値的に解くことで，戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスの調査を行った．戻り光の強度の変化に対して半導体レーザのダイナミクスが定常状態 (平衡状態) から周期，準周期を介してカオスに変化することを観測した．半導体レーザダイナミクスの変化を調査するためには，レーザ強度時系列だけでなく周波数スペクトルを用いることで，ダイナミクスの変化を容易に観測することができ，また時間遅延ダイナミカルシステムの遅延時間 τ により表れる特徴も容易に観測することができる．さらに数値計算においてアトラクタの観測もダイナミクスの変化を調査するために有効である．半導体レーザのアトラクタを実験的に観測することは容易ではないが，数値的な調査において，ダイナミクスが変化する要因を調査するためにアトラクタが有効である場合が多く存在する．また飽和効果によるダイナミクスへの影響の調査を行った．飽和効果を付加する前は戻り光反射率が高い時にレーザ強度がパルスのような振る舞いを示すこと，0 付近に強度分布が偏るといった傾向が見られた．しかしながら飽和効果を付加することでこのような現象が観察されなくなり，これは実験的に観測されるレーザ強度分布の傾向と良く一致する．

Appendix A: 非線形方程式の数値解法

本節では第 3.2.3 節で示した戻り光を有する Lang-Kobayashi 方程式の光角周波数の定常解 ω_s の方程式 (3.137) を数値的に解く手法について説明する．以下に式 (3.137) を再度記述する．

$$\omega_s - \omega = -\kappa\sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\omega_s\tau + \tan^{-1} \alpha) \quad (3.145)$$

式 (3.145) の右辺は非線形であり，解析的に ω_s の解を得るのは困難である．このような場合には，計算機により数値的に解を得る方法が必要となる．非線形方程式の解法として一般的な方法はニュートン法や 2 分法などが挙げられる．ここでは 2 分法について述べ，その具体的はアルゴリズムを示す．

2 分法は，閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ において $f(a)f(b) \leq 0$ ならば， $f(x_s) = 0$ となる x_s が区間 $[a, b]$ に存在することを用いることで， $f(x_s) = 0$ となる解 x_s を求める方法である． x_s の存在は中間値の定理より保証される．図 3.18 に 2 分法の例を示す．青線は関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$ の曲線であり， $f(x_s) = 0$ となる解 x_s を求めることを目的とする．前提として解 x_s よりも小さな $x = a_0 = -0.8$ と大きな $x = b_0 = 4$ があらかじめ分かっているものとする．これは $f(a_0)f(b_0) \leq 0$ を満た

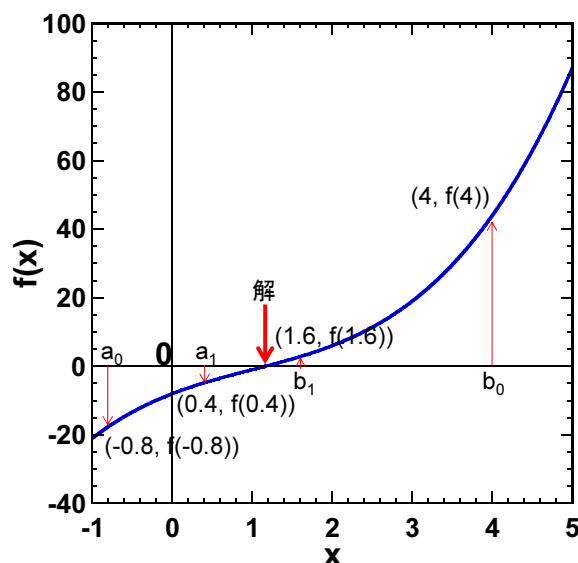


図 3.18: 2 分法の原理の説明. 図の青線は $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$ の曲線を表している.

せばよいため簡単に得ることができる. 次に a_0 と b_0 から区間 $[a_0, b_0]$ を 2 分する点 c_0 を計算する

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 1.6 \quad (3.146)$$

点 c_0 から $f(c_0)$ を計算し, $f(a_0)f(c_0)$ の符号を調べる. 図 3.18 では $f(a_0)f(c_0) < 0$ となる. したがって $f(a_0)$ と $f(c_0)$ は異なる符号を持つため, 解 x_s を境にしてそれぞれ反対側に存在することになる. 一方で点 b_0 と点 c_0 は解 x_s を境にして同じ側に存在することになるが, 点 c_0 の方が点 b_0 よりも解 x_s の近くに存在する. ここで $b_1 = c_0$ とし, a_0 と b_1 から再び区間 $[a_0, b_1]$ を 2 分する点 c_1 を計算する. 先ほどと同様に点 c_1 から $f(c_1)$ を計算し, $f(a_0)f(c_1)$ の符号を調べる. 図 3.18 では $f(a_0)f(c_1) > 0$ となる. 今度は $f(a_0)$ と $f(c_0)$ は同じ符号を持つため, 解 x_s を境にして同じ側に存在する. そこで $a_1 = c_1$ とし, a_1 と b_1 から再び区間 $[a_1, b_1]$ を 2 分する点 c_2 を計算する. 以上を繰り返し行うことにより 2 分点 c は解に近づいていく. 最終的に以下の条件を満たした時の計算をやめ, その時の 2 分点 c を関数 $f(x)$ の解とみなす.

$$b - a \leq s \quad (3.147)$$

ここで s は微小な値に設定し, これが近似解の精度に相当する.

具体的に式 (3.145) に 2 分法を適用する際の手順を述べる. まず式 (3.145) を以下

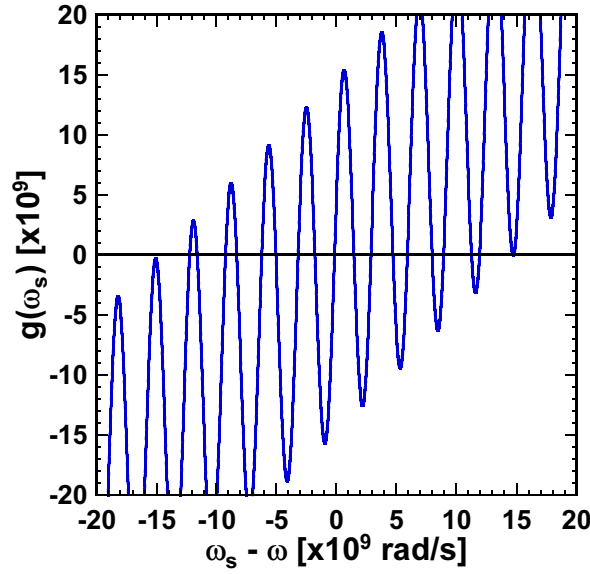


図 3.19: 関数 $g(\omega_s - \omega)$ の変化. 横軸は半導体レーザの光角周波数の定常解 $\omega_s - \omega$ である. この時のレーザパラメータは第 3.2.3 節の図 3.6(a) の作成に用いられたものと同じである.

のように変形する.

$$\omega_s - \omega + \kappa \sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\omega_s \tau + \tan^{-1} \alpha) = 0 \quad (3.148)$$

式 (3.148) の左辺を $g(\omega_s)$ と置いた時の $g(\omega_s)$ の変化を図 3.19 に示す. 図 3.19 から分かるように, $g(\omega_s) = 0$ は複数の解を持つ. 2 分法を適用するために, 解をはさんだ 2 つの点 a_0, b_0 を得る必要がある. これは $\omega_s - \omega$ に対して適当な範囲 (解を全て含む) を設定してやり, 範囲の小さい方から十分小さな刻みで $g(\omega_s)$ の符号を順次調べれば良い. 図 3.148 の場合, $-20 \times 10^9 \leq \omega_s - \omega \leq 20 \times 10^9$ の範囲において, $\omega_s - \omega = -20 \times 10^9$ から十分小さな刻みを加えつつ $g(\omega_s)$ の符号を調べる. $g(\omega_s)$ の符号を調べる途中で $g(\omega_s)$ の符号が変化したならば, それは $g(\omega_s)$ が $g(\omega_s) = 0$ を横切ったことを意味する. この時に符号が変わる直前の ω_s を a_0 , 符号が変わった直後の ω_s を b_0 とすれば良い. この a_0 と b_0 に対して先ほど説明した 2 分法を適用し, $b - a \leq s$ となるまで繰り返し計算を行い, 解を求める. 解を求めた後は再び小さな刻みごとに $g(\omega_s)$ の符号を調べ, 符号が変化すると共に 2 分法を適用し解を求める. 以上を最初に設定した $\omega_s - \omega$ の範囲内で繰り返し, 式 (3.148) の解を全て求める.

2 分法の解への収束速度はそれほど速くないが, 対象とする関数が連続であり, 区間 $[a, b]$ 内に解があればどんな形の関数でも収束するので信頼性が高い.

Appendix B: Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法は計算機を用いた常微分方程式の解法に頻繁に用いられている方法の 1 つである。常微分方程式の解法として他にオイラー法, Adams-Bashforth 法などが挙げられるが, 前者は数値計算の精度, 後者はプログラム実装面で Runge-Kutta 法に劣ると考えられる。本節では 4 次の Runge-Kutta 法の原理について説明を行う。

まず次のような常微分方程式を数値的に解くことを考える。

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \quad (3.149)$$

ここで x は状態変数, t は時間を表す。式 (3.149) を数値的に解くとは, 時間刻みを h とした時の x の増分を求め, それを $x(t)$ に加えた値を $x(t+h)$ の値とすることである。具体的には式 (3.149) を次のように差分商で置き換え,

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x) \quad (3.150)$$

式 (3.150) を整理すると $x(t+h)$ は,

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x) \quad (3.151)$$

のようにして求めることができる。これはオイラー法と呼ばれ非常に簡単な方法であるが, 計算精度の点で問題があることが知られている。

式 (3.151) は $x(t+h)$ を時刻 t の近傍としてテイラー展開することでも求めることができる。

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{1!} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3x(t)}{dt^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4x(t)}{dt^4} + \dots \quad (3.152)$$

式 (3.152) において 2 階以上の微分項を無視した式が式 (3.151) と一致する。先ほども述べたように, オイラー法は計算精度に問題がある。そこで式 (3.152) における高次の項まで用いることで計算精度を高めることができる。この方法が Runge-Kutta 法と呼ばれ, 特に 4 次の微分項まで用いるものを 4 次 Runge-Kutta 法と呼ばれる。

4 次 Runge-Kutta 法の最も簡単な係数を持つ方程式を次式に示す.

$$k_1 = hf(t, x) \quad (3.153)$$

$$k_2 = hf\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{k_1}{2}\right) \quad (3.154)$$

$$k_3 = hf\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{k_2}{2}\right) \quad (3.155)$$

$$k_4 = hf(t + h, x + k_3) \quad (3.156)$$

$$x(t + h) = x(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.157)$$

この方法のアルゴリズムを以下に示す.

1. まず点 (t, x) における微分係数を用いて増分 k_1 を算出する.
2. 増分 k_1 から得られる点 $(t + h, x + k_1)$ と点 (t, x) との midpoint における微分係数から増分 k_2 を算出する.
3. 増分 k_2 から得られた点 $(t + h, x + k_2)$ と点 (t, x) との midpoint における微分係数から増分 k_2 を計算する.
4. 増分 k_3 から得られた点 $(t + h, x + k_3)$ の点での微分係数から増分 k_4 を計算する.
5. つぎに増分 k_1, k_2, k_3, k_4 を $1:2:2:1$ の割合で加重平均したものを最終的な増分と考える.
6. step1 から step5 を繰り返すことによって微分方程式の解を順次算出する.

つまり順次修正を行いながら複数回計算し, その平均を重みを付けて求めることで精度を上げている. 本研究ではこの方法を用いて数値計算を行う.

第4章 戻り光を有する半導体レーザの リアプノフスペクトラム解析

本章では Lang-Kobayashi 方程式に対してリアプノフスペクトラム解析を行い、戻り光を有する半導体レーザの複雑性の定量化を行う。リアプノフ指数は状態空間の軌道に対して与えられた微小誤差の指数関数的な拡大率を表し、カオスの予測不可能性を定量化する指標である [30]。リアプノフ指数の逆数は予測の限界時間を表し、リアプノフ指数が大きいほど予測限界時間が短くなる。戻り光を有する半導体レーザを用いた高速物理乱数生成において、生成された物理乱数のランダム性を評価するためにリアプノフ指数は重要である [29]。リアプノフ指数の逆数が表す予測限界時間よりも長いサンプリング間隔で 0 と 1 の乱数列を生成することにより、ランダム性が保障された乱数列を生成することができる。

本章ではまず、戻り光を有する半導体レーザにおいてリアプノフ指数を算出するために Lang-Kobayashi 方程式の線形化を行う。次に線形化された Lang-Kobayashi 方程式を用いて時間遅延ダイナミカルシステムにおいてリアプノフ指数を算出する方法を示す。最後に本手法を用いて戻り光を有する半導体レーザのリアプノフ指数を算出し、レーザパラメータへの依存性を調査する。

4.1 戻り光を有する半導体レーザの数値モデルとレーザ パラメータ

Lang-Kobayashi 方程式を用いたリアプノフスペクトラム解析において使用する方程式は、実部-虚部に分離した無次元化 Lang-Kobayashi 方程式 (3.91)-(3.93) が望ましい。この理由は元の Lang-Kobayashi 方程式の電界とキャリア密度の変化のオーダーが大きく異なるためである。リアプノフ指数を算出するために微小揺らぎの発展を数値積分する必要があるが、数値積分する際に微小揺らぎを適当な時間間隔で規格化する必要がある。この時、変数の変化のオーダーが異なると、大きさが小さ

Symbols	Parameter	Value
G_N	Gain coefficient	$8.40 \times 10^{-13} m^3 s^{-1}$
N_0	Carrier density at transparency	$1.40 \times 10^{24} m^{-3}$
τ_p	Photon lifetime	$1.927 \times 10^{-12} s$
τ_s	Carrier lifetime	$2.04 \times 10^{-9} s$
τ_{in}	Roundtrip time in internal cavity	$8.0 \times 10^{-12} s$
r_2	Reflectivity of laser facet	0.556
r_3	Reflectivity of laser facet	0.04
J/J_{th}	Normalized injection current	1.36
L	External cavity length	0.3 m
α	Linewidth enhancement factor	3.0
λ	Optical wavelength	$1.537 \times 10^{-6} m$
c	Speed of light	$2.998 \times 10^8 ms^{-1}$
τ	Roundtrip time in external cavity (feedback delay time)	$2.001 \times 10^{-9} s$
N_{th}	Carrier density at threshold	$2.018 \times 10^{24} m^{-3}$
J_{th}	Injection current at threshold	$9.892 \times 10^{32} m^{-3} s^{-1}$
ω	Optical angular frequency	$1.215 \times 10^{15} s^{-1}$
ϵ	Gain saturation coefficient	0.0 or 2.0×10^{-23}

表 4.1: 本章の数値計算で使用するレーザパラメータ

い変数が繰り返される規格化により 0 に収束してしまい、正しくリアプノフ指数を計算することができない．無次元化方程式を用いることでこの問題は解消することができる．

以下に本章で用いる無次元化された Lang-Kobayashi 方程式 (3.91)-(3.93) を再度示す．

$$\begin{aligned} \frac{de_{re}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} - \gamma_e \right] (e_{re}(t) - \alpha e_{im}(t)) \\ & + \kappa_e [e_{re}(t - \tau) \cos(\omega\tau) + e_{im}(t - \tau) \sin(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} - \gamma_e \right] (\alpha e_{re}(t) + e_{im}(t)) \\ & + \kappa_e [-e_{re}(t - \tau) \sin(\omega\tau) + e_{im}(t - \tau) \cos(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\frac{dn(t)}{dt'} = \gamma_n(n_{th} \frac{J}{J_{th}} - n(t)) - \frac{g_n(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))}(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)) \quad (4.3)$$

e_{re} , e_{im} , n は無次元化定数 \bar{A} , \bar{N} により無次元化された無次元量であり, 電界実部 E_{re} , 電界虚部 E_{im} およびキャリア密度 N と $E_{re} = \bar{A}e_{re}$, $E_{im} = \bar{A}e_{im}$, $N = \bar{N}n$ という関係を持つ. 簡単のため, 式中の t' および τ' をそれぞれ t , τ として表している. 無次元化定数 \bar{A} , \bar{N} は第3章の式 (3.80) のように, 戻り光を持たない半導体レーザの定常解を用いて定義されている. 方程式中の定数 g_e , g_n , γ_e , γ_n , n_0 , n_{th} は第3章の式 (3.76) として定義されている. また式 (4.1) および (4.2) の右辺第2項の κ_e は時間 $t' = 10^{-9}$ で規格化された戻り光強度を表し, 次のように定義される.

$$\kappa_e = t' \kappa = \frac{1}{\tau_{in}} \frac{(1 - r_2^2)r_3}{r_2} \quad (4.4)$$

戻り光強度 κ は外部鏡反射率 r_3 を変えることにより変化させる. 本章で用いるレーザパラメータを表 4.1 に示す.

4.2 一般的なシステムにおけるリアプノフ指数の算出手法

4.2.1 リアプノフ指数の定義と QR 分解による算出手法

まず初めに以下に表される一般的な n 次元の連続時間ダイナミカルシステムについてリアプノフ指数の定義を説明する.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t), t) \quad (4.5)$$

ここで $\mathbf{x}(t)$ は n 次元の状態ベクトルを表す. リアプノフ指数を算出する場合, 基準軌道 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ に対して与えられた微小揺らぎ $\delta\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ の線形化された発展を考える必要がある.

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{x}(t))\delta\mathbf{x}(t) \quad (4.6)$$

ここで $\mathbf{J}(\mathbf{x}(t))$ はヤコビ行列を表す.

リアプノフ指数は誤差拡大率であるため, これを算出するために $\delta\mathbf{x}(t)$ を時間発展させる写像が必要である. 離散時間システムの場合, ヤコビ行列が $\delta\mathbf{x}(t)$ を時間発展させる写像となる. 一方で連続時間システムの場合は式 (4.6) を数値積分すること

により $\delta \mathbf{x}(t)$ を時間発展させる写像を得る必要がある． $\delta \mathbf{x}(t)$ を時間発展させる写像を得るために，微小揺らぎの初期状態 $\delta \mathbf{x}_i(0)$ を n 本用意する (ただし i は $1 \leq i \leq n$ の整数)．ここで $\delta \mathbf{x}_i(0)$ を横に並べた行列 $\mathbf{P}(0) = [\delta \mathbf{x}_1(0), \delta \mathbf{x}_2(0), \dots, \delta \mathbf{x}_n(0)]$ を定義し，簡単のため $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ を単位行列とする．

$$\mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

つまり $\mathbf{P}(t)$ は n 本の $\delta \mathbf{x}(t)$ から構成され，その初期状態 ($t = 0$) は単位行列 \mathbf{I} である．ここで式 (4.6) を用いて n 本の $\delta \mathbf{x}_i(0)$ を数値積分し，時間 T だけ発展させた変数 $\delta \mathbf{x}_i(T)$ を得る．この時，行列 $\mathbf{P}(T)$ は初期状態 $\mathbf{P}(0)$ が単位行列であるため， $\delta \mathbf{x}_i(0)$ をそれぞれ $\delta \mathbf{x}_i(T)$ に時間発展させる写像とみなすことができる．

$$\delta \mathbf{x}_i(T) = \mathbf{P}(T) \delta \mathbf{x}_i(0) \quad (4.8)$$

この時，行列 $\mathbf{P}(T)$ から以下の正定値行列を定義する．

$$\mathbf{Z} = \lim_{T \rightarrow \infty} [\mathbf{P}^\dagger(T) \mathbf{P}(T)]^{1/(2T)} \quad (4.9)$$

ここで \dagger は行列の転置を表す．行列 $\mathbf{P}(T)$ は軌道の初期値 $\mathbf{x}(0)$ に依存するが，行列 \mathbf{Z} は $T \rightarrow \infty$ で極限が存在し，システムの状態空間におけるほとんど全ての初期値 $\mathbf{x}(0)$ に対して収束することが多重エルゴード定理として証明されている [30]．この時リアプノフ指数 λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は行列 \mathbf{Z} の固有値の対数から次のように計算される．

$$\lambda_i = \ln \mathbf{Z}_{ii} \quad (4.10)$$

ここで \mathbf{Z}_{ii} は行列 \mathbf{Z} の i 行 i 列目の成分，つまり i 番目の対角成分を表す．以上のようにしてリアプノフ指数は定義されるが，実際に計算する場合には定義通りに計算することは容易ではない．これは数値計算において微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}_i(t)$ が状態空間の安定な (リアプノフ指数が負となる) 方向に潰れてしまうためである．これを避けるために，適当な時間間隔で微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}_i(t)$ を正規直交化してやる必要がある．正規直交化の手段として QR 分解や特異値分解が挙げられるが，ここでは QR 分解を用いた正規直交化手法について述べる [30, 38]．

n 本の微小揺らぎの初期変位 $\delta \mathbf{x}_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) からなる行列 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} は単位行列) を，線形化方程式 (4.6) を用いて微小時間 h だけ発展させ， $\mathbf{X}(h)$ を得

る．ここで $\delta \mathbf{X}(t)$ を $\delta \mathbf{X}(t+h)$ に時間発展させる写像を $\mathbf{B}(t, t+h)$ で表すと次のような関係があることに注意する．

$$\mathbf{X}(h) = \mathbf{B}(0, h)\mathbf{X}(0) = \mathbf{B}(0, h) \quad (4.11)$$

最後の等号は $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ と仮定していることを用いた．この $\mathbf{B}(0, h)$ は $\mathbf{X}(h)$ を時間発展させ続けると，微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}(t)$ が負のリアプノフ指数の方向に潰れてしまう．これを防ぐために $\mathbf{X}(h)$ に対して QR 分解により正規直交化を行う [37]．QR 分解により行列 $\mathbf{X}(h)$ は次のように正規直交行列 \mathbf{Q} と上三角行列 \mathbf{R} に分解されるとする．

$$\mathbf{X}(h) = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 \quad (4.12)$$

QR 分解の具体的な方法については次節で述べる．上記の QR 分解により得られた正規直交行列 \mathbf{Q}_1 を新たに $\mathbf{X}(h)$ とみなす．つまり行列 \mathbf{Q}_1 の列ベクトルが新たに時間 h における微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}_i(h)$ の状態となる． \mathbf{Q}_1 は正規直交行列なので，これを新たな微小揺らぎの状態とすることで，微小揺らぎが負のリアプノフ指数の方向に潰れることを防ぐことができる．

次に行列 \mathbf{Q}_1 となった $\mathbf{X}(h)$ を線形化方程式 (4.6) を用いて再び時間 h だけ発展させ $\mathbf{X}(2h)$ を得る．この時 $\mathbf{X}(2h)$ と \mathbf{Q}_1 の間に次の関係が成り立つことに注意する．

$$\mathbf{X}(2h) = \mathbf{B}(h, 2h)\mathbf{Q}_1 \quad (4.13)$$

ここで行列 $\mathbf{B}(h, 2h)$ は $\mathbf{X}(h)$ を $\mathbf{X}(2h)$ に時間発展させる行列である．行列 $\mathbf{X}(2h)$ に対して再び QR 分解を行う．

$$\mathbf{X}(2h) = \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2 \quad (4.14)$$

上記の QR 分解により得られた正規直交行列 \mathbf{Q}_2 を新たに $\mathbf{X}(2h)$ とみなす．以上の手順を繰り返し行った時，行列 $\mathbf{B}(t, t+h)$ ($t = ih$, i は 0 以上の整数) の行列積と行列 $\mathbf{P}(T)$ には次のような関係がある．

$$\mathbf{P}(T) \approx \mathbf{B}(T-h, T)\mathbf{B}(T-2h, T-h) \cdots \mathbf{B}(0, h) \quad (4.15)$$

行列 $\mathbf{B}(0, h) = \mathbf{X}(h) = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1$ であるから，式 (4.15) は次のように変換される．

$$\mathbf{P}(T) \approx \mathbf{B}(T-h, T)\mathbf{B}(T-2h, T-h) \cdots \mathbf{B}(h, 2h)\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 \quad (4.16)$$

さらに式 (4.13) より $\mathbf{B}(h, 2h)\mathbf{Q}_1 = \mathbf{X}(2h)$ であり，式 (4.14) より $\mathbf{X}(2h) = \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2$ であるから，式 (4.16) は次のように変換される．

$$\mathbf{P}(T) \approx \mathbf{B}(T-h, T)\mathbf{B}(T-2h, T-h) \cdots \mathbf{B}(2h, 3h)\mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \quad (4.17)$$

この変換を繰り返すことにより以下の関係が得られる。

$$P(T) \approx Q_N R_N R_{N-1} \cdots R_2 R_1 \quad (4.18)$$

ここで $N = T/h$ は QR 分解の計算回数である。式 (4.18) の右辺を Λ と置く。リアプノフ指数は行列 $\Lambda^\dagger \Lambda$ の固有値から算出することができ、 $\Lambda^\dagger \Lambda$ は行列 R_i を用いて次のように表される。

$$\Lambda^\dagger \Lambda = R_1^\dagger R_2^\dagger \cdots R_N^\dagger Q_N^\dagger Q_N R_N \cdots R_2 R_1 \quad (4.19)$$

$$= R_1^\dagger R_2^\dagger \cdots R_N^\dagger R_N \cdots R_2 R_1 \quad (4.20)$$

式 (4.20) の最後の等号は行列 Q_N が正規直交行列であるため、 $Q_N^\dagger Q_N = I$ となることを用いた。また R_i は上三角行列であるため、 $R_N \cdots R_2 R_1$ も上三角行列となる。さらに上三角行列の固有値はその対角成分と等しいため、行列 Λ の固有値は行列積 $R_N \cdots R_2 R_1$ の固有値と等しく、したがって $\Lambda^\dagger \Lambda$ の固有値は $R_N \cdots R_2 R_1$ の固有値の 2 乗に等しい。また上三角行列の行列積の各対角成分はそれぞれの上三角行列の各対角成分の積で表される。以上から、リアプノフ指数 λ_j は上三角行列 R_i の j 番目の対角成分 R_i^{jj} を用いて次のように計算される。

$$\lambda_j = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N \ln(R_i^{jj}) \quad (4.21)$$

式 (4.21) に示されているように、リアプノフ指数 λ_j は上三角行列 R_i の対角成分の固有値の対数を平均化することで得ることができる。したがって数値計算では行列 $\mathbf{X}(t)$ (ただし、 $t = ih$) に QR 分解を適用することで得られる上三角行列 R_i の対角成分の対数を足していくことでリアプノフ指数を計算することができる。

4.2.2 グラム–シュミットの直交化を用いた QR 分解の方法

最後に QR 分解の具体的な方法について述べる。QR 分解の手法としてグラム–シュミット法やハウスホルダ変換が挙げられるが、ここではグラム–シュミット法を用いて QR 分解を行う。まず行列 $\mathbf{X}(t)$ は n 本の微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}_i(t)$ から次のように定義されている。

$$\mathbf{X}(t) = (\delta \mathbf{x}_1 \delta \mathbf{x}_2 \cdots \delta \mathbf{x}_n) \quad (4.22)$$

表記を簡単化するために $\delta \mathbf{x}_i(t)$ の (t) を省略した。QR 分解により上記の $\mathbf{X}(t)$ を正規直交行列 Q と上三角行列 R に分解することを考える。

$$\mathbf{X}(t) = QR \quad (4.23)$$

上記の分解を行うために，行列 $\mathbf{X}(t)$ の各列ベクトル $\delta \mathbf{x}_i$ に対してグラム–シュミットの直交化を行う．まず $\delta \mathbf{x}_1$ に対して正規化したベクトルを \mathbf{q}_1 とする．

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\delta \mathbf{x}_1}{|\delta \mathbf{x}_1|} \quad (4.24)$$

ここで $|\delta \mathbf{x}_1|$ は $\delta \mathbf{x}_1$ の大きさを表し，これを r_{11} と置く (つまり $r_{11} = |\delta \mathbf{x}_1|$)．次に行列 $\mathbf{X}(t)$ の2番目の列ベクトル $\delta \mathbf{x}_2$ を \mathbf{q}_1 に対して直交化したベクトル \mathbf{b}_2 を求める．

$$\mathbf{b}_2 = \delta \mathbf{x}_2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \delta \mathbf{x}_2) \mathbf{q}_1 \quad (4.25)$$

ここで $(\mathbf{q}_1 \cdot \delta \mathbf{x}_2)$ は2つのベクトルの内積を表し，これを r_{12} と置く (つまり $r_{12} = (\mathbf{q}_1 \cdot \delta \mathbf{x}_2)$)．ベクトル \mathbf{b}_2 を正規化することにより \mathbf{q}_1 と正規直交なベクトル \mathbf{q}_2 を求める．

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} \quad (4.26)$$

ここでベクトル \mathbf{b}_2 の大きさを r_{22} と置く (つまり $r_{22} = |\mathbf{b}_2|$)．さらに行列 $\mathbf{X}(t)$ の3列目のベクトル $\delta \mathbf{x}_3$ に対して， \mathbf{q}_1 および \mathbf{q}_2 と直交化したベクトル \mathbf{b}_3 を求める．

$$\mathbf{b}_3 = \delta \mathbf{x}_3 - (\mathbf{q}_1 \cdot \delta \mathbf{x}_3) \mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2 \cdot \delta \mathbf{x}_3) \mathbf{q}_2 \quad (4.27)$$

ここで $(\mathbf{q}_1 \cdot \delta \mathbf{x}_3)$ および $(\mathbf{q}_2 \cdot \delta \mathbf{x}_3)$ をそれぞれ r_{13} , r_{23} と置く．ベクトル \mathbf{b}_3 を正規化することにより \mathbf{q}_1 および \mathbf{q}_2 と正規直交なベクトル \mathbf{q}_3 を求める．

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{|\mathbf{b}_3|} \quad (4.28)$$

ここで $r_{33} = |\mathbf{b}_3|$ と置く．この操作を行列 $\mathbf{X}(t)$ の全ての列ベクトルに対し順次行くと， i 番目の列ベクトル $\delta \mathbf{x}_i$ に対して直交化を行った結果は次のように表される．

$$\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{b}_i}{|\mathbf{b}_i|}, \quad \mathbf{b}_i = \delta \mathbf{x}_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\mathbf{q}_k \cdot \delta \mathbf{x}_i) \mathbf{q}_k \quad (4.29)$$

ここで $r_{ii} = |\mathbf{b}_i|$, $r_{ij} = (\mathbf{q}_i \cdot \delta \mathbf{x}_j)$ と置く．この時，行列 $\mathbf{X}(t)$ のQR分解はベクトル \mathbf{q}_i および r_{ij} を用いて次のように達成される．

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{R} = (\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \cdots \ \mathbf{q}_n) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

ここで上三角行列 \mathbf{R} の対角成分 r_{jj} は式 (4.21) の R_i^{jj} に相当する．また行列 \mathbf{Q} の列ベクトル \mathbf{q}_i が新たな微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}(t)$ の状態となる．つまり行列 \mathbf{Q} を新たに $\mathbf{X}(t)$ とみなし，線形化方程式 (4.6) を解くために用いる．

以上のような方法で QR 分解を実装した場合， r_{11} から順番にグラム-シュミットの直交化を行っているため， r_{jj} について次のような関係が得られる．

$$r_{jj} \geq r_{j+1j+1} \quad (4.31)$$

したがって r_{11} が最も大きな値を持つため，式 (4.21) において λ_1 が最大リアプノフ指数 λ_{max} となり，さらに $\lambda_j \geq \lambda_{j+1}$ という関係が得られる．また上三角行列 \mathbf{R} の要素 r_{ij} において，リアプノフ指数の算出に用いられるのは対角成分 r_{jj} のみである．そのため QR 分解を数値計算上で実装する際に，上三角行列の対角以外の成分を計算しないように工夫することで計算量を減らすことができる．

4.3 Lang-Kobayashi 方程式の線形化

戻り光を有する半導体レーザに対してリアプノフスペクトラム解析を行うため，Lang-Kobayashi 方程式を線形化する．位相空間において，基準となる軌道に対する微小揺らぎ $\delta e_{re}(t) = \bar{e}_{re}(t) - e_{re}(t)$ ， $\delta e_{im}(t) = \bar{e}_{im}(t) - e_{im}(t)$ ， $\delta n(t) = \bar{n}(t) - n(t)$ を考える．ここで $\bar{e}_{re}(t)$ ， $\bar{e}_{im}(t)$ ， $\bar{n}(t)$ はそれぞれ電界実部，電界虚部，キャリア密度の基準軌道を表す．微小揺らぎ $\delta e_{re}(t)$ ， $\delta e_{im}(t)$ ， $\delta n(t)$ を用いて Lang-Kobayashi 方程式を線形化すると，以下の方程式が得られる [3, 36]．

$$\frac{d\delta \mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{J}_t[\mathbf{x}(t)] \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{J}_{t-\tau}[\mathbf{x}(t-\tau)] \delta \mathbf{x}(t-\tau) \quad (4.32)$$

ここで $\mathbf{x}(t) = (e_{re}(t), e_{im}(t), n(t))^\dagger$ ， $\delta \mathbf{x}(t) = (\delta e_{re}(t), \delta e_{im}(t), \delta n(t))^\dagger$ であり， \dagger は転置を表す． \mathbf{J}_t および $\mathbf{J}_{t-\tau}$ はそれぞれ時間 t と $t-\tau$ の変数 \mathbf{x} の偏微分により得られる 3×3 係数行列である．Lang-Kobayashi 方程式 (4.1)–(4.3) について， e_{re} ， e_{im} ， $n(t)$ の微分方程式の右辺をそれぞれ f_1 ， f_2 ， f_3 と置くと， \mathbf{J}_t および $\mathbf{J}_{t-\tau}$ は次のように表される．

$$\mathbf{J}_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e_{re}(t)} & \frac{\partial f_1}{\partial e_{im}(t)} & \frac{\partial f_1}{\partial n(t)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial e_{re}(t)} & \frac{\partial f_2}{\partial e_{im}(t)} & \frac{\partial f_2}{\partial n(t)} \\ \frac{\partial f_3}{\partial e_{re}(t)} & \frac{\partial f_3}{\partial e_{im}(t)} & \frac{\partial f_3}{\partial n(t)} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{J}_{t-\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e_{re}(t-\tau)} & \frac{\partial f_1}{\partial e_{im}(t-\tau)} & \frac{\partial f_1}{\partial n(t-\tau)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial e_{re}(t-\tau)} & \frac{\partial f_2}{\partial e_{im}(t-\tau)} & \frac{\partial f_2}{\partial n(t-\tau)} \\ \frac{\partial f_3}{\partial e_{re}(t-\tau)} & \frac{\partial f_3}{\partial e_{im}(t-\tau)} & \frac{\partial f_3}{\partial n(t-\tau)} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

上記の行列 \mathbf{J}_t の各要素はそれぞれ以下のように表される.

$$\frac{\partial f_1}{\partial e_{re}(t)} = \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)(1 + \epsilon'(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t) + 2\alpha e_{re}(t)e_{im}(t)))}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} - \gamma_e \right] \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial e_{im}(t)} = \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)(\epsilon'(\alpha(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t)) - 2e_{re}(t)e_{im}(t)) - \alpha)}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} + \alpha\gamma_e \right] \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial n(t)} = \frac{g_n(e_{re}(t) - \alpha e_{im}(t))}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial e_{re}(t)} = \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)(\epsilon'(\alpha(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t)) - 2e_{re}(t)e_{im}(t)) + \alpha)}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} - \alpha\gamma_e \right] \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial e_{im}(t)} = \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)(1 - \epsilon'(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t) + 2\alpha e_{re}(t)e_{im}(t)))}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} - \gamma_e \right] \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial n(t)} = \frac{\alpha g_n(e_{re}(t) + e_{im}(t))}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial e_{re}(t)} = \frac{-2G'_n(n(t) - n_0)e_{re}(t)}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial e_{im}(t)} = \frac{-2G'_n(n(t) - n_0)e_{im}(t)}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial n(t)} = - \left[\gamma_n + \frac{G'_n(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} \right] \quad (4.43)$$

また行列 $\mathbf{J}_{t-\tau}$ の各要素はそれぞれ以下のように表される.

$$\frac{\partial f_1}{\partial e_{re}(t - \tau)} = \kappa_e \cos(\omega\tau) \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial e_{im}(t - \tau)} = \kappa_e \sin(\omega\tau) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial n(t - \tau)} = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial e_{re}(t - \tau)} = -\kappa_e \sin(\omega\tau) \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial e_{im}(t - \tau)} = \kappa_e \cos(\omega\tau) \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial n(t - \tau)} = 0 \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial e_{re}(t-\tau)} = \frac{\partial f_3}{\partial e_{im}(t-\tau)} = \frac{\partial f_3}{\partial n(t-\tau)} = 0 \quad (4.50)$$

キャリア密度の微分方程式 (4.3) は時間遅延の項を持たないため，時間遅延変数 $\delta e_{re}(t-\tau)$ ， $\delta e_{im}(t-\tau)$ ， $\delta n(t-\tau)$ による f_3 の偏微分は全て 0 となる．このように表される線形化方程式と Lang-Kobayashi 方程式を同時に数値積分することで微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}(t)$ の時間発展を調べることができる．

4.4 戻り光を有する半導体レーザにおける最大リアプノフ指数の算出

4.4.1 戻り光を有する半導体レーザにおける最大リアプノフ指数の算出手法

第 4.2 節で一般的なシステムでは線形化方程式を数値積分することにより得られる行列 $\mathbf{P}(t)$ を用いてリアプノフ指数が定義されることを説明した．これに対して時間遅延ダイナミカルシステムにおいてリアプノフ指数を算出する場合，システムの状態空間が一般的なシステムと異なるため，直接状態空間を定義できないことが問題となる [36]．時間遅延ダイナミカルシステムの状態空間は時間 t から $t-\tau$ (τ は遅延時間) の全ての状態から構成されるが，状態が連続的であるため無限次元となるからである．そこで本節では，時間遅延成分を十分に小さな時間 h により離散化することで [36]，無限次元システムを有限次元システムとして考えることにより，新たに状態空間を定義し，リアプノフ指数を算出する方法を述べる．

遅延時間 τ を微小時間 h により離散化し，戻り光を有する半導体レーザの状態ベクトル $\mathbf{x}(t) = (e_{re}(t), e_{im}(t), n(t))^\dagger$ から，遅延時間 τ に含まれる全ての状態ベクトル $\mathbf{x}(t)$ からなる新しい状態ベクトル $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{x}^\dagger(t), \mathbf{x}^\dagger(t-h), \mathbf{x}^\dagger(t-2h), \dots, \mathbf{x}^\dagger(t-Mh))^\dagger$ を定義する [36]．ここで $M = \tau/h$ であり， $\mathbf{y}(t)$ は $3(M+1)$ 次元ベクトルである．また \dagger は転置を表す．第 4.3 節に示されている方法に従い微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}(t) = (\delta e_{re}(t), \delta e_{im}(t), \delta n(t))$ を考え，線形化されたモデル方程式 (4.32) を得る．離散化された状態ベクトル $\mathbf{y}(t)$ を得る方法と同様に， $3(M+1)$ 次元ベクトルの微小揺らぎを表す状態ベクトル $\delta \mathbf{y}(t) = (\delta \mathbf{x}^\dagger(t), \delta \mathbf{x}^\dagger(t-h), \dots, \delta \mathbf{x}^\dagger(t-\tau))^\dagger$ を新たに定義する．この $3(M+1)$ 次元状態ベクトル $\delta \mathbf{y}(t)$ に対して，第 4.2 節で示されている時間遅延を持たないシステムにおけるリアプノフ指数の算出手法を適用することで，戻り光を有する半導体レーザにおいてリアプノフ指数を算出することができ

る．具体的には $3(M+1)$ 本の $\delta \mathbf{y}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, 3(M+1)$) からなる行列 $\mathbf{Y}(t)$ を次のように仮定する．

$$\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)) \quad (4.51)$$

つまり行列 $\mathbf{Y}(t)$ は $3(M+1) \times 3(M+1)$ の要素からなる行列である．この行列 $\mathbf{Y}(t)$ は第 4.2 節の行列 $\mathbf{X}(t)$ に相当する．行列 $\mathbf{X}(t)$ は $n \times n$ 行列であるため，この点が異なる．行列 $\mathbf{Y}(t)$ に対して初期値 $\mathbf{Y}(0)$ を考え，線形化方程式 (4.32) により数値積分することで行列 $\mathbf{Y}(t)$ の時間発展を得ることができる．この時，行列 $\mathbf{Y}(t)$ の初期状態 $\mathbf{Y}(0)$ は単位行列でなく，適当な正規直交行列とする必要がある．初期状態を単位行列とすると，線形化方程式 (4.32) を数値計算するとき，状態変数のほとんどが 0 となり，正しく計算できなくなる．

行列 $\mathbf{Y}(t)$ に対して第 4.2 節の方法を適用することでリアプノフ指数を算出することができる．しかしながら行列 $\mathbf{Y}(t)$ は $3(M+1)$ 本の $\delta \mathbf{y}_i(t)$ から構成されているため， $\mathbf{Y}(t)$ を時間発展させるためには $3(M+1)$ 本の $\delta \mathbf{y}_i(t)$ を全て線形化方程式により数値積分しなければならない．これは非常に計算量が大きくなるため，数値計算上望ましくない．そこで簡単のため，まず最大リアプノフ指数 λ_{max} の数値計算手順を述べる．第 4.2.1 節で述べられているように，行列 $\mathbf{Y}(t)$ の QR 分解から得られた上三角行列 \mathbf{R} の対角成分を用いることでリアプノフ指数を算出することができる．さらに行列 $\mathbf{Y}(t)$ の QR 分解が第 4.2.2 節で述べられているようにグラム–シュミットの直交化により行われる時，式 (4.30) の上三角行列 \mathbf{R} の対角成分 r_{jj} において r_{11} が最大となる．したがって最大リアプノフ指数 λ_{max} は r_{11} から計算される．上三角行列 \mathbf{R} の第 1 対角成分 r_{11} はグラム–シュミットの直交化を適用する行列の第 1 列目の状態ベクトルのノルムであり，本節においてこれは行列 $\mathbf{Y}(t)$ の第 1 列 $\delta \mathbf{y}_1(t)$ のノルム $|\delta \mathbf{y}_1(t)|$ である．ノルム $|\delta \mathbf{y}_1(t)|$ を $d(t)$ と置くと， $d(t)$ は $\delta e_{re}(t)$ ， $\delta e_{im}(t)$ ， $\delta n(t)$ から次のように計算される．

$$d(t) = \sqrt{\sum_{i=0}^M (\delta e_{re}^2(t - ih) + \delta e_{im}^2(t - ih) + \delta n^2(t - ih))} \quad (4.52)$$

微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}_1(t)$ の状態変化が遅延時間 τ ごとであるとみなし，ノルム $d(t)$ の計算を遅延時間 τ ごとに行う．またノルム $d(t)$ の計算後に微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}_1(t)$ をノルム $d(t)$ で割ることにより規格化する．これにより規格化後の $\delta \mathbf{y}_1(t)$ のノルム $d(t)$ は 1 となる．この規格化はグラム–シュミットの直交化による行列 $\mathbf{Y}(t)$ の QR 分解により得られる正規直交行列 \mathbf{Q} の第 1 ベクトル (式 (4.30) の \mathbf{q}_1) を計算することに相当する．この時，最大リアプノフ指数 λ_{max} はノルム $d(t)$ および遅延時間 τ を用いる

ことで次のように計算される.

$$\lambda_{max} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N \ln[d_1(i\tau)] \quad (4.53)$$

ここで N は計算回数を表す.

以上の方法を整理すると, 最大リアプノフ指数 λ_{max} の数値計算手順は以下のよう
に表される.

1. 微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}_1(0)$ の初期状態を設定する. また最大リアプノフ指数を $\lambda_{max} = 0$ に, 繰り返し回数を $i = 0$ にそれぞれに初期化する.
2. $i = N$ となるまでモデル方程式とともに線形化方程式 (4.32) を用いて微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}_1(0)$ を数値積分し, 遅延時間 τ ごとに以下を繰り返し行う.
 - (a) 式 (4.52) を用いて微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}_1(t)$ のノルム $d(t)$ を計算する.
 - (b) $\delta \mathbf{y}_1(t)$ をノルム $d(t)$ により規格化する.
 - (c) λ_{max} に $\ln[d(t)]$ を加える.
 - (d) i に 1 を加える.
3. λ_{max} を時間 $m\tau$ で割ることにより最大リアプノフ指数を得る.

最大リアプノフ指数のみ必要な場合, 数値積分しなければならない微小揺らぎが $\delta \mathbf{y}_1(t)$ のみであるため, 2 個以上のリアプノフ指数を算出する場合よりも計算量が小さい. したがって 2 個以上のリアプノフ指数を計算する必要がない場合, 以上のような計算方法が望ましい.

4.4.2 最大リアプノフ指数の算出結果

図 4.1 に戻り光強度 κ を変化させた時の戻り光を有する半導体レーザの最大リアプノフ指数 λ_1 の変化を示す. ここでは利得飽和係数を $\epsilon = 0.0$ としている. 図 4.1(a) は図 3.15(b) で示した分岐図を作成するためのパラメータと同じものを使用している. また図 3.15(b) の分岐図を図 4.1(c) に再び示す. 図 4.1(a) から $0.0 \text{ ns}^{-1} < \kappa < 1.3 \text{ ns}^{-1}$ では λ_1 はほぼ 0 ns^{-1} であり, ダイナミクスがカオスでないことが分かる. 図 4.1(c) の分岐図と比較すると, 安定・周期・準周期領域と $\lambda_1 = 0 \text{ ns}^{-1}$ である領域が良く一致していることが分かる. 戻り光強度を $\kappa = 1.3 \text{ ns}^{-1}$ から増加させると, λ_1 は正となることから, ダイナミクスがカオスとなることが分かる. また κ の増加と共に λ_1 は単調に増加している. しかしながら戻り光強度が $\kappa = 8.7 \text{ ns}^{-1}$ を超えると

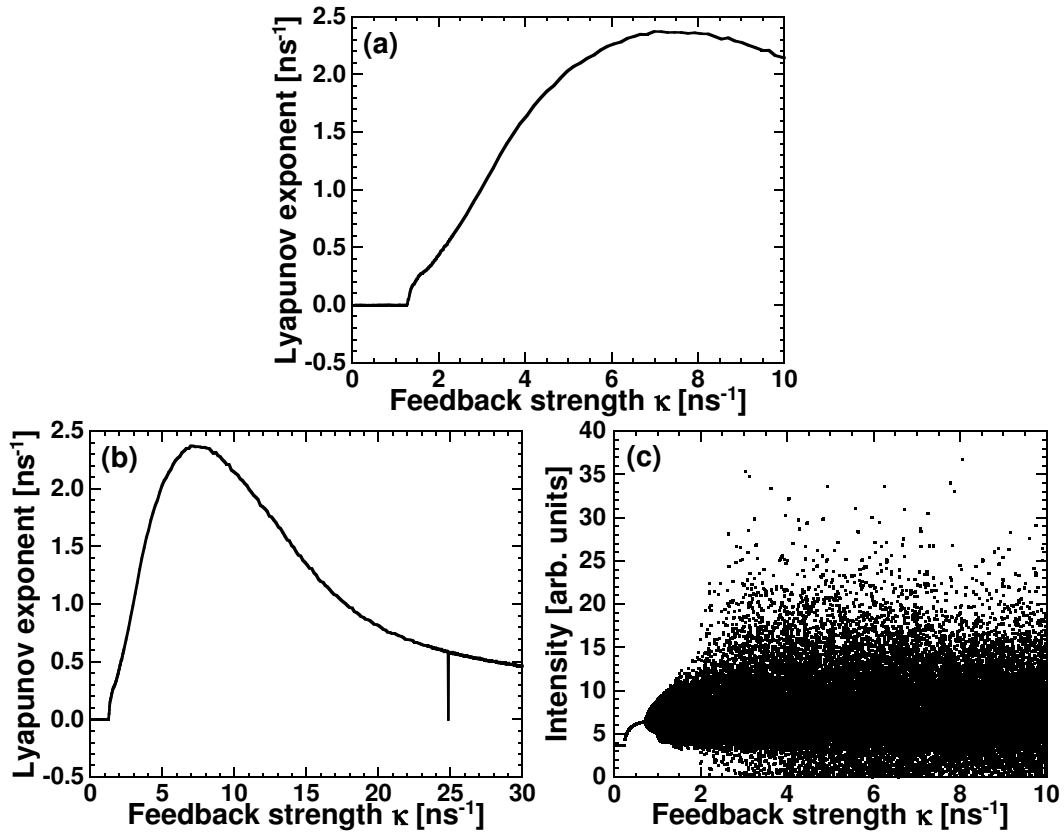


図 4.1: 戻り光強度 κ を変化させた時の半導体レーザの最大リアプノフ指数 λ_1 の変化. (a) は図 3.17(a) と同じ κ の範囲を用いて作られており, (b) は (a) よりも κ を増加させた場合を表している. (c) は (a) に相当する分岐図であり, 図 3.15(b) と同じ分岐図である.

λ_1 は減少し始める. 図 4.1(b) に戻り光強度 κ を (a) の範囲よりも増加させた時の最大リアプノフ指数 λ_1 の変化を示している. 図 4.1(b) において, 戻り光強度 $\kappa > 8.7$ ns⁻¹ の範囲では κ の増加と共に λ_1 が減少する様子が確認できる. このように戻り光強度が強すぎると最大リアプノフ指数は減少してしまうため, 最大リアプノフ指数を最も高くするために最適な戻り光強度を探索する必要がある.

4.5 戻り光を有する半導体レーザにおけるリアプノフスペクトラムの算出

戻り光を有する半導体レーザは時間遅延ダイナミカルシステムであるため、理論的には無限次元を有する。リアプノフ指数はシステムが有する次元と同じ数だけ存在するため、戻り光を有する半導体レーザでは理論的には無限の数のリアプノフ指数を算出することができる。しかしながら第 4.4.1 節で述べたように、時間遅延ダイナミカルシステムにおいて状態空間を有限次元に落とすために遅延時間 τ を微小時間 h で離散化することを行っている。このため戻り光を有する半導体レーザの次元は $3(M+1)$ 次元となるため ($M = \tau/h$)、 $3(M+1)$ 個のリアプノフ指数のみ算出することができる。実際には $3(M+1)$ 個のリアプノフ指数を計算すると計算量が非常に大きくなるため、全てのリアプノフ指数を算出するのは好ましくない。そのため本節では、あとで説明する Kaplan-Yorke 次元を計算するのに十分な数だけ計算する。

4.5.1 リアプノフスペクトラムの算出手法

本節では、戻り光を有する半導体レーザで p 個のリアプノフ指数を算出手法について述べる。第 4.4.1 節で述べたように、時間 t から $t-\tau$ に含まれる戻り光を有する半導体レーザの状態を微小時間 h で離散化することにより、 $3(M+1)$ 次元の新しい状態ベクトル $\mathbf{y}(t)$ と微小揺らぎ $\delta\mathbf{y}(t)$ を考える。 p 個のリアプノフ指数を算出するため、 p 個の微小揺らぎ $\delta\mathbf{y}_i(t)$ の初期変位 $\delta\mathbf{y}_i(0)$ を用意する (ただし $i = 1, 2, \dots, p$)。ここで $\delta\mathbf{y}_i(0)$ は互いに直交でそのノルムが 1 となるようにする。行列 $\mathbf{Y}(t)$ を次のように p 個の $\delta\mathbf{y}_i(t)$ からなる行列と定義する。

$$\mathbf{Y}(t) = (\delta\mathbf{y}_1(t) \ \delta\mathbf{y}_2(t) \ \cdots \ \delta\mathbf{y}_p(t)) \quad (4.54)$$

つまり行列 $\mathbf{Y}(t)$ は $3(M+1)$ 行 p 列の行列となる。線形化方程式 (4.32) を用いて行列 $\mathbf{Y}(0)$ を遅延時間 τ だけ発展させることで行列 $\mathbf{Y}(\tau)$ を得る。言い換えると、 p 個の微小揺らぎの初期状態 $\delta\mathbf{y}_i(0)$ を線形化方程式 (4.32) を用いて別々に数値積分し、時間発展したそれぞれの微小揺らぎ $\delta\mathbf{y}_i(\tau)$ を得る。得られた行列 $\mathbf{Y}(\tau)$ の QR 分解から、 \mathbf{Q} と上三角行列 \mathbf{R} を得る。ここで \mathbf{Q} は列ベクトルの大きさが 1 で互いに直交な $3(M+1)$ 行 p 列の行列であり、 \mathbf{R} は $p \times p$ の上三角行列となる。行列 \mathbf{Q} を新たに行列 $\mathbf{Y}(\tau)$ とみなし、これを線形化方程式により遅延時間 τ だけ時間発展させ、行列 $\mathbf{Y}(2\tau)$ を得る。再び行列 $\mathbf{Y}(2\tau)$ の QR 分解から、行列 \mathbf{Q} と \mathbf{R} を得る。以上を

繰り返し行い、得られた上三角行列 \mathbf{R} の対角成分からリアプノフ指数を算出することができる。

数値計算上では、リアプノフ指数の算出のために上三角行列 \mathbf{R}_i の対角成分以外の要素が用いられないことから、QR 分解を簡略化することができる。行列 $\mathbf{Y}(0)$ を線形化方程式により遅延時間 τ だけ時間発展させ、 $\mathbf{Y}(\tau)$ を得たとする。この行列 $\mathbf{Y}(\tau)$ にグラム–シュミットの直交化を用いた QR 分解を適用する。表記を簡単化するために時間 (τ) を省略する。行列 \mathbf{Y} の第 1 ベクトル $\delta \mathbf{y}_1$ をベクトル \mathbf{b}_1 と置き、そのノルム $d_1 = |\mathbf{b}_1|$ により正規化したベクトルを \mathbf{q}_1 とする。ここでノルム $d(t)$ は式 (4.52) として定義されている。得られた \mathbf{q}_1 は行列 \mathbf{Q} の第 1 ベクトルであり、また d_1 は上三角行列 \mathbf{R} の 1 番目の対角成分に相当する。次に行列 \mathbf{Y} の第 2 ベクトル $\delta \mathbf{y}_2$ を \mathbf{q}_1 に対して直交化されたベクトル \mathbf{b}_2 を、グラム–シュミットの直交化を用いて算出する。 \mathbf{b}_2 を、そのノルム $d_2 = |\mathbf{b}_2|$ により正規化したベクトルを \mathbf{q}_2 とする。得られた \mathbf{q}_2 は行列 \mathbf{Q} の第 2 ベクトルであり、また d_2 は上三角行列 \mathbf{R} の 2 番目の対角成分に相当する。

以上の手順を全ての $\delta \mathbf{y}_i$ が直交化されるまで行い、得られたベクトル \mathbf{q}_i を並べた行列が \mathbf{Q} であり、ノルム d_i が上三角行列 \mathbf{R} の対角成分に相当する。この手順を QR 分解を行うごとに繰り返し、ノルム $d_i(t)$ から次のようにしてリアプノフ指数 λ_i を算出することができる。

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{j=1}^N \ln d_i(j\tau) \quad (4.55)$$

この時、 $\delta \mathbf{y}_i$ に対して、 i 番目のベクトルから順番にグラム–シュミットの直交化が行なわれるため、ノルム d_i には $d_i \geq d_{i+1}$ の関係が成り立つ。ゆえにリアプノフ指数は $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ の関係を持つ。

以上の方法を整理すると、最大リアプノフ指数 λ_{max} の数値計算手順は以下のよう表される。

1. p 本の微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}_j(0)$ ($j = 1, 2, \dots, p$) の初期状態を設定する。また全てのリアプノフ指数を $\lambda_j = 0$ に、繰り返し回数を $i = 0$ にそれぞれに初期化する。
2. $i = N$ となるまでモデル方程式とともに線形化方程式 (4.32) を用いて微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}_j(0)$ を数値積分し、遅延時間 τ ごとに以下を繰り返し行う。
 - (a) p 本の微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}_j(t)$ に対してグラム–シュミットの直交化 (第 4.2.2 節にて説明されている) を行う。
 - (b) グラム–シュミットの直交化により得られた正規直交ベクトル \mathbf{q}_j を新たに微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}_j(t)$ に置き換える。

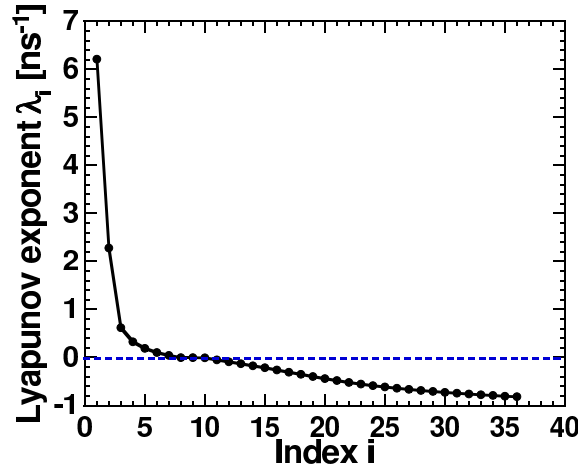


図 4.2: 戻り光強度 $\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$ の時の 36 個リアプノフ指数 λ_i . 横軸をインデックス i としており, リアプノフ指数は $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ となるように整列されている. 破線は 0 ns^{-1} を示している.

(c) グラム–シュミットの直交化の過程で得られたノルム $d_j(t)$ の自然対数 $\ln[d_j(t)]$ を λ_j に加える.

(d) i に 1 を加える.

3. λ_{max} を時間 $m\tau$ で割ることにより最大リアプノフ指数を得る.

4.5.2 リアプノフスペクトラムの算出結果

図 4.2 に戻り光強度 $\kappa = 4.66 \text{ ns}^{-1}$ の時の 36 個のリアプノフ指数 λ_i の算出結果を示す. リアプノフ指数 λ_i は $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ となるように整列されている. 図 4.2 から 7 個の正のリアプノフ指数が算出されている. 2 個以上の正のリアプノフ指数が得られる場合, そのダイナミクスは hyperchaos と呼ばれ, 複雑なダイナミクスを有する. 図 4.2 では 36 個のリアプノフ指数が示されているが, 実際には遅延時間および数値計算の刻み幅に依存して非常に多くのリアプノフ指数を算出可能である. 図 4.2 の作成において, $\tau = 0.15 \text{ ns}$ および $h = 5.0 \times 10^{-3} \text{ ns}$ が用いられている. この時, 遅延時間内の離散化された状態変数の数は $n \times (M + 1)$ で決定され, $n = 3$, $M = \tau/h = 300$ から, 状態変数の数は 903 となる. したがって最大で 903 個のリアプノフ指数を算出可能である. しかしながら図 4.2 に示されているように正のリアプノフ指数の数は 7 個と少なく, ほとんどが負のリアプノフ指数となる. 次に述べる Kolmogorov-Sinai エントロピーや Kaplan-Yorke 次元を算出するという観点では

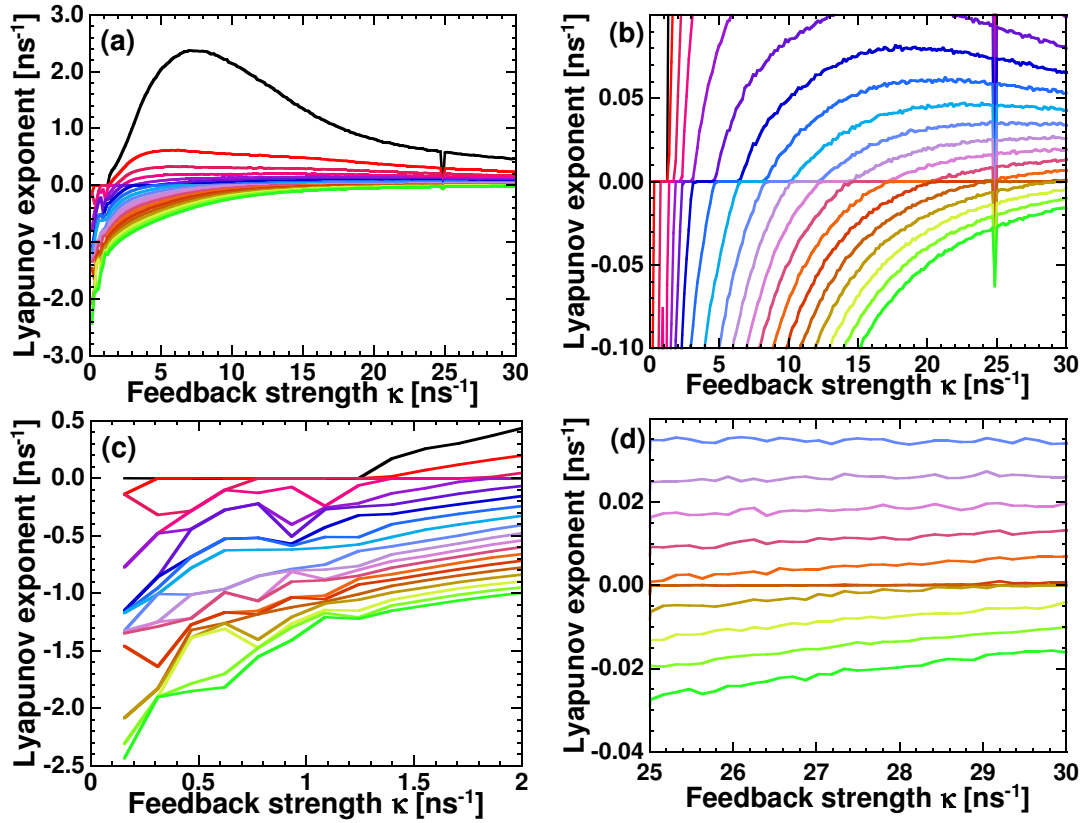


図 4.3: 戻り光強度 κ を変化させた時の半導体レーザの 20 個のリアプノフ 指数 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, 20)$ の変化. (b) および (c) はそれぞれ κ が強い場合と弱い場合の (a) の拡大図. リアプノフ指数は $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ となるように整列されている.

全てのリアプノフ指数を算出する必要はなく、図 4.2 に示されている程度の数だけ計算してやれば良い.

戻り光強度 κ を変化させた時の 20 個のリアプノフ指数の変化を図 4.3 に示す. 図 4.3(b) は (a) のリアプノフ指数が 0 ns^{-1} 付近の拡大図である. また図 4.3(c) および (d) はそれぞれ κ が強い領域と弱い領域の (a) の拡大図である. 最大リアプノフ指数 λ_1 は図 4.1(b) と同じである. 図 4.3(c) において戻り光強度 κ が増加すると, $\kappa \approx 1.3 \text{ ns}^{-1}$ で λ_1 が正になり, 次に $\kappa \approx 1.4 \text{ ns}^{-1}$ で λ_2 が正になり, $\kappa \approx 1.8 \text{ ns}^{-1}$ で λ_3 が正になるというように, 正のリアプノフ指数の数が κ の増加と共に増加することが分かる. 戻り光強度 κ が高い領域においても正のリアプノフ指数の数は κ の増加と共に増え続けることが図 4.3(d) から分かる. 一方で $\kappa > 7.0 \text{ ns}^{-1}$ では λ_1 は κ の増加と共に減少し, 同様に λ_2, λ_3 も徐々に減少する. このように κ の増加と共に正のリアプノフ指数は増加するが, リアプノフ指数の値は必ずしも増加するわけではな

いことが分かる.

4.6 リアプノフ指数を用いた複雑性の定量化

4.6.1 KS エントロピーおよび KY 次元

これまで軌道不安定性を定量化するリアプノフスペクトラムの算出方法について述べてきた. カオスの他の代表的な特徴として, 長期予測不能性と自己相似性が挙げられる. 長期予測不能性とは軌道不安定性のために誤差が指数関数的に増大され, 短期的には予測が可能であるが長期的には予測不可能な性質であり, 自己相似性とはある構造を拡大すると同じ構造が出現するという性質である. これらの特徴はそれぞれリアプノフ指数から算出される Kolmogorov-Sinai(KS) エントロピーと Kaplan-Yorke(KY) 次元により定量化することができる. 本節では KS エントロピーと KY 次元をリアプノフスペクトラムから算出する方法を示す [36, 88].

力学系においてある時刻での初期値の差が l である 2 つの状態を考える. この差が指数関数的に増大し, T 秒後にアトラクタと同程度の大きさ L になったとすると, l と L の関係はリアプノフ指数 λ を用いて次のように表せる.

$$l \exp(\lambda T) = L \quad (4.56)$$

このようにして差がアトラクタと同程度のサイズまで拡大されてしまうと, 軌道不安定性のためにその時の力学系の状態がアトラクタ上のどこにあるかということを正確に求めることはできない. そこで差 l がアトラクタと同程度の大きさ L になるまでの時間 T を予測臨界時間と考えることができる. 式 (4.56) から λ が大きければ予測臨界時間 T が小さくなるため, リアプノフ指数 λ によって長期予測不能性を考えることができる. 多次元力学系では全ての不安定な方向を考えれば良いため, 次のように正のリアプノフ指数の和を求めれば良い.

$$h_{KS} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (4.57)$$

ただし

$$\lambda_i > 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4.58)$$

である. 式 (4.57) は h_{KS} は予測不能性を定量化する KS エントロピーの上限を与える [30].

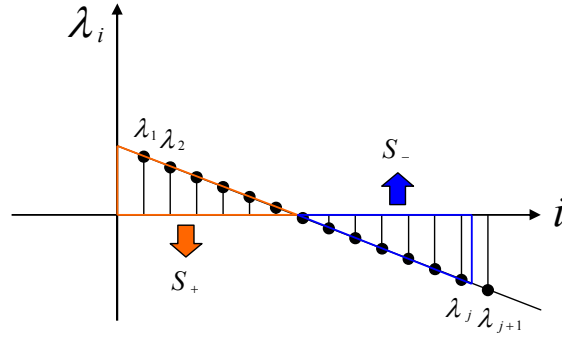


図 4.4: リアプノフスペクトラムと次元の関係

またリアプノフ指数から次のように KY 次元を計算することもできる [89].

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad (4.59)$$

ただし,

$$\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0 < \sum_{i=1}^j \lambda_i \quad (4.60)$$

を満たすように j は定められている. この条件の意味を示しているのが Fig. 4.4 である. 正のリアプノフ指数は差が拡大することを表し, 負のリアプノフ指数は差が縮小することを表すため, 拡大率 (図 4.4 における S_+) と縮小率 (図 4.4) が等しくなるリアプノフ指数の個数が次元に一致するということを表している. つまり式 (4.59) で定義される次元は伸びも縮みも無くなる部分空間の次元を表している. このようにしてリアプノフ指数から計算される次元は KY 次元と呼ばれ, 小数次元であるフラクタル次元の一種である.

このようにしてリアプノフスペクトラムから KS エントロピーと KY 次元の計算を行い, レーザパラメータの変化に対してどのような振る舞いを示すかを調査する.

4.6.2 複雑性の戻り光強度への依存性

図 4.5 は戻り光強度 κ を変化させた時の KS エントロピーおよび KY 次元を表しており, 図 4.3(a) のリアプノフスペクトラムから算出されている. 図 4.5(a) から KS エントロピーは κ と共に増加するが, $\kappa \approx 7.0 \text{ ns}^{-1}$ を超えると減少し始める. これは KS エントロピーが正のリアプノフ指数の和から計算されており, 最大リアプノ

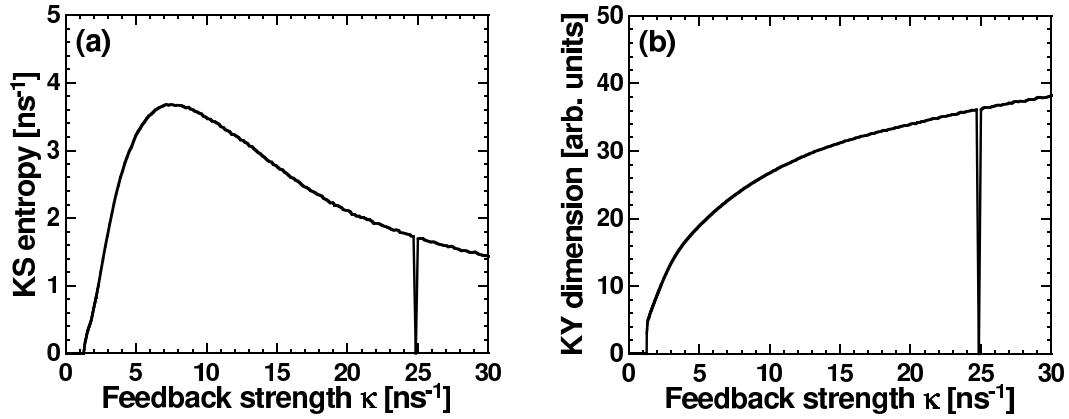


図 4.5: 戻り光強度 κ を変化させた時の半導体レーザの (a)KS エントロピーおよび (b)KY 次元の変化. 図 4.3 のリアプノフスペクトラムから計算されている.

フ指数 λ_1 が他のリアプノフ指数と比較して大きく, 最大リアプノフ指数の変化に大きく依存するためである. 一方で図 4.5(b) から KY 次元は κ の増加と共に単調に増加する. KY 次元が KS エントロピーと異なる振る舞いを示す理由は, 図 4.3(c) に示されているように, 負のリアプノフ指数は徐々に増加し正のリアプノフ指数の数が増えているためである.

4.6.3 複雑性の様々なパラメータへの依存性

本節では実験的に可変なレーザパラメータである注入電流および外部共振器長への KS エントロピーおよび KY 次元の依存性を調査する. また実験的に可変なパラメータではないが, 線幅増幅係数および飽和効果への KS エントロピーおよび KY 次元の依存性を調査する. 線幅増幅係数は半導体レーザの物性および内部構造によって決定され, レーザ内部電界の振幅変動と位相変動の結合を表すパラメータであり, レーザ出力の不安定性に密接に関連する. 特に半導体レーザは他のレーザと比べて 3 から 7 の比較的大きな線幅増幅係数を有することが知られている.

図 4.6(a), (b) はそれぞれ規格化注入電流 J/J_{th} を変化させた時の KS エントロピーおよび KY 次元の変化を示している. レーザの発振しきい値である $J/J_{th} = 1.00$ から J/J_{th} を増加させると, KS エントロピーは $J/J_{th} = 1.87$ で最大となるまで増加するが, さらに J/J_{th} を増加させると KS エントロピーは減少していく. 同様に KY 次元も初めは J/J_{th} と共に増加するが, $J/J_{th} = 2.37$ を超えると徐々に減少する. しかしながら KS エントロピーと KY 次元が最大となる注入電流値は異なる. このよ

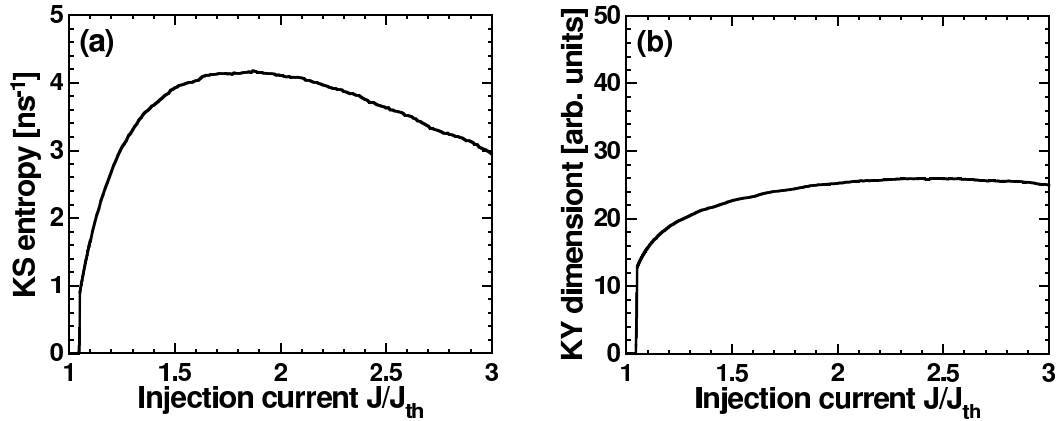


図 4.6: 規格化電流値 J/J_{th} を変化した時の半導体レーザの (a)KS エントロピーと (b)KY 次元の変化.

うに注入電流を増加させた場合、KS エントロピーおよび KY 次元には最大値が存在することが明らかとなった。本現象をモード競合の視点で解釈すると、メインの発振モードの強度がまだ十分でないところに、注入電流の増加により光強度が徐々に増大して戻り光量も増えるため、未だ強度が弱く利得集中が十分でないメインのモードと外部共振器によるモードが競合を起こすことで不安定となるからであると考えられる。一方、ある程度電流密度が大きくなると利得飽和効果によりメインのモードの強度はさほど低下しない一方、外部共振器モードの方はしきい値を下回り、発振強度としては安定化に向かうと解釈できる。

図 4.7(a), (b) はそれぞれ戻り光の遅延時間 τ を変化した時の KS エントロピーおよび KY 次元の変化を示している。遅延時間 τ が小さい時、レーザの平衡点が安定化しやすく、戻り光強度や戻り光の位相の状態に依存してカオスダイナミクスが生じない場合がある。そのため $\tau < 0.70$ ns でところどころ KS エントロピーと KY 次元が共に 0 あるいは 0 付近となっている。一方で比較的 τ が大きな遅延時間では、KS エントロピーはほぼ一定となっていることが図 4.7(a) から分かる。しかしながら図 4.7(b) から KY 次元はほぼ線形に増大していることが分かる。このように次元が大きく増大する理由は、レーザ光が反射鏡によってレーザ自身に戻るまでの時間が長くなり、システム全体の状態を記述するために必要な戻り光の情報が増えるためであると考えられる。しかしながら KS エントロピーはほぼ一定であるため、遅延時間を増大させても複雑性はそれほど大きく増加していないと考えられる。またモード競合の視点から説明すると、遅延時間が非常に小さい時、利得スペクトル分布内に存在する外部共振器によるモードは少なく、シングルモードに近いために安定となる。しかしながら遅延時間を増加させると外部共振器によるモードが利得ス

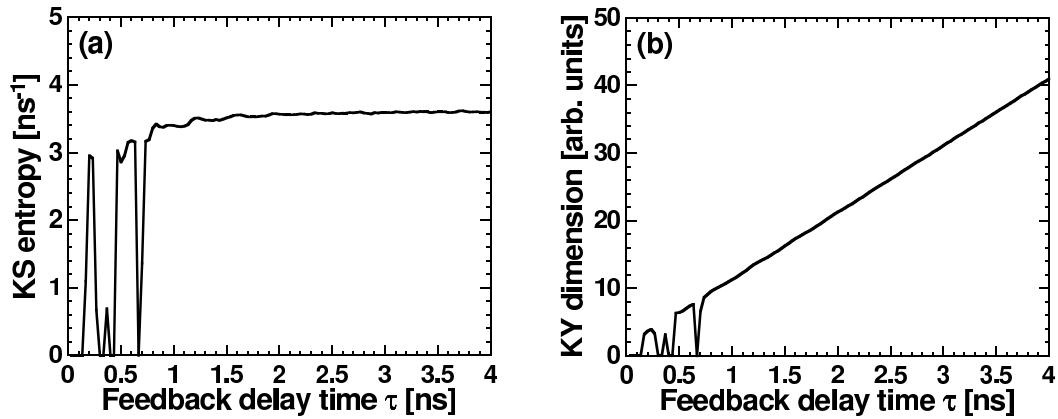


図 4.7: 戻り光の遅延時間 τ を変化した時の半導体レーザの (a)KS エントロピーと (b)KY 次元の変化.

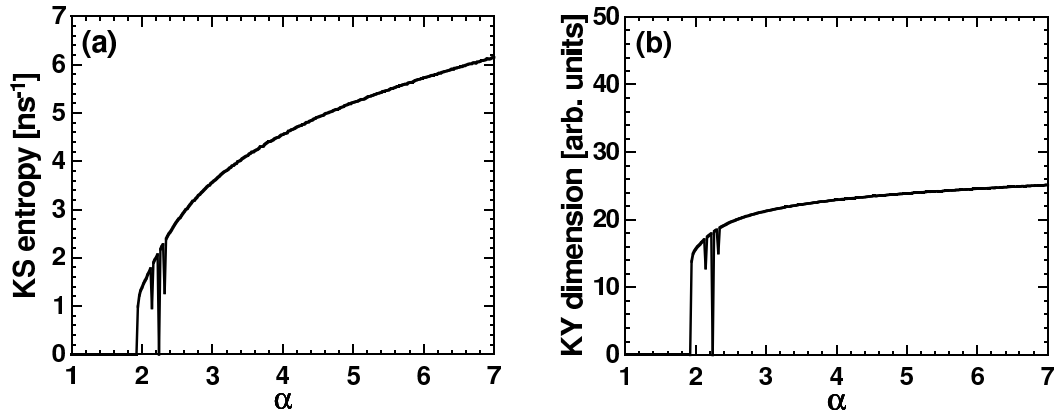


図 4.8: 線幅増幅係数 α を変化した時の半導体レーザの (a)KS エントロピーと (b)KY 次元の変化.

ペクトル分布内を埋め尽くし、複雑性がすぐに上限に達してしまうためであると解釈できる。

図 4.8(a), (b) はそれぞれ線幅増幅係数 α を変化した時の KS エントロピーおよび KY 次元の変化を示している。 $\alpha < 1.92$ では KS エントロピーと KY 次元はどちらも 0 であり、ダイナミクスがカオスでないことが分かる。 α が 2 を超えるとダイナミクスがカオスとなり、KS エントロピーと KY 次元は α と共にほとんど単調に増加する。 $\alpha \approx 2.2$ で KS エントロピーと KY 次元が多少減少している α が存在している理由は、 α が小さいとカオスダイナミクスになりづらく、戻り光強度や戻り光の位相によりカオスを生じにくい場合があるためである。しかしながら α が大

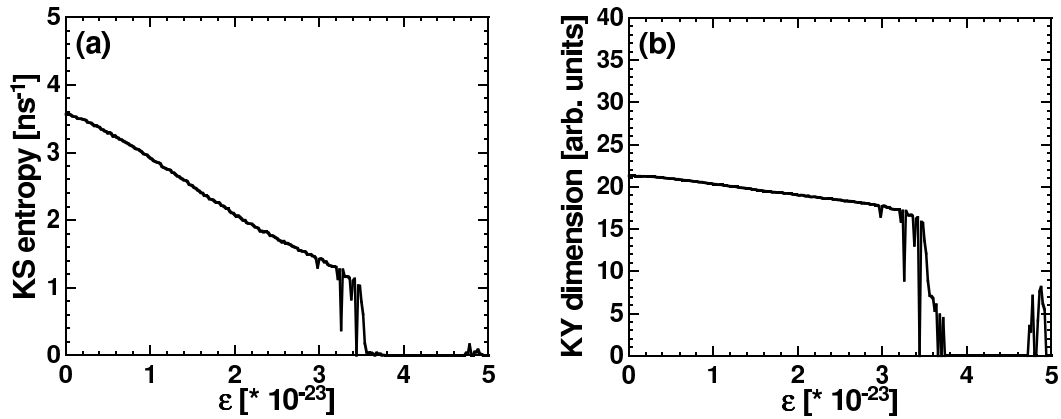


図 4.9: 飽和強度 ϵ を変化させた時の半導体レーザの (a)KS エントロピーと (b)KY 次元の変化.

きければ KS エントロピーと KY 次元は共に増加し、またカオスダイナミクスの発生が戻り光強度や戻り光の位相に依存しなくなる。これらの結果から、大きな α を持つ半導体レーザがより複雑なカオスを生成可能であることが分かる。

図 4.9(a), (b) はそれぞれ飽和強度 ϵ を変化させた時の KS エントロピーおよび KY 次元の変化を表している。飽和強度 ϵ を増加させることで KS エントロピーは大幅に単調減少している。一方でを増加させても KY 次元はほぼ一定の値となっている。この結果より、利得飽和効果によりレーザ出力強度が減少することで、KS エントロピーも減少すると考えられる。一方で KY 次元にはあまり影響が無いと言える。

以上のパラメータ依存性の結果を表 4.2 にまとめる。KS エントロピーを増加させるためには、レーザの戻り光量あるいは線幅増幅係数を増加させることが効果的である。実際には半導体レーザの物性および内部構造によって決定され、可変パラメータでないため、を増加させることが有効である。またレーザへの注入電流に対しては KS エントロピーが最大となる値が存在することも分かった。利得飽和係数は小さな値が望ましいことも明らかとなった。一方で KY 次元は、戻り光量、外部共振器長および線幅増幅係数の増加と共に増加することが分かった。またに対しては同様に最大値が存在することが分かった。

これらの結果を踏まえて物理乱数生成器に適した半導体レーザパラメータ設定方法に関して考察する。複雑なカオス波形を生成するためには、戻り光量を増加させて注入電流の最適化を行うことが重要である。また外部共振器長は長いほど次元が向上するが、エントロピーの増加には寄与しないと言える。一方で内部パラメータ

Parameters	KS entropy	KYdimension
κ	maximum value	monotonic increase
J/J_{th}	maximum value	maximum value
τ	almost constant	monotonic increase
α	monotonic increase	monotonic increase
ϵ	monotonic decrease	monotoni decrease

表 4.2: KS エントロピーおよび KY 次元のレーザパラメータへの依存性

である線幅増幅係数の大きな半導体レーザを用いることが複雑性向上のために有用であると考えられる．さらに利得飽和係数は小さい半導体レーザが望ましいと言える．これらの条件を満たす半導体レーザを用いることで，複雑性の高いカオス時間波形を乱数源として使用することが可能となる．

4.7 まとめ

本章では時間遅延した戻り光を有する半導体レーザの数値計算を行い，複雑性の調査を行った．特に線形化方程式を用いて最大リアプノフ指数およびリアプノフスペクトラムを算出し，さらに複雑性の指標として KS エントロピーおよび KY 次元の計算を行った．KS エントロピーと KY 次元のパラメータ依存性を調査したところ，戻り光強度および注入電流を最適化することで KS エントロピーおよび KY 次元を最大化することが可能であり，KY 次元を増加させるためには外部共振器長を増加させることが効果的であることが分かった．また内部パラメータとして，線幅増幅係数が大きく，利得飽和係数が小さな半導体レーザを乱数源として用いることが複雑性向上のために効果的であることが明らかとなった．これらの知見は物理乱数生成器の乱数源としてレーザカオス時間波形の複雑性を向上させる上で有用であると考えられ，本分野の今後の進展が期待される．

第5章 半導体レーザのコンシステンシーとリアプノフスペクトラム解析

多くの非線形システムは繰り返し入力された信号に対して再現性のある振る舞いを示すことが知られており、この現象はコンシステンシー (consistency) と呼ばれている [24]。図 5.1 にコンシステンシーの概念図を示す。非線形ダイナミカルシステム (Response と呼ぶ) に対してカオスやノイズのような複雑な駆動信号を繰り返し入力することを考える。この時 Response システムの初期状態は、一般的に繰り返される入力ごとに異なるため、同一の応答信号を得ることはできない。しかしながらコンシステンシー状態である場合、Response システムは繰り返し入力される駆動信号に対して同一の応答信号を出力することができる。つまりコンシステンシーとはシステムが同一の信号によって繰り返し駆動された時に同一の応答信号を生成する現象であると定義される。これまでにレーザにおいてコンシステンシーは実験的に観測されており [24]、レーザカオスの超高速性を利用した GHz オーダーでのリザーバコンピューティング [12, 13, 17] や物理的一方向性関数 (Physical One-Way Functions) [27, 90] あるいは物理複製不可能関数 (Physical Unclonable Functions) [28] への応用が期待されている。

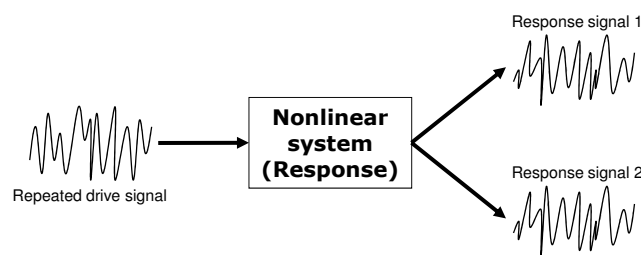


図 5.1: コンシステンシーの概念図

これらの応用においてコンシステンシー状態におけるシステム全体の複雑性は評価指標の一つとなりうる。リザーバコンピューティングではシステムの複雑性が高いほど分類性能が向上することが期待されている。また一方で物理的一方向性関数や物理複製不可能関数ではシステムの複雑性が高いほど出力から入力 of 推測が不可能となると考えられる。しかしながら一方向に光結合されたレーザにおいてコンシステンシーが得られることは示されているが、結合状態におけるレーザシステム全体の複雑性に関しては調査されていない。特にコンシステンシーを示す場合と示さない場合において、システム全体の複雑性がどのように変化するかについては全く分かっていないのが現状である。

そこで本章では、時間遅延を有する光結合された半導体レーザにおいてコンシステンシーを観測し、その複雑性をリアプノフ指数を用いて評価することを目的とする。さらにリアプノフ指数からエントロピーおよび次元を算出し、システム全体の複雑性を定量的に評価する。

5.1 結合レスラーモデルおよび結合マッキーグラスモデルにおけるコンシステンシー

半導体レーザにおいてコンシステンシーと複雑性の関係性を調査する前に、一般的な非線形システムにおいてコンシステンシーと複雑性の関係性について調査する。本節ではレスラー (Rössler) モデルおよびマッキーグラス (Mackey-Glass) モデルを使用する。レスラーモデルはカオスを生成する非常に一般的なモデルであるが、一方で Mackey-Glass モデルは時間遅延されたフィードバックを有する時間遅延ダイナミカルシステムである。時間遅延ダイナミカルシステムは理論的には無限次元であり、一般的なシステムよりも複雑なダイナミクスを示すことが期待できる。結合システムの複雑性において、時間遅延を持つシステムと持たないシステムの差異を調べることは、時間遅延のダイナミクスへの効果を知るために重要であると考えられる。

5.1.1 結合レスラーと結合マッキーグラスモデル

本節では図 5.2 に示されているように 3 つのシステムを用いる。Drive システムから出力された信号が 2 つの Response システムに入力される。この時、Response 1 と Response 2 は全く同じシステムパラメータを有しているが、初期状態は異なる

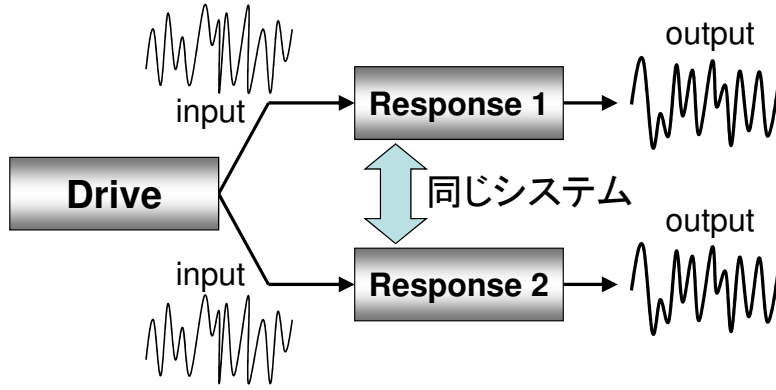


図 5.2: 一方向に光結合された戻り光を有する半導体レーザーのモデル. Drive レーザから出力された光が一方方向に Response レーザに注入される. κ_{inj} は Drive レーザから Response レーザに注入される光の注入強度を表す.

値を持つとする. 図 5.2 は Auxiliary system approach と呼ばれる一般化同期を検出するために用いられる手法である [57]. しかしながら 2 つの Response システムのパラメータを完全に一致させ, 初期状態を異なる値とした時, 2 つの Response システムに同一の信号を入力することは, 1 つの Response システムに繰り返し異なる信号を入力することと同じ意味を持つ. 実験的には 2 つの Response システムのパラメータを完全に一致させることは困難であるが, 数値計算上では可能となる. 2 つの Response システムが同一の入力に対して同一の応答を示せばコンシステンシーが達成されていると言うことができる.

本節で使用する 1 つ目のモデルである結合レズラーシステムの数値モデルを以下に示す.

$$\frac{dx_d}{dt} = -y_d - z_d \quad (5.1)$$

$$\frac{dy_d}{dt} = x_d + a_d y_d \quad (5.2)$$

$$\frac{dz_d}{dt} = b_d + (x_d - c_d) z_d \quad (5.3)$$

$$\frac{dx_{r1}}{dt} = -y_{r1} - z_{r1} + \kappa(x_d - x_{r1}) \quad (5.4)$$

$$\frac{dy_{r1}}{dt} = x_{r1} + a_{r1} y_{r1} \quad (5.5)$$

$$\frac{dz_{r1}}{dt} = b_{r1} + (x_{r1} - c_{r1}) z_{r1} \quad (5.6)$$

$$\frac{dx_{r2}}{dt} = -y_{r2} - z_{r2} + \kappa(x_d - x_{r2}) \quad (5.7)$$

$$\frac{dy_{r2}}{dt} = x_{r2} + a_{r2}y_{r2} \quad (5.8)$$

$$\frac{dz_{r2}}{dt} = b_{r2} + (x_{r2} - c_{r2})z_{r2} \quad (5.9)$$

式 (5.1)–(5.3) は Drive であり, 式 (5.4)–(5.6) は Response 1 であり, (5.7)–(5.9) は Response 2 を表す. 下付きの $d, r1, r2$ はそれぞれ Drive, Response 1, Response 2 を表す. 式 (5.4) および (5.7) の最後の項は Drive との結合項である. 本研究では Drive–Response 間の結合方法として差分結合 (diffusive coupling) を用いる. 結合項の κ は結合強度であり, 可変パラメータとする. a, b, c はパラメータであり, $a_d = a_{r1} = a_{r2} = 0.2$, $b_d = b_{r1} = b_{r2} = 0.2$, $c_d = 5.7$, $c_{r1} = c_{r2} = 7.0$ を本研究で用いる. Response 1, 2 は同じパラメータ値を有するが, Drive と Response は異なるパラメータ値を持つ ($c_d \neq c_{r1} = c_{r2}$).

2 つ目のモデルとして結合マッキークラスシステムを用いる. マッキークラスモデルは白血球細胞の生成をモデル化した時間遅延ダイナミカルシステムである [36, 91]. 以下に結合マッキークラスシステムの方程式を示す.

$$\frac{dx_d}{dt} = \frac{a_d x_{\tau,d}}{1 + x_{\tau,d}^{b_d}} - c_d x_d \quad (5.10)$$

$$\frac{dx_{r1}}{dt} = \frac{a_{r1} x_{\tau,r1}}{1 + x_{\tau,r1}^{b_{r1}}} - c_{r1} x_{r1} + \kappa(x_d - x_{r1}) \quad (5.11)$$

$$\frac{dx_{r2}}{dt} = \frac{a_{r2} x_{\tau,r2}}{1 + x_{\tau,r2}^{b_{r2}}} - c_{r2} x_{r2} + \kappa(x_d - x_{r2}) \quad (5.12)$$

式 (5.10) は Drive, 式 (5.11) は Response 1, 式 (5.12) は Response 2 の方程式である. 下付きの $d, r1, r2$ はそれぞれ Drive, Response 1, Response 2 を表す. 式 (5.11) および (5.12) の最後の項は Drive との結合項を表し, 結合レスラーシステムと同様に差分結合 (diffusive coupling) を用いる. また τ は遅延時間であり, $x_\tau = x(t - \tau)$ は時間遅延変数を表す. また本節では遅延時間は $\tau = 5$ とする. a, b, c はシステムパラメータであり, 本節では $a_d = a_{r1} = a_{r2} = 2$, $b_d = b_{r1} = b_{r2} = 10$, $c_d = 1.0$, $c_{r1} = c_{r2} = 0.9$ とする.

5.1.2 線形化方程式

リアプノフスペクトラム解析を行うために, 結合レスラーシステムおよび結合マッキークラスモデルの方程式を線形化する. 結合システムのリアプノフスペクト

ラム解析を行う必要があるため、Drive から Response に一方向に結合されたシステムを 1 つのシステムとみなして方程式を線形化する．また本節では Response の状態変数として Response 1 を用いる．

まず Drive から Response に一方向に結合された 2 つの結合レスラーシステムにおいて、Drive および Response の状態変数をそれぞれ $\mathbf{x}_d(t) = (x_d(t), y_d(t), z_d(t))^\dagger$, $\mathbf{x}_r(t) = (x_r(t), y_r(t), z_r(t))^\dagger$ と置く．ここで \dagger は転置を表す．本節では結合システム全体を 1 つのシステムとして扱うため、 $\mathbf{x}_d(t)$ と $\mathbf{x}_r(t)$ からなる状態ベクトル $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_d^\dagger(t), \mathbf{x}_r^\dagger(t))^\dagger$ について考える．リアプノフスペクトラム解析を行うために、状態空間における軌道 $\mathbf{x}(t)$ に微小揺らぎ $\delta\mathbf{x}(t) = (\delta\mathbf{x}_d^\dagger(t), \delta\mathbf{x}_r^\dagger(t))^\dagger$ を加えた軌道 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ を考える．ここで $\delta\mathbf{x}_d(t) = (\delta x_d(t), \delta y_d(t), \delta z_d(t))^\dagger$, $\delta\mathbf{x}_r(t) = (\delta x_r(t), \delta y_r(t), \delta z_r(t))^\dagger$ である．方程式 (5.1)–(5.6) に対して $\bar{\mathbf{x}}(t)$ を代入し、 $\mathbf{x}(t)$ の周りで線形化すると以下の線形化方程式が得られる．

$$\frac{d\delta x_d}{dt} = -\delta y_d - \delta z_d \quad (5.13)$$

$$\frac{d\delta y_d}{dt} = \delta x_d + a_d \delta y_d \quad (5.14)$$

$$\frac{d\delta z_d}{dt} = z_d \delta x_d + (x_d - c_d) \delta z_d \quad (5.15)$$

$$\frac{d\delta x_r}{dt} = -\delta y_r - \delta z_r + \kappa(\delta x_d - \delta x_r) \quad (5.16)$$

$$\frac{d\delta y_r}{dt} = \delta x_r + a_d \delta y_r \quad (5.17)$$

$$\frac{d\delta z_r}{dt} = z_r \delta x_r + (x_r - c_r) \delta z_r \quad (5.18)$$

式 (5.13)–(5.15) は Drive の方程式 (5.1)–(5.3) に対応する線形化方程式であり、式 (5.16)–(5.18) は Response 1 の方程式 (5.4)–(5.6) に対応する線形化方程式である．

次に結合マッキークラスシステムの線形化方程式を導出する．結合システムの状態ベクトルを $\mathbf{x}(t) = (x_d(t), x_r(t))^\dagger$ と置く．リアプノフスペクトラム解析を行うために、微小揺らぎ $\delta\mathbf{x}(t) = (\delta x_d(t), \delta x_r(t))^\dagger$ を $\mathbf{x}(t)$ に加えた状態ベクトル $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ を考える． $\bar{\mathbf{x}}(t)$ を結合マッキークラスシステムの方程式 (5.10) および (5.11) に代入し、 $\mathbf{x}(t)$ の近傍で線形化することにより以下の線形化方程式が得られる．

$$\frac{d\delta x_d}{dt} = \frac{a_d + a_d(1 - b_d)x_{\tau,d}^{b_d}}{(1 + x_{\tau,d}^{b_d})^2} \delta x_{\tau,d} - c_d \delta x_d \quad (5.19)$$

$$\frac{d\delta x_r}{dt} = \frac{a_r + a_r(1 - b_r)x_{\tau,r}^{b_r}}{(1 + x_{\tau,r}^{b_r})^2} \delta x_{\tau,r} - c_r \delta x_r + \kappa(\delta x_d - \delta x_r) \quad (5.20)$$

式 (5.19) は Drive の方程式 (5.10) に対応する線形化方程式であり，式 (5.20) は Response 1 の方程式 (5.11) に対応する線形化方程式である．マッキークラスモデルは時間遅延ダイナミカルシステムであるため，線形化方程式 (5.19) および (5.20) も時間遅延項 $\delta x_\tau = \delta x(t - \tau)$ を含む．

5.1.3 リアプノフスペクトラムの算出手法

結合レスラーシステムおよび結合マッキークラスシステムにおいてリアプノフ指数を算出する手法について述べる．基本的な計算手法は第 4.2 節に述べられている手法と変わらない．しかしながらマッキークラスモデルは時間遅延ダイナミカルシステムであるため，第 4.4.1 節で述べられているように，遅延時間 τ 内に含まれている状態変数を微小時間により離散化する必要がある．また本節では結合システムのリアプノフ指数を考えているため，状態空間を 2 つのシステムの状態空間の和として考える必要がある．

結合マッキークラスシステムにおいて状態空間を微小時間により離散化した後の手法は結合レスラーシステムと変わらないため，まず結合マッキークラスシステムにおいて時間遅延成分を十分に小さな時間 h により離散化することを考える [36]．遅延時間 τ を微小時間 h により離散化し，Drive と Response 1 の状態ベクトル $\mathbf{x}_d(t)$ および $\mathbf{x}_r(t)$ から新しい状態ベクトル $\mathbf{y}_d(t) = (\mathbf{x}_d^\dagger(t), \mathbf{x}_d^\dagger(t-h), \mathbf{x}_d^\dagger(t-2h), \dots, \mathbf{x}_d^\dagger(t-Mh))^\dagger$ および $\mathbf{y}_r(t) = (\mathbf{x}_r^\dagger(t), \mathbf{x}_r^\dagger(t-h), \mathbf{x}_r^\dagger(t-2h), \dots, \mathbf{x}_r^\dagger(t-Mh))^\dagger$ を定義する．ここで \dagger は転置を表し， $M = \tau/h$ である．これらの 2 つの状態ベクトル $\mathbf{y}_d(t)$ ， $\mathbf{y}_r(t)$ からなるベクトル $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{y}_d^\dagger(t), \mathbf{y}_r^\dagger(t))^\dagger$ を結合システムの状態ベクトルと考える．したがって結合マッキークラスシステムの状態ベクトル $\mathbf{y}(t)$ は $2(M+1)$ 次元の状態ベクトルとなる．リアプノフ指数を算出するために，状態ベクトル $\mathbf{y}(t)$ に対して微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}(t) = (\delta \mathbf{y}_d^\dagger(t), \delta \mathbf{y}_r^\dagger(t))^\dagger$ を考える．この $2(M+1)$ 次元の微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}(t)$ を線形化方程式 (5.19) および (5.20) により数値積分することで時間発展させ，リアプノフ指数を算出する．一方で結合レスラーシステムの場合，第 5.1.2 節で述べられた状態ベクトル $\delta \mathbf{x}(t)$ を線形化方程式 (5.13)–(5.18) を用いて数値積分する．

結合マッキークラスシステムにおいて p 個のリアプノフ指数を算出することを考える (結合レスラーシステムの場合は 6 個)． p 個のリアプノフ指数を算出するため， p 個の微小揺らぎ $\delta \mathbf{y}_i(t)$ の初期変位 $\delta \mathbf{y}_i(0)$ を用意する (ただし $i = 1, 2, \dots, p$)．ここで $\delta \mathbf{y}_i(0)$ は互いに直交でそのノルム $d(t)$ が 1 となるようにす

る．ただし $\delta \mathbf{y}_i(t)$ ノルム $d(t)$ は次のように定義される．

$$d(t) = \left[\sum_{i=0}^M (\delta x_d^2(t - ih) + \delta x_r^2(t - ih)) \right] \quad (5.21)$$

さらに行列 $\mathbf{X}(t)$ を次のように p 個の $\delta \mathbf{y}_i(t)$ からなる行列と定義する．

$$\mathbf{X}(t) = (\delta \mathbf{y}_1(t), \delta \mathbf{y}_2(t), \dots, \delta \mathbf{y}_p(t)) \quad (5.22)$$

つまり行列 $\mathbf{X}(t)$ は $6(M + 1)$ 行 p 列の行列となる．

一方で結合レスラーシステムの場合，6 個のリアプノフ指数を算出する必要があるため，6 個の微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) の初期変位 $\delta \mathbf{x}(0)$ を用意する．結合レスラーシステムの場合，行列 $\mathbf{X}(t)$ は次のように表される．

$$\mathbf{X}(t) = (\delta \mathbf{x}_1(t), \delta \mathbf{x}_2(t), \dots, \delta \mathbf{x}_6(t)) \quad (5.23)$$

次に線形化方程式を用いて行列 $\mathbf{X}(0)$ を時間 τ (結合レスラーシステムの場合，数値計算の刻み幅) だけ発展させることで行列 $\mathbf{X}(\tau)$ を得る．第 4.2 節で述べた方法と同様に，行列 $\mathbf{X}(\tau)$ に QR 分解を行うことで $\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1$ に分解する．この時 \mathbf{Q}_1 は列ベクトルの大きさが 1 で互いに直交な $3(M + 1)$ 行 p 列の行列であり， \mathbf{R}_1 は $p \times p$ の上三角行列となる．QR 分解により得られた行列 \mathbf{Q}_1 を新たに $\mathbf{X}(\tau)$ とし，線形化方程式 (5.49) および (5.50) を用いて時間 τ だけ発展させることで行列 $\mathbf{X}(2\tau)$ を得る．行列 $\mathbf{X}(2\tau)$ に再び QR 分解を行い，行列 \mathbf{Q}_2 と \mathbf{R}_2 を得る．

以上の過程を繰り返し行い，得られた上三角行列 \mathbf{R}_i (i は自然数) の対角成分 R_i^{jj} を用いてリアプノフ指数は次のように計算される．

$$\lambda_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln R_i^{jj} \quad (5.24)$$

ここで N は計算回数を表す．QR 分解の具体的な方法については第 4.2 節で詳しく述べられている．

5.1.4 結合レスラーシステムにおけるリアプノフスペクトラム解析の数値計算結果

はじめに結合レスラーシステムにおいてコンシステンシーを観測する．図 5.3 は Drive, Response 1, Response 2 の時間波形を示している．図 5.3(a) は Drive-Response 間の結合がない場合 ($\kappa = 0$) であり，図 5.3(b) は Drive-Response 間の結

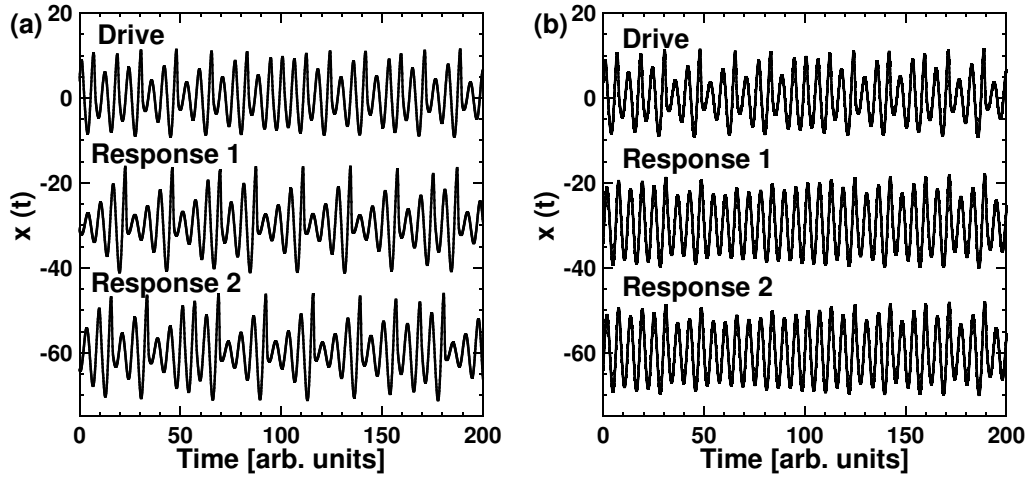


図 5.3: 結合レズラーモデルの時系列を示している．(a) は Drive-Response 間の結合が無い時 ($\kappa = 0$) の時系列であり，(b) は Drive-Response 間の結合が有り ($\kappa = 0.2$)，コンシステンシーが達成されている時の時系列である．

合がある場合 ($\kappa = 0.2$) が示されている．図 5.3(a) から Drive-Response 間の結合がない場合には Response 1 と Response 2 の時系列が異なっていることが分かる．一方で図 5.3(b) から Drive-Response 間に結合がある時，Response 1-2 間の時系列が良く似ており，コンシステンシーが達成されていると考えられる．

コンシステンシーの達成を定量的に評価するために 2 つの時系列間の相互相関関数の算出を行う．相互相関関数は次の方程式により定義される．

$$C_{i,j} = \frac{\langle (x_i(t) - \bar{x}_i)(x_j(t) - \bar{x}_j) \rangle}{\sigma_i \sigma_j} \quad (5.25)$$

ここで $x(t)$ はレズラーモデルの変数 $x(t)$ を表し， \bar{x} は変数 $x(t)$ の平均値， σ は変数 $x(t)$ の標準偏差である． $\langle \cdot \rangle$ は時間平均を表す．また下付きの i と j は d または $r1, r2$ であり，それぞれ Drive, Response 1, Response 2 を表す．コンシステンシーの評価は Response 1-2 間 (i が $r1$, j が $r2$ の場合) の相互相関関数により評価することができる．Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{r1,r2}$ が 1 であれば Response 1 と 2 の出力が一致し，コンシステンシーが達成されていると言うことができる．一方でコンシステンシー状態では Drive と Response の出力が異なっていることが応用上望ましい．したがって Drive-Response 間の相互相関関数 $C_{d,r1}$ になるべく 0 に近いほど良いと言える．

図 5.4 は Drive-Response 間の結合強度 κ を増加させた時の Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{r1,r2}$ と Drive-Response 1 間の相互相関関数 $C_{d,r1}$ の変化を示している．

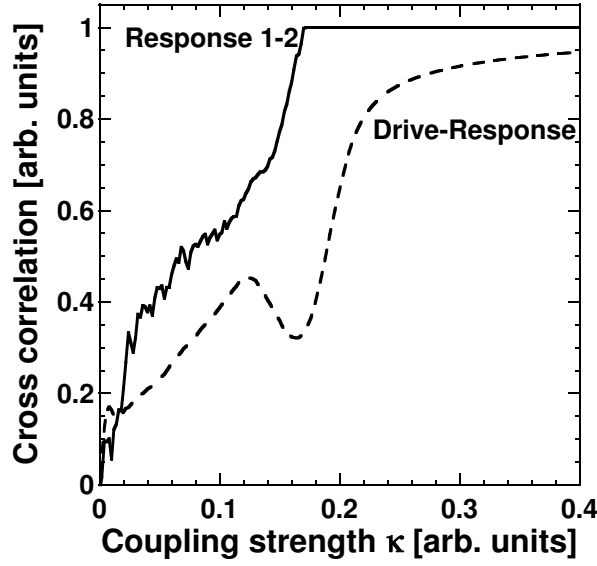


図 5.4: 結合レスラーモデルにおいて結合強度 κ を変化させた時の相互相関関数の変化を示している．実線は Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{r1,r2}$ であり，破線は Drive-Response 1 間の相互相関関数 $C_{d,r1}$ である．

実線と破線はそれぞれ $C_{r1,r2}$, $C_{d,r1}$ の変化を表している．Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{r1,r2}$ は結合強度 κ を増加させると徐々に増加することが分かる． $\kappa > 0.17$ となると $C_{r1,r2} = 1$ となりコンシステンシーが達成される．一方で $\kappa \approx 0.2$ の Drive-Response 1 間の相互相関関数 $C_{d,r1}$ は 0.6 程度であり，Drive と Response の出力が異なっていることが分かる．

次にリアプノフスペクトラム解析により結合レスラーシステムの複雑性の評価を行い，コンシステンシーの有無と複雑性の関係性について調査する．複雑性の指標としてリアプノフ指数から計算される Kolmogorov-Sinai(KS) エントロピー h_{KS} と Kaplan-Yorke(KY) 次元 D_{KY} を用いる [30, 89]．KS エントロピーは正のリアプノフ指数から算出され，KY 次元はリアプノフ指数の和が 0 となる部分空間の次元を表す．KS エントロピーと KY 次元については第 3 章の第 4.6.1 節に述べられている．

図 5.5(a) は Drive-Response 間の結合強度 κ を変化させた時の KS エントロピーと KY 次元の変化を示している．実線および破線はそれぞれ KS エントロピーと KY 次元を表す．Drive-Response 間の結合がない時 ($\kappa = 0$)，KS エントロピーの値は $h_{KS} = 0.150$ であり，これは単体の Drive と Response システムそれぞれの KS エントロピーの和に相当する．結合強度 κ を増加させると，少し減少した後にまた増加するが， $\kappa > 0.04$ では単調に減少する．結合強度 κ をさらに増加させ，コンシステ

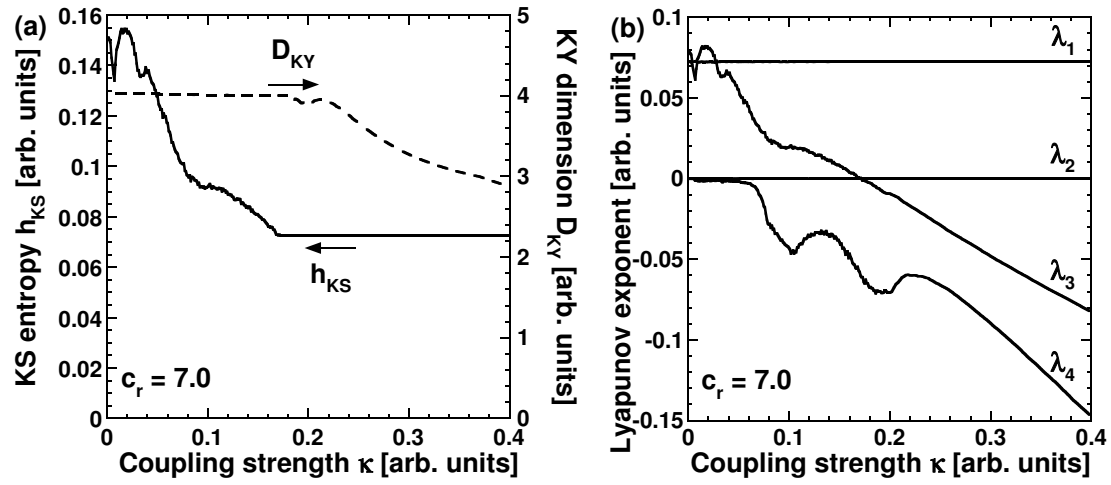


図 5.5: 結合レズラーモデルにおけるリアプノフスペクトラム解析の結果を示している. (a) は結合強度 κ を変化させた時の KS エントロピー h_{KS} と KY 次元 (D_{KY}) の変化である. (b) は結合強度 κ を変化させた時のリアプノフ指数の変化を示しており, (a) の結果はこれらのリアプノフ指数から算出されている. 結合レズラーモデルは 6 変数であるため, 全部で 6 個のリアプノフ指数を算出することができるが, (b) には 4 つのリアプノフ指数が示されている. λ_5 と λ_6 は他のリアプノフ指数に比べて値が小さいためである (結合強度 $\kappa = 0$ の時, $\lambda_5 = -5.39$, $\lambda_6 = -6.69$).

ンシーが達成される結合強度 $\kappa > 0.17$ になると, KS エントロピーは一定となる. この時の KS エントロピーの値は $h_{KS} = 0.072$ であり, 単体の Drive レーザの KS エントロピーと一致する. 図 5.4 に示されているように, コンシステンシー状態では Drive と Response は異なる振る舞いであるにもかかわらず, 図 5.5(a) においてコンシステンシー状態の結合システムの KS エントロピー h_{KS} は単体の Drive の値と一致する. 一方で図 5.5(a) の KS エントロピーの最大値は結合強度 $\kappa = 0.017$ の時に得られ, $h_{KS} = 0.155$ であり結合がない時の KS エントロピーの値 $h_{KS} = 0.150$ とほとんど変わらない. 以上の結果をまとめると, 結合システムの KS エントロピーは結合によりほとんど増加せず (結合がダイナミクスを複雑にしない), また結合強度を増加させると KS エントロピーは減少し, コンシステンシー状態となると一定となる. 一方で KY 次元 (破線) は, 結合強度 κ を増加させてもコンシステンシーが達成されるまで ($\kappa < 0.17$) ほとんど一定である. しかしながらコンシステンシーが達成される結合強度となると $\kappa > 0.17$, KY 次元は単調に減少する.

図 5.5(a) の結果を説明するために, 結合強度 κ を変化させた時のリアプノフスペクトラムの変化を図 5.5(b) に示す. 本節で扱っている結合レズラーシステムは 6 変

数システムであるため6つのリアプノフ指数を計算することができるが、図5.5(b)では大きな値を持つものから順に4つのリアプノフ指数が示されている($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$)。 λ_5 と λ_6 は他の4つのリアプノフ指数と比較して値が小さいため(結合強度 $\kappa = 0$ の時, $\lambda_5 = -5.39$, $\lambda_6 = -6.69$) 図5.5(b)に示されていない。 図5.5(b)において結合強度 κ を変化させると2つのリアプノフ指数が変化を示す。 Drive は結合項を持たず、単体のダイナミクスに変化がないため、変化を示す2つのリアプノフ指数は Response のリアプノフ指数に相当する。 一方で他の2つのリアプノフ指数は一定であり、これは Drive のリアプノフ指数である。 結合強度 κ を増加させると、2つの正のリアプノフ指数のうち1つが変化し、コンシステンシーが達成される結合強度 $\kappa > 0.17$ になると、変化していたリアプノフ指数は0となる。 KS エントロピーは正のリアプノフ指数の和から計算されるが、結合強度の増加とともに1つの正のリアプノフ指数が減少するため、KS エントロピーも減少する。 またコンシステンシー状態では正のリアプノフ指数が変化しないため、KS エントロピーも一定となる。

一方でコンシステンシー状態が達成されるまで KY 次元が一定であった理由は、 λ_5 が λ_1 から λ_4 の大きさよりもずっと大きな値を持つためである。 KY 次元はリアプノフ指数の和が0となる部分空間の次元を表すが、コンシステンシーが達成されるまで、 $\lambda_1 + \lambda_2 > |\lambda_4|$ ($\lambda_3 \approx 0$) の関係が保たれる。 したがって次元は4を超えた値となるが、小数次元を決める λ_5 が非常に大きな値を持つため、 λ_1 から λ_4 の変化が KY 次元に与える影響が相対的に小さくなる。 ゆえにコンシステンシーが達成されるまで KY 次元がほぼ一定に見える。 しかしながらコンシステンシー状態となった後、 $\lambda_1 < |\lambda_3 + \lambda_4|$ ($\lambda_2 \approx 0$) となるため次元は3となり、小数次元を決めるために λ_4 が用いられる。 さらに λ_4 はコンシステンシー状態では結合強度 κ の増加とともに減少するため、KY 次元は減少する。

最後に2次元パラメータ空間上においてコンシステンシーの有無と複雑性の関係性について調査する。 図5.6は Response のパラメータ c_r ($c_{r1} = c_{r2}$) と Drive-Response 間の結合強度 κ の2次元パラメータ空間上における Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{r1,r2}$, KS エントロピー h_{KS} , KY 次元 D_{KY} の変化を示している。 図の横軸は c_r であり、縦軸は κ である。 図5.6(a)は Response1-2 間の相互相関関数 $C_{r1,r2}$ の変化を表している。 黒色領域は相互相関関数 $C_{r1,r2} = 1$ を表し、コンシステンシー状態が達成されていることを示す。 高い結合強度 ($\kappa \approx 0.2$) において、いずれの c_r でもコンシステンシーが達成されている。 結合強度が低い場合 ($\kappa < 0.1$)、小さな c_r においてコンシステンシーが達成されている。 次に図5.6(b)は KS エントロピーの変化を表している。 黒色領域は KS エントロピーが高いことを表す。 図5.6(a)と(b)を比較すると、高い KS エントロピーはコンシステンシーが達成されない領域で得られ

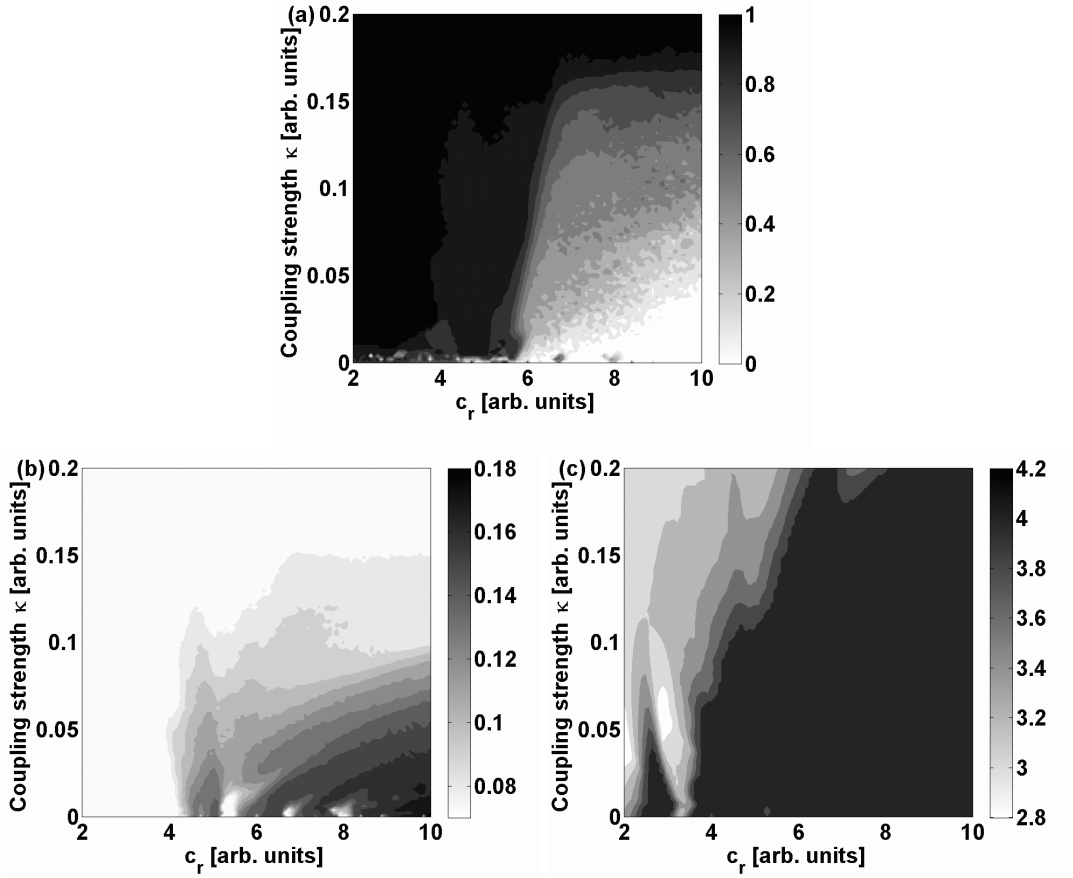


図 5.6: 結合レスラーモデルにおける 2 次元パラメータ空間上におけるコンシステンスの有無とリアプノフスペクトラム解析の結果を示している. (a) は Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{r1,r2}$ の変化を表し, 黒色領域 $C_{r1,r2} = 1$ ではコンシステンスが達成されている. (b) は KS エントロピー, (c) は KY 次元の変化をそれぞれ表し, 値が高いほど領域が黒く表されている. 図の縦軸と横軸はそれぞれ結合強度 κ と Response 1 および 2 のパラメータ c_r である.

ていることが分かる. またコンシステンス領域では KS エントロピーは低くなっている. KS エントロピーの最大値は単体の Drive と Response のそれぞれの KS エントロピーの和に等しく, またコンシステンス状態の KS エントロピーは単体の Drive の KS エントロピーと等しい. したがって Drive から Response への一方向結合はコンシステンスの有無によりシステム全体の KS エントロピーを変化させるが, 単体の Drive と Response のそれぞれの KS エントロピーの和から単体の Drive の KS エントロピーの値の範囲となる.

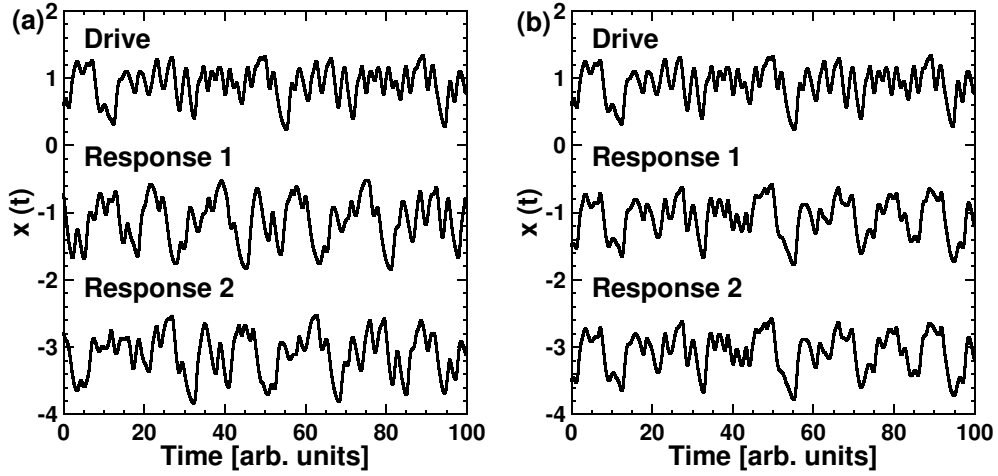


図 5.7: 結合マッキーグラスモデルの時系列を示している. (a) は Drive-Response 間の結合が無い時 ($\kappa = 0$) の時系列であり, (b) は Drive-Response 間の結合が有り ($\kappa = 0.8$), コンシステンシーが達成されている時の時系列である.

一方で図 5.6(c) は 2 次元パラメータ空間上における KY 次元の変化を表している. 黒色領域は KY 次元が高いことを表す. 図 5.6(a) と (c) を比較すると, D_{KY} の変化は直接コンシステンシーの有無と関連付けることができないことが分かる. コンシステンシー領域が達成されていない領域 (低い結合強度 κ と大きな c_r の領域) において, KY 次元はほとんど一定である. しかしながらコンシステンシー領域 (高い結合強度 κ と小さな c_r の領域) では結合強度の増加とともに KY 次元が減少する.

5.1.5 結合マッキーグラスシステムにおけるリアプノフスペクトラム解析の数値計算結果

本節では結合マッキーグラスシステムにおいてコンシステンシーを観測し, リアプノフスペクトラム解析を行った結果を示す. 図 5.7 は結合マッキーグラスシステムにおける Drive, Response 1, Response 2 の時系列である. 図 5.7(a) は Drive-Response 間の結合がない時 ($\kappa = 0$) の時系列であり, Response 1 と Response 2 の時系列が異なっていることからコンシステンシーが達成されていないことが分かる. 一方で図 5.7(b) は Drive-Response 間の結合強度が $\kappa = 0.8$ の時の時系列であり, Response 1 と Response 2 の時系列が一致していることから, コンシステンシーが達成されていることが分かる.

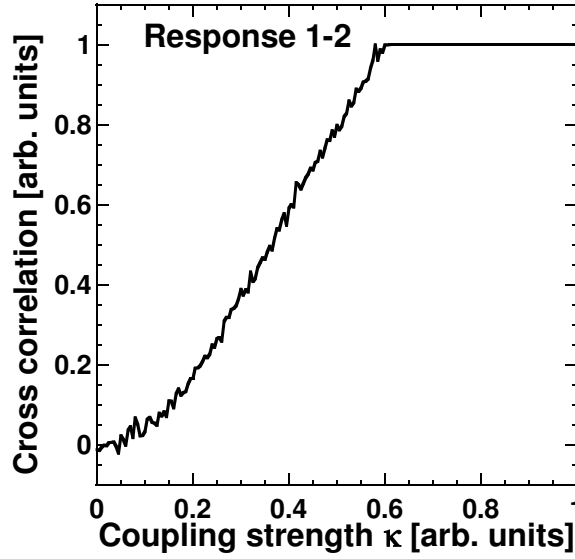


図 5.8: 結合マッキークラスモデルにおいて結合強度 κ を変化させた時の Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{r1,r2}$ の変化を示している.

次に Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{r1,r2}$ からコンシステンシーの定量的な評価を行う. 図 5.8 は結合強度 κ を変化させた時の Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{r1,r2}$ の変化を示している. $C_{r1,r2}$ は結合強度 κ の増加とともに単調に増加し, コンシステンシーは $\kappa > 0.6$ となると達成される. このような結合強度に対する $C_{r1,r2}$ の振る舞いは結合レスラーシステムの場合と同様であるが, 結合マッキークラスシステムの場合, コンシステンシーを達成するために比較的大きな κ を必要とする.

結合マッキークラスシステムにおいてコンシステンシーの有無と複雑性の関係性について調査するために, KS エントロピーと KY 次元の算出を行った. 図 5.9(a) は Drive-Response 間の結合強度 κ を変化させた時の KS エントロピー (実線) と KY 次元 (破線) の変化を示している. 図 5.9(a) の実線から KS エントロピーの変化を観察する. Drive-Response 間の結合がない時 ($\kappa = 0$), KS エントロピーは $h_{KS} = 0.167$ であり, これは単体の Drive と Response のそれぞれの KS エントロピーの和と一致する. 結合強度 κ を増加させると KS エントロピーは単調に減少する. さらに結合強度を増加させ, コンシステンシー状態となると ($\kappa > 0.6$), KS エントロピーは一定となる. この時の KS エントロピーの値は $h_{KS} = 0.090$ であり, 単体の Drive の KS エントロピーとほぼ一致する. これらの結果は結合レスラーシステムの場合と同様の振る舞いである. 一方で KY 次元 (図 5.9(a) の破線) は図 5.9(a) に示されている範囲において, 結合強度 κ の増加とともに減少している. この点は結合 Rössler

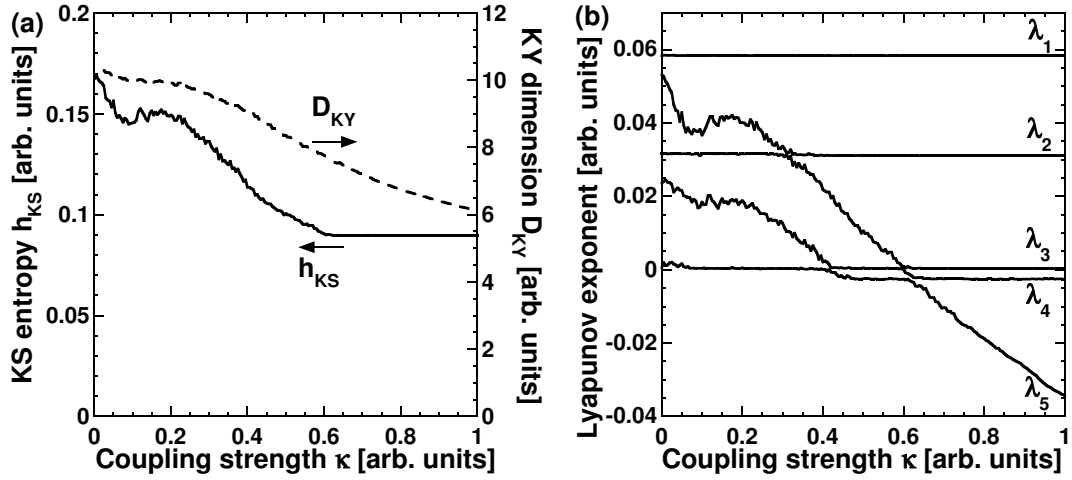


図 5.9: 結合マッキーグラスモデルにおけるリアプノフスペクトラム解析の結果を示している. (a) は結合強度 κ を変化させた時の KS エントロピー h_{KS} と KY 次元 (D_{KY}) の変化である. (b) は結合強度 κ を変化させた時のリアプノフ指数の変化を示しており, (a) の結果はこれらのリアプノフ指数から算出されている.

システムの場合と異なる.

以上の結果を説明するために, 図 5.9(b) にリアプノフスペクトラムの変化を示す. Drive-Response 間の結合がない時 ($\kappa = 0$), 本節におけるシステムパラメータの条件では単体のマッキーグラスモデルは 2 つの正のリアプノフ指数を有する. それゆえに図 5.9(b) において, ある 2 つの正の値を持つリアプノフ指数が必ず存在する. この値は単体の Drive の正のリアプノフ指数に相当する. 一方で結合強度 κ を増加させることで 2 つの正のリアプノフ指数が減少する. この減少するリアプノフ指数の値は Response のリアプノフ指数に相当する. コンシステンシー状態が達成される結合強度になると, Response のリアプノフ指数は全て 0 以下になり, Drive の正のリアプノフ指数は変化しないため, コンシステンシー状態では h_{KS} が一定となる.

5.2 光結合された半導体レーザにおけるコンシステンシー

本節では図 5.10 に示されている一方向に光結合された半導体レーザモデルにおいてコンシステンシーを観測する. 2 つのレーザは外部の鏡により反射された戻り光を有しており, 1 つのレーザ (Drive レーザと呼ぶ) からの出力光がもう 1 つのレーザ (Response レーザと呼ぶ) に一方向に入力されている. このモデルにおいて, Drive

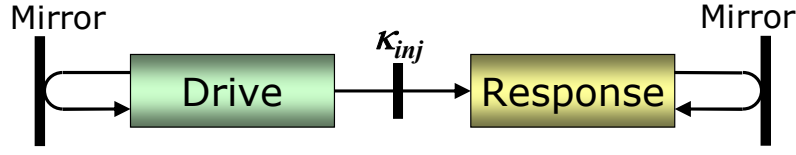


図 5.10: 一方向に光結合された戻り光を有する半導体レーザのモデル. Drive レーザから出力された光が一方向に Response レーザに注入される. κ_{inj} は Drive レーザから Response レーザに注入される光の注入強度を表す.

レーザの出力光を繰り返し Response レーザに入力する. この時 Response レーザの初期状態は繰り返し信号が入力されるたびに異なる状態となる. ここで繰り返し入力された同一の信号に対する Response レーザの応答信号をそれぞれ Response 1, Response 2 と呼ぶ. これらの 2 つの信号の相関が高く, これに対して Drive レーザと Response レーザの出力強度時系列の間の相関が低ければコンシステンシーが達成されているといえることができる.

5.2.1 Response レーザの数値モデル

Drive レーザからの注入光を有する Response レーザのダイナミクスを数値的に調査するために Response レーザのレート方程式である, 外部からの注入光を有する Lang-Kobayashi 方程式を導出する. 簡単のため Response レーザは戻り光を持たないとする. コヒーレントな光を注入された共振器のモデルを図 5.11 に示す. 図 5.11 において, $\hat{E}_{inj}(t) = E_{inj}(t) \exp(i\omega_{inj}t)$ は $z = 0$ の位置で共振器に注入される光の複素電界を表している. また r_1, r_2 は共振器端面の反射率であり, t'_1 は外部から入射される光の振幅透過率, l は内部共振器長を表す. 図 5.11 は第 3 章の図 3.1 に注入光が追加された図となっている. 図 5.11 の $z = 0$ において透過率 t'_1 を持つ共振器の端面を通過して内部へと入射する光は $t'_1 \hat{E}_{inj}(t)$ と表すことができるこの時, 第 3 章で導出された $z = 0$ における往復後の光の複素電界を表す方程式 (3.15) は次のように書き直すことができる.

$$E_f(t) = G_1 \exp(i\omega_{th}\tau_{in}) E_f(t - \tau_{in}) + t'_1 E_{inj}(t) \quad (5.26)$$

ここで外部からの注入光を有し, ゆっくりと変化する複素電界 $E(t)$ の時間ダイナミクスを表すレート方程式は, 第 3.1 節と同様の方法で導出することができ, 次のように表される.

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1 + i\alpha}{2} \left[G_N(N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] E(t) + \frac{t'_1}{\tau_{in}} E_{inj}(t) \exp(i\Delta\omega t) \quad (5.27)$$

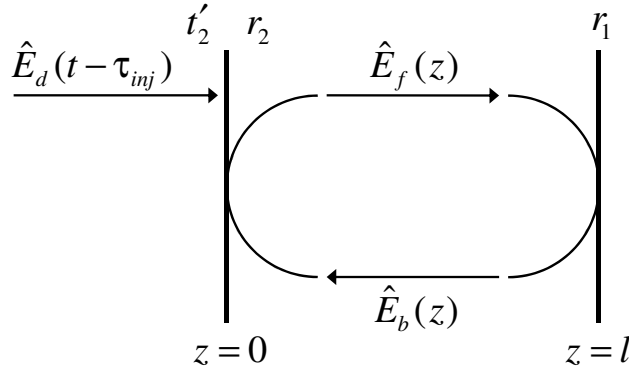


図 5.11: 外部からのコヒーレント光 \hat{E}_{inj} を有する半導体レーザのモデル. r_1, r_2 は共振器内の光に対する端面反射率. t'_2 は共振器の外部から入射する光の透過率. l は内部共振器長を表し, τ_{inj} は外部の光の伝搬時間を表す.

式 (5.27) において $\Delta\omega = \omega_{th} - \omega_{inj}$ は注入光と Response レーザの光角周波数差である.

以上から, Drive レーザの電界およびキャリア密度を E_d, N_d とし, Response レーザの電界およびキャリア密度を E_r, N_r と置くと, それぞれのレーザのレート方程式は次のように表される.

Drive laser:

$$\begin{aligned} \frac{dE_d(t)}{dt} = & \frac{1+i\alpha}{2} \left[G_N(N_d(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] E_d(t) \\ & + \kappa_d E_d(t - \tau_d) \exp(i\omega_d \tau_d) \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\frac{dN_d(t)}{dt} = J_d - \frac{N_d(t)}{\tau_s} - G_N(N_d(t) - N_0) |E_d(t)|^2 \quad (5.29)$$

Response laser:

$$\begin{aligned} \frac{dE_r(t)}{dt} = & \frac{1+i\alpha}{2} \left[G_N(N_r(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] E_r(t) \\ & + \kappa_{inj} E_d(t - \tau_{inj}) \exp[i(\Delta\omega t - \omega_d \tau_{inj})] \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\frac{dN_r(t)}{dt} = J_r - \frac{N_r(t)}{\tau_s} - G_N(N_r(t) - N_0) |E_r(t)|^2 \quad (5.31)$$

E はゆっくり変化する複素電界, N はレーザ内部のキャリア密度である. 下付きの d, r はそれぞれ Drive レーザおよび Response レーザであることを表す. G_N は光利

Symbol	Parameter	Value
G_N	Gain coefficient	$8.40 \times 10^{-13} \text{ m}^3/\text{s}$
N_0	Carrier density at transparency	$1.40 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$
τ_p	Photon lifetime	$1.927 \times 10^{-12} \text{ s}$
τ_s	Carrier lifetime	$2.04 \times 10^{-9} \text{ s}$
τ_{in}	Roundtrip time in internal cavity	$8.0 \times 10^{-12} \text{ s}$
r_2	Reflectivity of laser facet	0.556
α	Linewidth enhancement factor	3
λ_d	Optical wavelength of the Drive laser	$1.537 \times 10^{-6} \text{ m}$
c	Speed of light	$2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$
N_{th}	Carrier density at threshold	$2.018 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$
J_{th}	Injection current at threshold	$9.892 \times 10^{32} \text{ m}^{-3}\text{s}^{-1}$
ω_d	Optical angular frequency of the Drive laser	$1.215 \times 10^{15} \text{ rad/s}$
ϵ	Gain saturation coefficient	2.0×10^{-23}
$r_{3,d}, r_{3,r}$	Reflectivity of external mirror of the Drive and the Response lasers	0.015, 0.03
$\kappa_{d,r}$	Feedback strength of the Drive and Response lasers	2.3, 4.7 ns ⁻¹
r_{inj}	Parameter for injection strength	0.2
κ_{inj}	Injection strength from the Drive to Response lasers	31.1 ns ⁻¹
j_d, j_r	Normalized injection current of the Drive and the Response lasers	1.11, 1.36
$L_{d,r}$	External cavity length of the Drive and the Response lasers	0.6 m
$\tau_{d,r}$	Roundtrip time in external cavity of the Drive and Response lasers (feedback delay time)	4.003 ns
L_{inj}	Distance from the Drive to Response lasers	1.2 m
τ_{inj}	Propagation time of light from the Drive to Response lasers	4.003 ns
Δf	Initial optical-frequency detuning between the Drive and Response lasers	-4.0 GHz

表 5.1: 光結合された半導体レーザのパラメータ

得係数, N_0 は光透過時のキャリア密度, α は線幅増幅係数, τ_p は光子寿命, τ_s はキャリア寿命を表す. $J = j J_{th}$ はレーザを駆動するための注入電流であり, 発振しきい値電流 J_{th} の j 倍に設定する. Drive レーザの複素電界 E_d の方程式 (5.28) の右辺の第2項は戻り光を表す. κ_d は戻り光強度, τ_d は戻り光の遅延時間, ω_d は Drive レーザの光角周波数を表す. Response レーザの複素電界 E_r の方程式 (5.30) の右辺の第2項は Drive レーザから Response レーザへの注入光を表す. κ_{inj} は光注入強度, τ_{inj} は Drive レーザから Response レーザへの光伝搬時間, $\Delta\omega = \omega_d - \omega_r$ は2つのレーザの光角周波数差を表す. 半導体レーザにおけるコンシステンシーの達成において重要なパラメータは光注入強度 κ_{inj} および光周波数差 $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi)$ である.

式 (5.30) は戻り光を考えていない (オープンループと呼ぶ). 一方で Response レーザが戻り光を有する場合 (クロズドループと呼ぶ), 複素電界 E_r のレート方程式 (5.30) に以下のように戻り光を表す項を追加する.

$$\begin{aligned} \frac{dE_r(t)}{dt} = & \frac{1+i\alpha}{2} \left[G_N(N_r(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] E_r(t) \\ & + \kappa_r E_r(t - \tau_r) \exp(i\omega_r \tau_r) \\ & + \kappa_{inj} E_d(t - \tau_{inj}) \exp[i\Delta\omega t - \omega_d \tau_{inj}] \end{aligned} \quad (5.32)$$

上式において第2項が戻り光を表す. 数値計算において Drive レーザの戻り光強度 κ_d と Response レーザの戻り光強度 κ_r は異なる値に設定する. この理由は Drive レーザと Response レーザが異なるダイナミクスを持つためにそれぞれの電流値 j_d および j_r を異なる値に設定しており, カオスを発生させるために必要な戻り光強度が異なるためである.

κ_{inj} は Drive レーザから Response レーザへの光注入強度を表しているが, 戻り光強度 κ_d および κ_r との比較を簡単に行うために, 以下のように定義する.

$$\kappa_{inj} = \frac{1}{\tau_{in}} \frac{(1 - r_2^2) r_{inj}}{r_2} \quad (5.33)$$

ここで r_{inj} は戻り光の外部鏡反射率 r_3 に相当するパラメータであり, これを変えることで注入強度 κ_{inj} を変化させる. 以上が外部からの光注入を有する Lang-Kobayashi 方程式である. また方程式中で用いられているパラメータを表 5.1 にまとめる.

5.2.2 Lang-Kobayashi 方程式の実部・虚部方程式への分離

第3.3節で述べたように, 複素で表されている E_d および E_r は数値計算に適さないため, 式 (5.28) および式 (5.30) を実部と虚部に分離した方程式を用いるのが望ま

しい。また実際の半導体レーザのダイナミクスを再現するためには、飽和項を付加することが重要である。以上の理由のため、本章では以下に示す飽和項を付加し、複素電界 E を実部 E_{re} および虚部 E_{im} に分離した方程式を用いる。

Drive laser:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{re,d}(t)}{dt} = & \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N_d(t) - N_0)}{1 + \epsilon I_d(t)} - \frac{1}{\tau_p} \right] [E_{re,d}(t) - \alpha E_{im,d}(t)] \\ & + \kappa_d [E_{re,d}(t - \tau_d) \cos(\omega_d \tau_d) + E_{im,d}(t - \tau_d) \sin(\omega_d \tau_d)] \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_{im,d}(t)}{dt} = & \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N_d(t) - N_0)}{1 + \epsilon I_d(t)} - \frac{1}{\tau_p} \right] [\alpha E_{re,d}(t) + E_{im,d}(t)] \\ & + \kappa_d [-E_{re,d}(t - \tau_d) \sin(\omega_d \tau_d) + E_{im,d}(t - \tau_d) \cos(\omega_d \tau_d)] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Response laser:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{re,r}(t)}{dt} = & \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N_r(t) - N_0)}{1 + \epsilon I_r(t)} - \frac{1}{\tau_p} \right] [E_{re,r}(t) - \alpha E_{im,r}(t)] \\ & + \kappa_r [E_{re,r}(t - \tau_r) \cos(\omega_r \tau_r) + E_{im,r}(t - \tau_r) \sin(\omega_r \tau_r)] \\ & + \kappa_{inj} [E_{re,d}(t - \tau_{inj}) \cos \theta(t) - E_{im,d}(t - \tau_{inj}) \sin \theta(t)] \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_{im,r}(t)}{dt} = & \frac{1}{2} \left[\frac{G_N(N_r(t) - N_0)}{1 + \epsilon I_r(t)} - \frac{1}{\tau_p} \right] [\alpha E_{re,r}(t) + E_{im,r}(t)] \\ & + \kappa_r [-E_{re,r}(t - \tau_r) \sin(\omega_r \tau_r) + E_{im,r}(t - \tau_r) \cos(\omega_r \tau_r)] \\ & + \kappa_{inj} [E_{re,d}(t - \tau_{inj}) \sin \theta(t) + E_{im,d}(t - \tau_{inj}) \cos \theta(t)] \end{aligned} \quad (5.37)$$

式 (5.36) および式 (5.37) において $I = E_{re}^2 + E_{im}^2$ はレーザ強度を表す。また $\theta(t) = \Delta\omega t - \omega_d \tau_{inj}$ である。 $\theta(t)$ において、 $\Delta\omega t$ はレーザ間の光周波数差 $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi)$ により生じる位相の変化、 $\omega_d \tau_{inj}$ は Drive レーザから Response レーザへの光伝搬時間 τ_{inj} により生じる注入光の位相の変化を表す。

5.2.3 無次元化された結合 Lang-Kobayashi 方程式

本章ではリアプノフ指数の算出を行い、システム全体の複雑性解析を行うため、数値計算の誤差を低減するために前節で導出した方程式の無次元化を行う。

Drive laser:

$$\begin{aligned} \frac{de_{re,d}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n_d(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t))} - \gamma_e \right] (e_{re,d}(t) - \alpha e_{im,d}(t)) \\ & + \kappa_{e,d}[e_{re,d}(t - \tau_d) \cos(\omega_d \tau_d) + e_{im,d}(t - \tau_d) \sin(\omega_d \tau_d)] \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im,d}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n_d(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t))} - \gamma_e \right] (\alpha e_{re,d}(t) + e_{im,d}(t)) \\ & + \kappa_{e,d}[-e_{re,d}(t - \tau_d) \sin(\omega_d \tau_d) + e_{im,d}(t - \tau_d) \cos(\omega_d \tau_d)] \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_d(t)}{dt} = & \gamma_n(n_{th} \frac{J_d}{J_{th}} - n_d(t)) \\ & - \frac{g_n(n_d(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t))} (e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t)) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Response laser:

$$\begin{aligned} \frac{de_{re,r}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n_r(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,r}^2(t) + e_{im,r}^2(t))} - \gamma_e \right] (e_{re,r}(t) - \alpha e_{im,r}(t)) \\ & + \kappa_{e,r}[e_{re,r}(t - \tau_r) \cos(\omega_r \tau_r) + e_{im,r}(t - \tau_r) \sin(\omega_r \tau_r)] \\ & + \kappa_{e,inj}[e_{re,d}(t - \tau_{inj}) \cos \theta(t) - e_{im,d}(t - \tau_{inj}) \sin \theta(t)] \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im,r}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n_r(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,r}^2(t) + e_{im,r}^2(t))} - \gamma_e \right] (\alpha e_{re,r}(t) + e_{im,r}(t)) \\ & + \kappa_{e,r}[-e_{re,r}(t - \tau_r) \sin(\omega_r \tau_r) + e_{im,r}(t - \tau_r) \cos(\omega_r \tau_r)] \\ & + \kappa_{e,inj}[e_{re,d}(t - \tau_{inj}) \sin \theta(t) + e_{im,d}(t - \tau_{inj}) \cos \theta(t)] \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_r(t)}{dt} = & \gamma_n(n_{th} \frac{J_r}{J_{th}} - n_r(t)) \\ & - \frac{g_n(n_r(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,r}^2(t) + e_{im,r}^2(t))} (e_{re,r}^2(t) + e_{im,r}^2(t)) \end{aligned} \quad (5.43)$$

e_{re} , e_{im} , n は無次元化定数 \bar{A} , \bar{N} により無次元化された無次元量であり, 電界実部 E_{re} , 電界虚部 E_{im} およびキャリア密度 N と $E_{re} = \bar{A}e_{re}$, $E_{im} = \bar{A}e_{im}$, $N = \bar{N}n$ という関係を持つ. 式 (5.38)–(5.43) に新たに現れた定数 g_e , g_n , κ_e , γ_e , γ_n , n_0 , n_{th} は方程式の無次元化により現れた定数を整理した定数であり, 第3章の式 (3.76) として定義されている. 式 (5.41) および (5.42) において, $\kappa_{e,inj}$ は Drive レーザから Response レーザへの光注入強度を表し, $\kappa_{e,inj} = t' \kappa_{inj}$ として $t' = 10^{-9}$ により規格化されている. また無次元化定数は第3章の式 (3.80) のように, 戻り光を持たない半導体レーザの定常解を用いて定義されている.

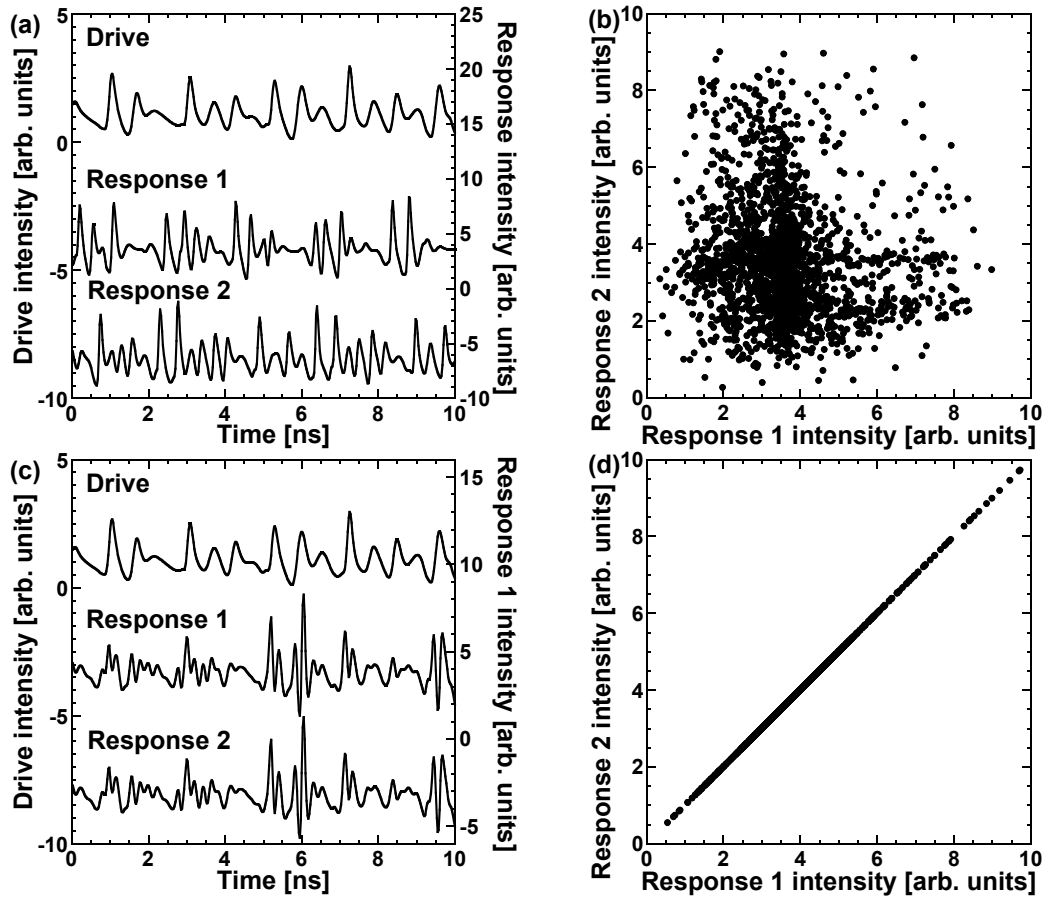


図 5.12: (a),(c) Drive レーザ, Response レーザの出力強度の時系列. (b),(d) 時系列に相当する Response 1-2 間の相関図. この時の Drive レーザから Response レーザへの光注入強度はそれぞれ (a),(b) $\kappa_{inj} = 0.0$, (c),(d) $\kappa_{inj} = 31.1 \text{ ns}^{-1}$ である.

5.2.4 結合半導体レーザのコンシステンシーの数値計算結果

無次元化 Lang-Kobayashi 方程式 (5.38)–(5.43) を数値積分することにより光結合された半導体レーザのダイナミクスを調査し, 光注入によるコンシステンシーの達成を観測する. 図 5.12(a) および (b) は光注入が無い時 ($\kappa_{inj} = 0 \text{ ns}^{-1}$) の Drive レーザ, Response 1, Response 2 の時系列と, この時系列に相当する Response 1-2 間の相関図である. ここで Response 1 および Response 2 は Drive レーザから出力されたカオス信号を, Response レーザ繰り返し入力した時に得られる 1 回目の応答出力と 2 回目の応答出力を表す. 図 5.12(a) から Response 1 と Response 2 は異なる信号であることが分かる. また図 5.12(b) の相関図から Response 1 と Response 2 の間に

相関がないことが確認できる．次に Drive レーザの出力光を Response レーザに光注入する．図 5.12(c) および (d) は $\kappa_{inj} = 31.1 \text{ ns}^{-1}$ の時の Drive レーザ，Response 1，Response 2 の時系列と，この時系列に相当する Response 1-2 間の相関図である．Drive レーザの時系列は Drive レーザから Response レーザへの光伝搬時間 τ_{inj} だけ遅れた時系列が示されている．図 5.12(c) から Drive と Response の時系列は異なっているにもかかわらず，Response 1 と Response 2 の時系列は同一であることが分かる．これは図 5.12(d) の相関図が斜め 45° の直線であることから確認でき，コンシステンシーが達成されているといえることができる．

次に Response 1-2 間の相互相関関数によりコンシステンシーの達成を定量的に評価する．

$$C_{1,2} = \frac{\langle (I_1(t) - \bar{I}_1)(I_2(t) - \bar{I}_2) \rangle}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (5.44)$$

ここで I はレーザ強度， \bar{I} はレーザ強度の平均値， σ はレーザ強度の標準偏差， $\langle \cdot \rangle$ は時間平均操作を表す．下付きの 1, 2 はそれぞれ Response 1 と Response 2 を表す．同様に Drive-Response 間の相互相関関数を以下の式により定量的に評価する．

$$C_{d,r} = \frac{\langle (I_d(t) - \bar{I}_d)(I_1(t) - \bar{I}_1) \rangle}{\sigma_d \sigma_1} \quad (5.45)$$

ここで下付きの d , 1 はそれぞれ Drive, Response 1 を表す．

さらに光注入後の Drive レーザと Response レーザ間の光周波数差 Δf_{inj} の観測を行う．光結合された半導体レーザの同期現象において光周波数差は重要な役割を果たすことが知られている [3]．光注入前の光周波数差 Δf を適切な値に設定し，Drive レーザの出力を比較的強い強度で Response レーザに光注入することで，Response レーザの光周波数が Drive レーザの光周波数と一致する．この現象はインジェクションロッキングとして知られており，レーザにおけるコンシステンシーの達成においても重要である．そこで相互相関関数と共に，光注入後の Drive-Response 間の光周波数差 Δf_{inj} の算出を行う [3, 92]．

$$\Delta f_{inj} = \Delta f + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d\phi_d(t)}{dt} - \frac{d\phi_1(t)}{dt} \right], \quad (5.46)$$

ここで ϕ_d , ϕ_1 はそれぞれ Drive 信号と Response 1 信号の光位相を表す．光位相 ϕ は複素電界 $E = E_{re} + iE_{im}$ の実部 E_{re} と虚部 E_{im} から $\phi = \tan^{-1}[E_{im}/E_{re}]$ として計算される．光注入前の Drive レーザと Response レーザの光周波数が一致していなかったとしても ($\Delta f \neq 0$)，インジェクションロッキングが達成されれば，光注入後の光周波数差は $\Delta f_{inj} = 0$ となる．

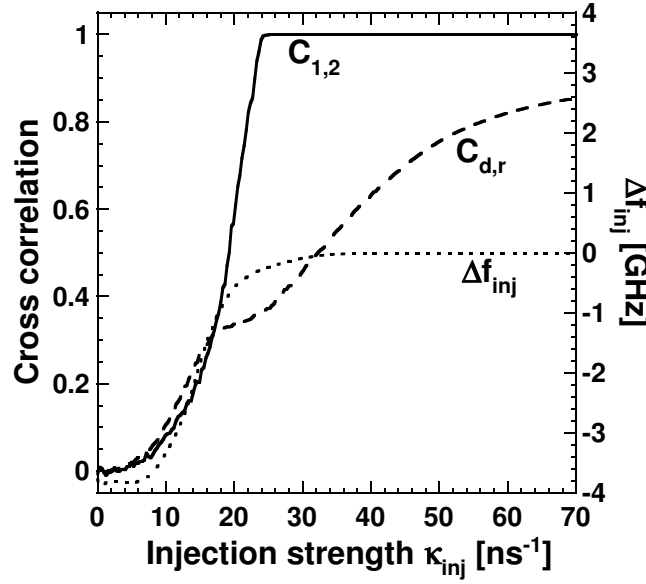


図 5.13: 光注入強度 κ_{inj} を増加させた時の Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{1,2}$ (実線), Drive-Response 間の相互相関関数 $C_{d,r1}$ (破線) の変化を表している. また点線は光注入後の Drive-Response 間の光周波数差 Δf_{inj} の変化を表している.

図 5.13 に Drive レーザから Response レーザへの光注入強度 κ_{inj} を増加させた時の相互相関関数 $C_{1,2}$, $C_{d,r}$ および光注入後の光周波数差 Δf_{inj} の変化を示す. 実線は Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{1,2}$ を表し, 光注入強度が $\kappa_{inj} > 24.0 \text{ ns}^{-1}$ となると $C_{1,2} \approx 1$ となり, コンシステンシーが達成されていることを表す. 一方で Drive-Response 間の相互相関関数 $C_{d,r}$ は破線で表されており, コンシステンシーが達成されている領域で, $C_{d,r}$ は 0.4 から 0.8 程度であり, Drive と Response が異なる信号であることが分かる.

図 5.13 において光注入後の光周波数差 Δf_{inj} は点線で表されている. 光注入が無い時 ($\kappa_{inj} = 0$), 光注入後の光周波数差 Δf_{inj} は光注入前の光周波数差 Δf とほぼ同じとなる ($\Delta f_{inj} \approx \Delta f$). 光注入強度 κ_{inj} を増加させると, Δf_{inj} は 0 GHz に収束していく. Δf_{inj} (点線) と $C_{1,2}$ (破線) を比較すると, インジェクションロッキングが達成されているとき ($\Delta f_{inj} \approx 0$) に, コンシステンシーが達成されていることが分かる ($C_{1,2} \approx 1$). それゆえに, 半導体レーザのコンシステンシーはインジェクションロッキング状態の下で達成されるということが出来る.

5.3 光結合された半導体レーザにおけるリアプノフスペクトラム解析

光結合された半導体レーザにおいてコンシステンシーと複雑性の関係性を調査するために、リアプノフ指数の算出を行う。伝搬を持つ結合システムにおいてリアプノフ指数を算出する際に注意しなければならない点は、本章で扱っているモデルが3つの時間遅延変数を持つことである。1つ目はDriveレーザの戻り光、2つ目はResponseレーザの戻り光、3つ目はDriveレーザからResponseレーザへの注入光である。これらの伝搬時間が異なる場合、結合システム全体の状態空間を考えることが難しくなる。そこで簡単のため本研究では遅延時間 τ_d , τ_r および伝搬時間 τ_{inj} が等しくなるようにパラメータを設定している。

5.3.1 光結合された Lang-Kobayashi 方程式の線形化

本節ではリアプノフ指数を算出するために状態空間における軌道に対して微小揺らぎを仮定し、基準軌道に対してモデル方程式を線形化することで、微小揺らぎの線形化方程式を得る。線形化する際に重要となることは、本章で扱うモデルが結合システムであるため、結合された全てのシステムの状態変数を状態空間として考えなければならない点である。

まず Drive レーザおよび Response レーザの状態変数をそれぞれ $\mathbf{x}_d(t) = (e_{re,d}(t), e_{im,d}(t), n_d(t))^{\dagger}$, $\mathbf{x}_r(t) = (e_{re,r}(t), e_{im,r}(t), n_r(t))^{\dagger}$ と置く。ここで \dagger は転置を表す。本章で考えているモデルは Drive レーザと Response レーザの2つの半導体レーザが結合されたシステムであるため、結合システムの状態を $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_d^{\dagger}(t), \mathbf{x}_r^{\dagger}(t))^{\dagger}$ と表す。つまり6変数の状態変数として考える。このシステムにおいて、時間遅延フィードバックおよび一方向結合を有するシステムのダイナミクスは以下の方程式で表される。

$$\frac{d\mathbf{x}_d(t)}{dt} = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}_d(t), \mathbf{x}_d(t - \tau_d)) \quad (5.47)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_r(t)}{dt} = \mathbf{f}_r(\mathbf{x}_r(t), \mathbf{x}_r(t - \tau_r), \mathbf{x}_d(t - \tau_{inj})) \quad (5.48)$$

\mathbf{f}_d , \mathbf{f}_r はそれぞれ Drive レーザと Response レーザのダイナミクスを表す3次元の関数であり、式 (5.38)–(5.43) の右辺を表す。 τ_d , τ_r はそれぞれ Drive レーザと Response レーザの遅延時間であり、 τ_{inj} は Drive レーザから Response レーザへの光の伝搬時間を表す。本章では遅延時間および伝搬時間は全て等しいと仮定してい

るため、以降では $\tau_d = \tau_r = \tau_{inj} = \tau$ としている。このシステムにおいて微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}(t) = (\delta \mathbf{x}_d^\dagger(t), \delta \mathbf{x}_r^\dagger(t))^\dagger$ を考える。ただし $\delta \mathbf{x}_d(t) = (\delta e_{re,d}(t), \delta e_{im,d}(t), \delta n_d(t))^\dagger$, $\delta \mathbf{x}_r(t) = (\delta e_{re,r}(t), \delta e_{im,r}(t), \delta n_r(t))^\dagger$ である。軌道 $\mathbf{x}(t)$ に微小揺らぎ $\delta \mathbf{x}(t)$ を与えた軌道 $\delta \mathbf{x}(t)$ を仮定し、軌道 $\mathbf{x}(t)$ のまわりで式 (5.47) および (5.48) を線形化すると以下の方程式が得られる。

$$\frac{d\delta \mathbf{x}_d(t)}{dt} = \mathbf{J}_{d,t} \delta \mathbf{x}_d(t) + \mathbf{J}_{d,\tau} \delta \mathbf{x}_d(t - \tau) \quad (5.49)$$

$$\frac{d\delta \mathbf{x}_r(t)}{dt} = \mathbf{J}_{r,t} \delta \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{J}_{r,\tau} \delta \mathbf{x}_r(t - \tau) + \mathbf{J}_{inj} \delta \mathbf{x}_d(t - \tau) \quad (5.50)$$

$\mathbf{J}_{d,t}$ および $\mathbf{J}_{d,\tau}$ はそれぞれ時間 t と $t - \tau$ の変数 $\mathbf{x}_d(t)$ で式 (5.47) を偏微分したことにより得られる 3×3 係数行列である。また $\mathbf{J}_{r,t}$ および $\mathbf{J}_{r,\tau}$ はそれぞれ時間 t と $t - \tau$ の変数 $\mathbf{x}_r(t)$ で式 (5.48) を偏微分したことにより得られる 3×3 係数行列である。式 (5.48) の右辺の 3 番目の項の \mathbf{J}_{inj} は Drive レーザの変数 $\mathbf{x}_d(t - \tau)$ で Response レーザの関数 \mathbf{f}_r を偏微分したことにより得られる 3×3 係数行列である。光結合された Lang-Kobayashi 方程式 (5.38)–(5.43) の右辺をそれぞれ $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ と置くと、式 (5.49) および (5.50) の $\mathbf{J}_{d,t}, \mathbf{J}_{d,\tau}, \mathbf{J}_{r,t}, \mathbf{J}_{r,\tau}, \mathbf{J}_{inj}$ は次のように表される。

$$\mathbf{J}_{d,t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e_{re,d}(t)} & \frac{\partial f_1}{\partial e_{im,d}(t)} & \frac{\partial f_1}{\partial n_d(t)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial e_{re,d}(t)} & \frac{\partial f_2}{\partial e_{im,d}(t)} & \frac{\partial f_2}{\partial n_d(t)} \\ \frac{\partial f_3}{\partial e_{re,d}(t)} & \frac{\partial f_3}{\partial e_{im,d}(t)} & \frac{\partial f_3}{\partial n_d(t)} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{J}_{d,\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e_{re,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_1}{\partial e_{im,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_1}{\partial n_d(t-\tau)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial e_{re,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_2}{\partial e_{im,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_2}{\partial n_d(t-\tau)} \\ \frac{\partial f_3}{\partial e_{re,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_3}{\partial e_{im,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_3}{\partial n_d(t-\tau)} \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

$$\mathbf{J}_{r,t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_4}{\partial e_{re,r}(t)} & \frac{\partial f_4}{\partial e_{im,r}(t)} & \frac{\partial f_4}{\partial n_r(t)} \\ \frac{\partial f_5}{\partial e_{re,r}(t)} & \frac{\partial f_5}{\partial e_{im,r}(t)} & \frac{\partial f_5}{\partial n_r(t)} \\ \frac{\partial f_6}{\partial e_{re,r}(t)} & \frac{\partial f_6}{\partial e_{im,r}(t)} & \frac{\partial f_6}{\partial n_r(t)} \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

$$\mathbf{J}_{r,\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_4}{\partial e_{re,r}(t-\tau)} & \frac{\partial f_4}{\partial e_{im,r}(t-\tau)} & \frac{\partial f_4}{\partial n_r(t-\tau)} \\ \frac{\partial f_5}{\partial e_{re,r}(t-\tau)} & \frac{\partial f_5}{\partial e_{im,r}(t-\tau)} & \frac{\partial f_5}{\partial n_r(t-\tau)} \\ \frac{\partial f_6}{\partial e_{re,r}(t-\tau)} & \frac{\partial f_6}{\partial e_{im,r}(t-\tau)} & \frac{\partial f_6}{\partial n_r(t-\tau)} \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

$$\mathbf{J}_{inj} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_4}{\partial e_{re,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_4}{\partial e_{im,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_4}{\partial n_d(t-\tau)} \\ \frac{\partial f_5}{\partial e_{re,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_5}{\partial e_{im,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_5}{\partial n_d(t-\tau)} \\ \frac{\partial f_6}{\partial e_{re,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_6}{\partial e_{im,d}(t-\tau)} & \frac{\partial f_6}{\partial n_d(t-\tau)} \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

式 (5.51) の行列 $\mathbf{J}_{d,t}$ の各要素はそれぞれ以下のように表される。

$$\frac{\partial f_1}{\partial e_{re,d}(t)} = \left[\frac{g_e(n_d(t) - n_0)(1 + \epsilon'(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t) + 2\alpha e_{re,d}(t)e_{im,d}(t)))}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} - \gamma_e \right] \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial e_{im,d}(t)} = \left[\frac{g_e(n_d(t) - n_0)(\epsilon'(\alpha(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t)) - 2e_{re,d}(t)e_{im,d}(t)) - \alpha)}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} + \alpha\gamma_e \right] \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial n_d(t)} = \frac{g_n(e_{re,d}(t) - \alpha e_{im,d}(t))}{1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t))} \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial e_{re,d}(t)} = \left[\frac{g_e(n_d(t) - n_0)(\epsilon'(\alpha(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t)) - 2e_{re,d}(t)e_{im,d}(t)) + \alpha)}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} - \alpha\gamma_e \right] \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial e_{im,d}(t)} = \left[\frac{g_e(n_d(t) - n_0)(1 - \epsilon'(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t) + 2\alpha e_{re,d}(t)e_{im,d}(t)))}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} - \gamma_e \right] \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial n_d(t)} = \frac{g_n(\alpha e_{re,d}(t) + e_{im,d}(t))}{1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t))} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial e_{re,d}(t)} = \frac{-2g_e(n_d(t) - n_0)e_{re,d}(t)}{(1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t)))^2} \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial e_{im,d}(t)} = \frac{-2g_e(n_d(t) - n_0)e_{im,d}(t)}{(1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t)))^2} \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial n_d(t)} = - \left[\gamma_n + \frac{g_n(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t))}{1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t))} \right] \quad (5.64)$$

式 (5.52) の行列 $\mathbf{J}_{d,\tau}$ の各要素はそれぞれ以下のように表される。

$$\frac{\partial f_1}{\partial e_{re,d}(t - \tau)} = \kappa_{e,d} \cos(\omega_d \tau) \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial e_{im,d}(t - \tau)} = \kappa_{e,d} \sin(\omega_d \tau) \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial n_d(t - \tau)} = 0 \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial e_{re,d}(t - \tau)} = -\kappa_{e,d} \sin(\omega_d \tau) \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial e_{im,d}(t - \tau)} = \kappa_{e,d} \cos(\omega_d \tau) \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial n_d(t-\tau)} = 0 \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial e_{re,d}(t-\tau)} = \frac{\partial f_3}{\partial e_{im,d}(t-\tau)} = \frac{\partial f_3}{\partial n_d(t-\tau)} = 0 \quad (5.71)$$

式 (5.53) の行列 $\mathbf{J}_{r,t}$ の各要素はそれぞれ以下のように表される.

$$\frac{\partial f_4}{\partial e_{re,r}(t)} = \left[\frac{g_e(n_r(t) - n_0)(1 + \epsilon'(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t) + 2\alpha e_{re,r}(t)e_{im,r}(t)))}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} - \gamma_e \right] \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial e_{im,r}(t)} = \left[\frac{g_e(n_r(t) - n_0)(\epsilon'(\alpha(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t)) - 2e_{re,r}(t)e_{im,r}(t)) - \alpha)}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} + \alpha\gamma_e \right] \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial n_r(t)} = \frac{g_n(e_{re,r}(t) - \alpha e_{im,r}(t))}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} \quad (5.74)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial e_{re,r}(t)} = \left[\frac{g_e(n_r(t) - n_0)(\epsilon'(\alpha(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t)) - 2e_{re,r}(t)e_{im,r}(t)) + \alpha)}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} - \alpha\gamma_e \right] \quad (5.75)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial e_{im,r}(t)} = \left[\frac{g_e(n_r(t) - n_0)(1 - \epsilon'(e_{im}^2(t) - e_{re}^2(t) + 2\alpha e_{re,r}(t)e_{im,r}(t)))}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} - \gamma_e \right] \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial n_r(t)} = \frac{g_n(\alpha e_{re,r}(t) + e_{im,r}(t))}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial e_{re,r}(t)} = \frac{-2g_e(n_r(t) - n_0)e_{re,r}(t)}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial e_{im,r}(t)} = \frac{-2g_e(n_r(t) - n_0)e_{im,r}(t)}{(1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)))^2} \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial n_r(t)} = - \left[\gamma_n + \frac{g_n(e_{re,r}^2(t) + e_{im,r}^2(t))}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} \right] \quad (5.80)$$

式 (5.54) の行列 $\mathbf{J}_{r,\tau}$ の各要素はそれぞれ以下のように表される.

$$\frac{\partial f_4}{\partial e_{re,r}(t-\tau)} = \kappa_{e,r} \cos(\omega_r \tau) \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial e_{im,r}(t-\tau)} = \kappa_{e,r} \sin(\omega_r \tau) \quad (5.82)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial n_r(t-\tau)} = 0 \quad (5.83)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial e_{re,r}(t-\tau)} = -\kappa_{e,r} \sin(\omega_r \tau) \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial e_{im,r}(t-\tau)} = \kappa_{e,r} \cos(\omega_r \tau) \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial n_r(t-\tau)} = 0 \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial e_{re,r}(t-\tau)} = \frac{\partial f_6}{\partial e_{im,r}(t-\tau)} = \frac{\partial f_6}{\partial n_r(t-\tau)} = 0 \quad (5.87)$$

式 (5.55) の行列 \mathbf{J}_{inj} の各要素はそれぞれ以下のように表される.

$$\frac{\partial f_4}{\partial e_{re,d}(t-\tau)} = \kappa_{e,inj} \cos \theta(t) \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial e_{im,d}(t-\tau)} = -\kappa_{e,inj} \sin \theta(t) \quad (5.89)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial n_d(t-\tau)} = 0 \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial e_{re,d}(t-\tau)} = \kappa_{e,inj} \sin \theta(t) \quad (5.91)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial e_{im,d}(t-\tau)} = \kappa_{e,inj} \cos \theta(t) \quad (5.92)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial n_d(t-\tau)} = 0 \quad (5.93)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial e_{re,d}(t-\tau)} = \frac{\partial f_6}{\partial e_{im,d}(t-\tau)} = \frac{\partial f_6}{\partial n_d(t-\tau)} = 0 \quad (5.94)$$

以上が光結合された半導体レーザのレート方程式 (5.38)–(5.43) の線形化方程式である.

Drive レーザのレート方程式から導出された線形化方程式は単体の戻り光を有する半導体レーザであるため, 第 4 章で示された線形化方程式と同一の方程式となる. 一方で Response レーザの線形化方程式は Drive レーザからの注入光がある点で Drive レーザの線形化方程式とは異なる. 数値計算上では線形化方程式も時間遅延項を持つため, 数値積分して得られた各変数の値をバッファに保存しておく必要がある. また本章では Drive レーザから Response レーザへの伝搬時間 τ_{inj} を考えて

いるが、一方向結合であるため τ_{inj} の長さにより Response レーザのダイナミクスは変化しないため、 $\tau_{inj} = 0$ とすることで Drive レーザの伝搬のための変数をバッファに保存する必要がなくなる。

5.3.2 光結合された半導体レーザにおけるリアプノフ指数の算出手法

結合システムにおいてリアプノフ指数を算出する手法について述べる。基本的な計算手法は単体システムの場合 (第4章) と変わらないが、状態空間を2つのシステムの状態空間の和として考える必要がある点で異なる。また Drive レーザと Response レーザはどちらも戻り光を有するため時間遅延システムである。したがってその状態空間は無限次元であるため、離散化により有限次元システムとして扱う必要がある。

そこでまず時間遅延成分を十分に小さな時間 h により離散化する [36]。遅延時間 τ を微小時間 h により離散化し、Drive レーザと Response レーザの状態ベクトル $\mathbf{x}_d(t)$ および $\mathbf{x}_r(t)$ から新しい状態ベクトル $\mathbf{y}_d(t) = (\mathbf{x}_d^\dagger(t), \mathbf{x}_d^\dagger(t-h), \mathbf{x}_d^\dagger(t-2h), \dots, \mathbf{x}_d^\dagger(t-Mh))^\dagger$ および $\mathbf{y}_r(t) = (\mathbf{x}_r^\dagger(t), \mathbf{x}_r^\dagger(t-h), \mathbf{x}_r^\dagger(t-2h), \dots, \mathbf{x}_r^\dagger(t-Mh))^\dagger$ を定義する。ここで \dagger は転置を表し、 $M = \tau/h$ である。これらの2つの状態ベクトル $\mathbf{y}_d(t)$, $\mathbf{y}_r(t)$ からなるベクトル $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{y}_d^\dagger(t), \mathbf{y}_r^\dagger(t))^\dagger$ を結合システムの状態ベクトルと考える。したがって $\mathbf{y}(t)$ は $6(M+1)$ 次元の状態ベクトルとなる。リアプノフ指数を算出するために、状態ベクトル $\mathbf{y}(t)$ に対して微小揺らぎ $\delta\mathbf{y}(t) = (\delta\mathbf{y}_d^\dagger(t), \delta\mathbf{y}_r^\dagger(t))^\dagger$ を考える。この $6(M+1)$ 次元の微小揺らぎ $\delta\mathbf{y}(t)$ を線形化方程式 (5.49) および (5.50) により数値積分することで時間発展させ、リアプノフ指数を算出する。

第4章と同様に p 個のリアプノフ指数を算出することを考える。 p 個のリアプノフ指数を算出するため、 p 個の微小揺らぎ $\delta\mathbf{y}_i(t)$ の初期変位 $\delta\mathbf{y}_i(0)$ を用意する (ただし $i = 1, 2, \dots, p$)。ここで $\delta\mathbf{y}_i(0)$ は互いに直交でそのノルム $d(t)$ が1となるようにする。ただし $\delta\mathbf{y}_i(t)$ ノルム $d(t)$ は次のように定義される。

$$d(t) = \left[\sum_{i=0}^M (\delta e_{re,d}^2(t-ih) + \delta e_{im,d}^2(t-ih) + \delta n_d^2(t-ih) + \delta e_{re,r}^2(t) + \delta e_{im,r}^2(t) + \delta n_r^2(t)) \right]^{1/2} \quad (5.95)$$

さらに行列 $\mathbf{X}(t)$ を次のように p 個の $\delta\mathbf{y}_i(t)$ からなる行列と定義する。

$$\mathbf{X}(t) = (\delta\mathbf{y}_1(t) \ \delta\mathbf{y}_2(t) \ \cdots \ \delta\mathbf{y}_p(t)) \quad (5.96)$$

つまり行列 $\mathbf{X}(t)$ は $6(M+1)$ 行 p 列の行列となる。

次に線形化方程式 (5.49) および (5.50) を用いて行列 $\mathbf{X}(0)$ を時間 τ だけ発展させることで行列 $\mathbf{X}(\tau)$ を得る。第 4.2 節で述べた方法と同様に，行列 $\mathbf{X}(\tau)$ に QR 分解を行うことで $\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1$ に分解する。この時 \mathbf{Q}_1 は列ベクトルの大きさが 1 で互いに直交な $3(M+1)$ 行 p 列の行列であり， \mathbf{R}_1 は $p \times p$ の上三角行列となる。QR 分解により得られた行列 \mathbf{Q}_1 を新たに $\mathbf{X}(\tau)$ とし，線形化方程式 (5.49) および (5.50) を用いて時間 τ だけ発展させることで行列 $\mathbf{X}(2\tau)$ を得る。行列 $\mathbf{X}(2\tau)$ に再び QR 分解を行い，行列 \mathbf{Q}_2 と \mathbf{R}_2 を得る。

以上の過程を繰り返し行い，得られた上三角行列 \mathbf{R}_i (i は自然数) の対角成分 R_i^{jj} を用いてリアプノフ指数は次のように計算される。

$$\lambda_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln R_i^{jj} \quad (5.97)$$

ここで N は計算回数を表す。QR 分解の具体的な方法については第 4.2 節で詳しく述べられている。

5.3.3 リアプノフスペクトラム解析の数値計算結果 (光注入強度への複雑性の依存性)

光結合された半導体レーザシステム全体の KS エントロピーと KY 次元をリアプノフスペクトルから算出する。比較のために，単体の (つまり結合されていない) Drive レーザと Response レーザの KS エントロピーと KY 次元の算出結果も示す。図 5.14 は光注入強度 κ_{inj} を変化させた時の KS エントロピー (実線) と KY 次元 (破線) の変化を示している。図 5.14 に対応する相互相関関数の変化は図 5.13 である。光注入が無い時 ($\kappa_{inj} = 0 \text{ ns}^{-1}$)，図 5.14 の実線から KS エントロピーは 2.03 ns^{-1} である。この値は結合が無い時の Drive レーザと Response レーザの KS エントロピーの和とほぼ等しい。光注入強度 κ_{inj} を増加させると，KS エントロピーは増加し， $\kappa_{inj} = 10.6 \text{ ns}^{-1}$ で最大 ($h_{KS} = 3.43 \text{ ns}^{-1}$) となる。さらに κ_{inj} を増加させると KS エントロピーは減少し，コンシステンシーが達成されると ($\kappa_{inj} > 26.1 \text{ ns}^{-1}$ ，図 5.13 参照) ほぼ一定となる。コンシステンシー領域における KS エントロピーの値は 0.85 ns^{-1} である。この値は単体の Drive レーザの KS エントロピーに相当する。したがってコンシステンシー状態のレーザシステム全体の複雑性は結合前と比較して小さくなることが分かる。

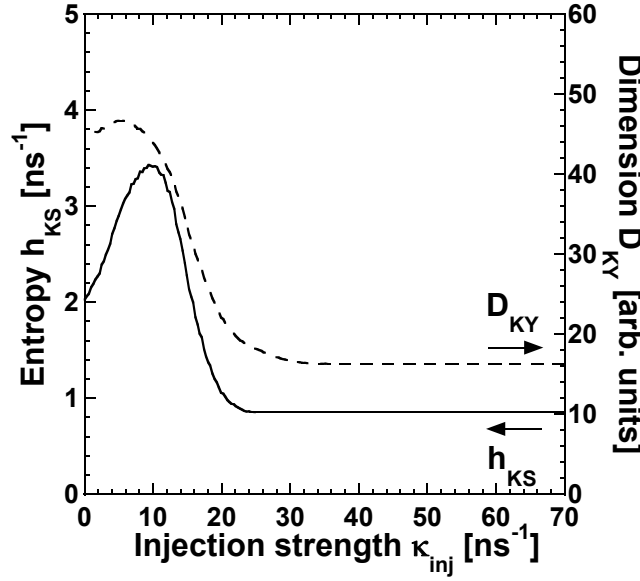


図 5.14: Drive レーザから Response レーザへの光注入強度 κ_{inj} を増加させた時の KS entropy h_{KS} (実線) および KY dimension D_{KY} (破線) を表している。

一方で KY 次元の変化は図 5.14 の破線に示されている。結合が無い時 ($\kappa_{inj} = 0$), レーザシステム全体の KY 次元の値は $D_{KY} = 44.1$ である。この値は KS エントロピーの場合と同様に単体の Drive レーザと Response レーザの KY 次元にほぼ等しい。しかしながら KS エントロピーの場合とは異なり, 光注入強度 κ_{inj} の増加に対して KY 次元は増加しない ($D_{KY} = 46.7$)。コンシステンシー領域では KY 次元は結合が無い時の値よりも小さくなり ($D_{KY} = 16.3$), KS エントロピーと同様に単体の Drive レーザの KY 次元と等しくなる。

これらの結果を解釈するために, レーザシステム全体と単体の Drive レーザおよび Response レーザのリアプノフスペクトラムの比較を行った。図 5.15(a) は光注入強度 κ_{inj} を増加させた時のレーザシステム全体のリアプノフスペクトラムの変化を示している。また比較のため, 図 5.15(b) および (c) に単体の Drive レーザおよび Response レーザのリアプノフスペクトラムの変化をそれぞれ示している。図 5.15(b) と (c) を重ねると図 5.15(a) と等しくなることが分かる。図 5.15(b) に見られるように Drive レーザのリアプノフ指数は常に一定である。これは光結合が Drive レーザから Response レーザへの一方向結合であり, Drive レーザのパラメータが変化しないためである。一方で Response レーザのリアプノフ指数はコンシステンシー状態となると ($\kappa_{inj} > 26.1 \text{ ns}^{-1}$) 全て負になることが図 5.15(c) から分かる。この現象は, Drive レーザと Response レーザの時間ダイナミクスが異なっていたとしても,

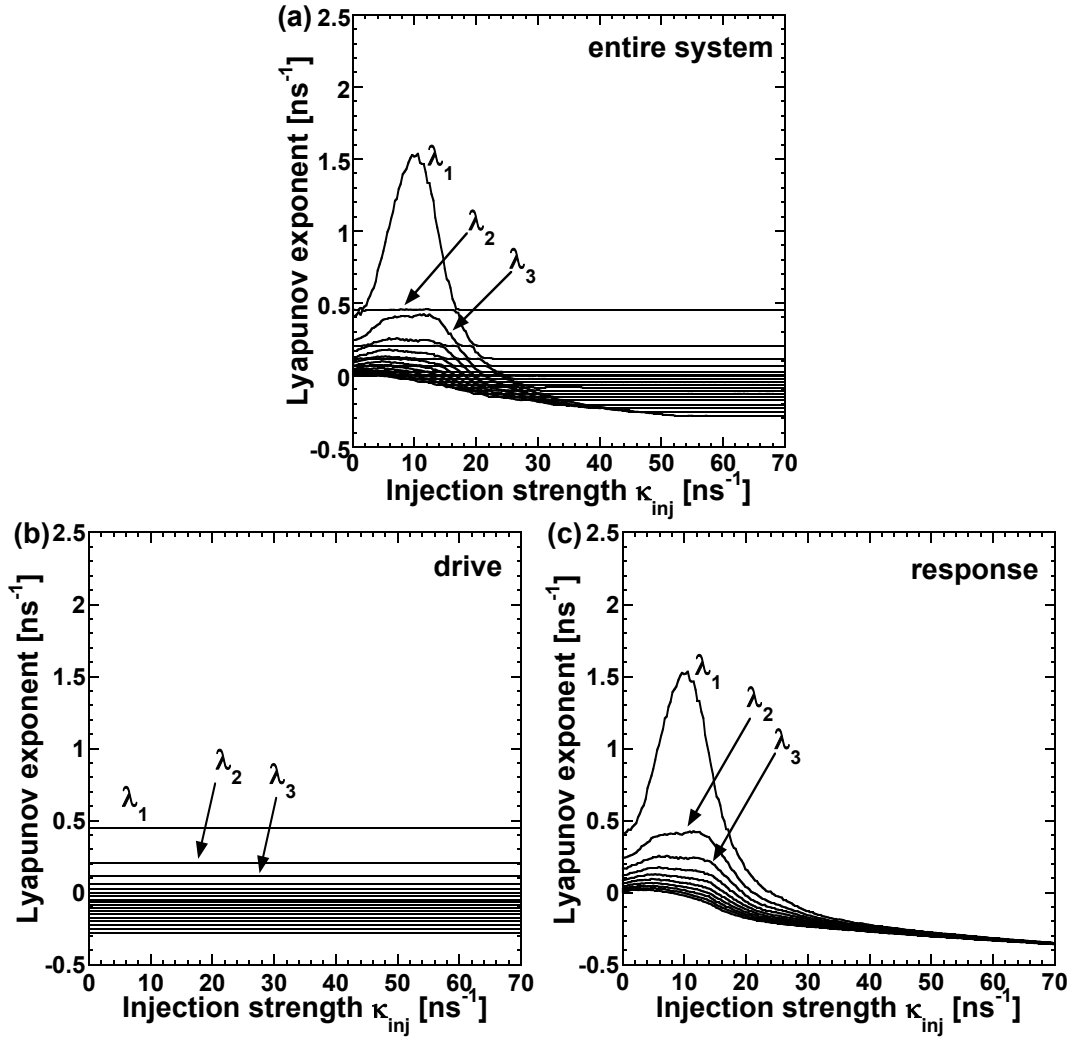


図 5.15: (a) Drive レーザから Response レーザへの光注入強度 κ_{inj} を増加させた時の 20 個のリアプノフ指数の変化を表している. (b), (c) それぞれ Drive レーザ, Response レーザの 20 個のリアプノフ指数の変化を表している.

Response レーザのダイナミクスが Drive レーザに支配されているため, 全体の複雑性が Drive レーザに支配されてしまうと解釈できる. それゆえにコンシステンシー状態の KS エントロピーと KY 次元は単体の Drive レーザの値と等しくなることが分かる.

5.3.4 リアプノフスペクトラム解析の数値計算結果 (光周波数差への複雑性の依存性)

次にレーザ間の光周波数差 Δf を変化させた時のコンシステンシーと複雑性の関係について調査した. 図 5.16(a) は Δf を変化させた時の Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{1,2}$ (実線), Drive-Response 1 間の相互相関関数 $C_{d,r}$ (破線), 光注入後の光周波数差 Δf_{inj} (点線) の変化をそれぞれ表している. この時の光注入強度は $\kappa_{inj} = 31.1 \text{ ns}^{-1}$ に固定されている. 図 5.16(a) の実線に見られるように, $-6.0 \text{ GHz} < \Delta f < 0.0 \text{ GHz}$ の範囲で $C_{1,2} \approx 1$ となっていることから, この Δf の範囲でコンシステンシーが達成されていることが分かる. またこの範囲において Δf_{inj} はほぼ 0 であり, インジェクションロッキングが達成されている. このような光周波数差 Δf はコンシステンシーの達成のために重要な役割を果たす. 特に $\Delta f < 0$ の領域でコンシステンシーが達成されており, コンシステンシーの達成領域は Δf について非対称となる. これは半導体レーザが比較的大きな線幅増幅係数 α を持つためである (本研究では $\alpha = 3$).

図 5.16(b) はリアプノフスペクトラムから算出された KS エントロピー (実線) および KY 次元 (破線) の変化を示している. KS エントロピーは $\Delta f \approx 9 \text{ GHz}$ の時に最大となる. 図 5.16(b) の破線から複雑性の領域は 3 つに分類することができる. 1 つ目の領域は KS エントロピーが最も小さくなる $-6.0 \text{ GHz} < \Delta f < 0.0 \text{ GHz}$ の領域であり, コンシステンシーが達成される領域である. この領域の KS エントロピーは単体の Drive レーザの値と等しい. 2 つ目の領域は初期光周波数差 Δf が比較的大きな場合であり ($\Delta f < -15.0 \text{ GHz}$ や $\Delta f > 10.0 \text{ GHz}$), この範囲において KS エントロピーは単体の Drive レーザと Response レーザの KS エントロピーの和に等しくなる. 3 つ目の領域は KS エントロピーが単体の Drive レーザと Response レーザの値の和を超える領域であり, コンシステンシー領域の外側の負の光周波数差 $\Delta f \approx -9.0 \text{ GHz}$ の周辺である. これらの特性は KS 次元についても観察できるが, KY 次元の場合, 負の光周波数差において次元の増加は KS エントロピーほど大きくはなかった.

図 5.16(c) は結合レーザシステム全体のリアプノフスペクトルの変化を示している. 最大リアプノフ指数 λ_1 は $-15.0 \text{ GHz} < \Delta f < -6.0 \text{ GHz}$ の範囲で増加するが, 他の領域ではほとんど一定である. 図 5.16(c) のリアプノフスペクトラムは単体の Drive レーザと Response レーザのリアプノフスペクトルの和に相当している. コンシステンシー状態の時 ($-6.0 \text{ GHz} < \Delta f < 0.0 \text{ GHz}$), Response レーザのリアプノフ指数に相当するリアプノフ指数は全て負になる.

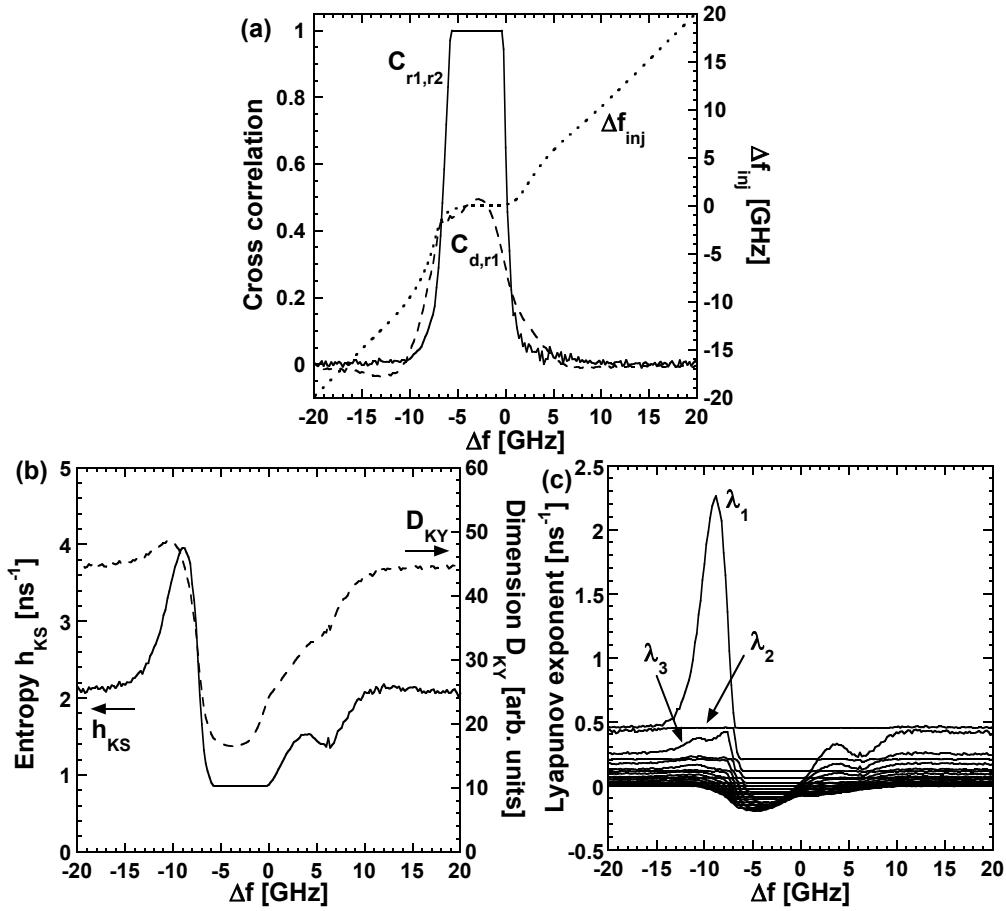


図 5.16: (a) 光周波数差 Δf を変化させた時の Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{1,2}$ (実線), Drive-Response 間の相互相関関数 $C_{d,r}$ (破線), 光注入後の光周波数差 Δf_{inj} (点線) の変化を表している. (b) KS エントロピー (実線) および KY 次元の変化を表している. (c) 20 個のリアプノフ指数の変化を表している.

5.3.5 2次元パラメータ空間におけるコンシステンシーと複雑性

次に光注入強度 κ_{inj} と光周波数差 Δf の二次元パラメータ空間においてコンシステンシーと複雑性の関係について調査する. 図 5.17(a) は κ_{inj} および Δf を変化させた時の Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{1,2}$ の変化を表している. 横軸は κ_{inj} , 縦軸は Δf をそれぞれ表し, コンシステンシー領域 ($C_{1,2} \approx 1$) は黒色領域で表されている. 図 5.17(a) からコンシステンシー領域は高い光注入強度と負の光周波数差の領域において得られることが分かる. 図 5.17(b) は (a) に相当する光注入後の光周波数差 Δf_{inj} の変化を表している. 図 5.17(b) において黒色領域は $\Delta f_{inj} < 0.1$ GHz

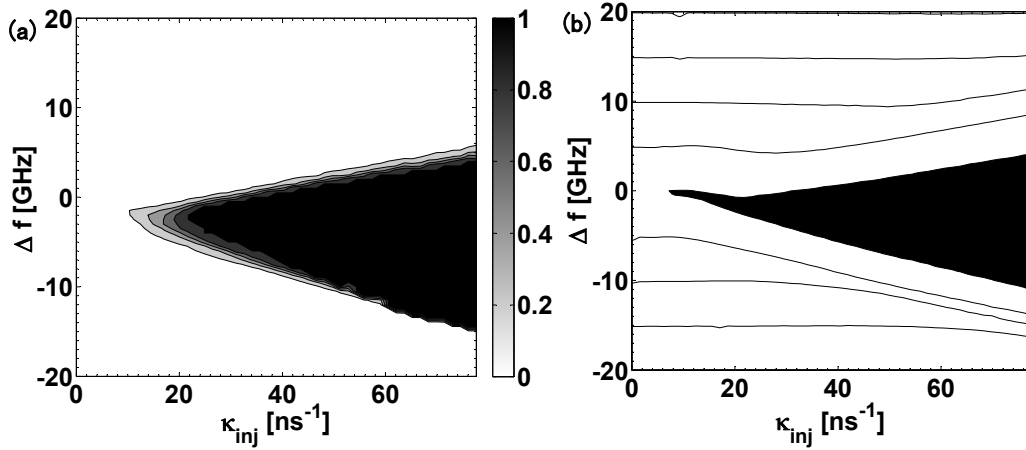


図 5.17: (a) 光注入強度 κ_{inj} (横軸) および光周波数差 Δf (縦軸) を変化させた時の Response 1-2 間の相互相関関数 $C_{1,2}$ の変化を表している．黒い領域は $C_{1,2}$ が大きく，コンシステンシーが達成されている．(b) 光注入後の光周波数差 Δf_{inj} の変化を表している． $|\Delta f_{inj}| < 0.1$ GHz の領域が黒色で表されている．

を表し，図 5.17(b) の黒色領域と (a) の黒色領域が概ね一致していることからコンシステンシー領域においてインジェクションロッキングが達成されていることが分かる．

図 5.18(a) は光注入強度 κ_{inj} および光周波数差 Δf を変化させた時の KS エントロピー h_{KS} の値をグレースケールで表している．黒色領域は大きな KS エントロピーが得られている範囲を表す．図 5.18(a) から KS エントロピーは 3 つの領域に分類できる．1 つ目は KS エントロピーが小さくなる領域であり (図 5.18(a) の白色領域)，コンシステンシー領域 (図 5.17(a) の黒色領域) に相当する．この時 KS エントロピーは単体の Drive レーザの KS エントロピーとほぼ等しくなっている ($h_{KS} = 0.86$ ns⁻¹)．2 つ目は Response レーザがコンシステンシーを示さないインジェクションロッキング領域の外側の領域である (図 5.18(a) の灰色領域)．この時 KS エントロピーは単体の Drive レーザと Response レーザの KS エントロピーの和とほぼ等しくなる ($h_{KS} = 2.03$ ns⁻¹)．3 つ目はコンシステンシー領域の境界付近の領域であり，KS エントロピーが増加する領域である (図 5.18(a) の黒色領域)．この時の KS エントロピーの最大値は $h_{KS} = 4.37$ ns⁻¹ であり，単体の Drive レーザと Response レーザの KS エントロピーの和 (2.03 ns⁻¹) の約 2 倍程度となる．この KS エントロピーの増加領域はインジェクションロッキング領域の境界付近に現れる．光周波数差 Δf に対する KS エントロピーの増加領域の非対称性は半導体レーザの線幅増幅係数によるものであると考えられる．

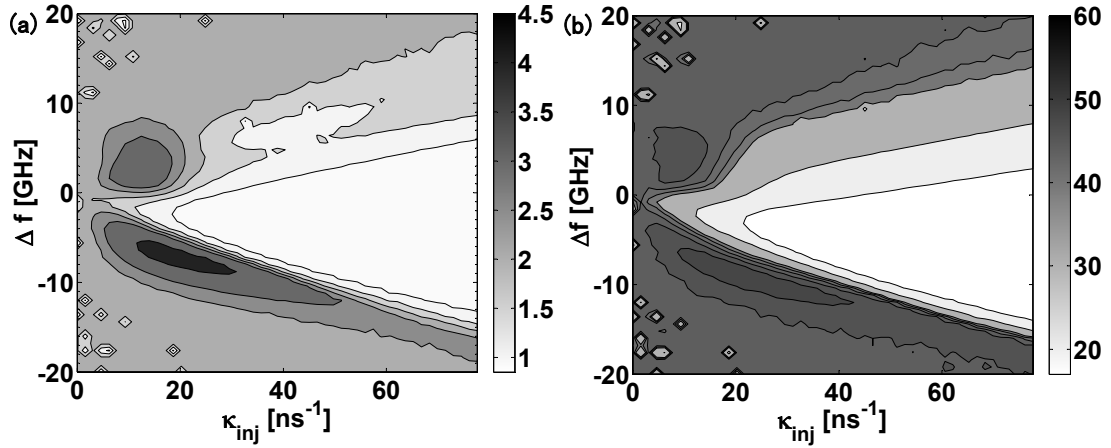


図 5.18: 光注入強度 κ_{inj} (横軸) および光周波数差 Δf (縦軸) を変化させた時の (a) KS エントロピー h_{KS} および (b) KY 次元 D_{KY} の変化を表している。

図 5.18(b) は光注入強度 κ_{inj} および光周波数差 Δf の 2 つのパラメータ空間における KY 次元 D_{KY} の変化を表している。図 5.18(b) の白色領域は図 5.17(a) のコンシステンシー領域とほぼ同じ範囲であり、KY 次元は小さな値となる。この時 KY 次元は単体の Drive レーザの KY 次元と等しくなる ($D_{KY} = 16.3$)。またコンシステンシー領域の外側 (図 5.18(b) の灰色領域) では KY 次元は $D_{KY} = 44.0$ となり、単体の Drive レーザと Response レーザの KY 次元の和と等しくなる。KY 次元の増加領域は存在するが、KS エントロピーと比較してほとんど増加しない (最大で $D_{KY} = 49.2$)。

図 5.18(a) において KS エントロピーが増加する要因を明らかにするために、戻り光を持たない光結合半導体レーザにおいて時間ダイナミクスの変化を調査した。Drive レーザおよび Response レーザはどちらも戻り光を持たないため ($\kappa_{d,r} = 0$)、単体では時間に対して一定の出力強度を示す。Drive レーザから出力された光を一方方向に Response レーザに光注入し、光注入強度 κ_{inj} と光周波数差 Δf を変化させた時の Response レーザの時間ダイナミクスの変化を調査した。図 5.19 は光注入強度 κ_{inj} および光周波数差 Δf の 2 つのパラメータ空間における Response レーザのダイナミクスの変化を表している。安定な一定の出力状態は”S”で表されており、この状態はインジェクションロッキング領域において観測される。1 周期振動”P1”はインジェクションロッキング領域の外側で観測される。1 周期振動の周波数は光周波数差 Δf とほぼ一致する。”P2”や”C”で表されている 2 周期やカオスはインジェクションロッキングの外側の境界付近で観測することができる。この 2 次元パラメータ空間における時間ダイナミクスの分岐現象は、戻り光を持たない一方方向に光結合

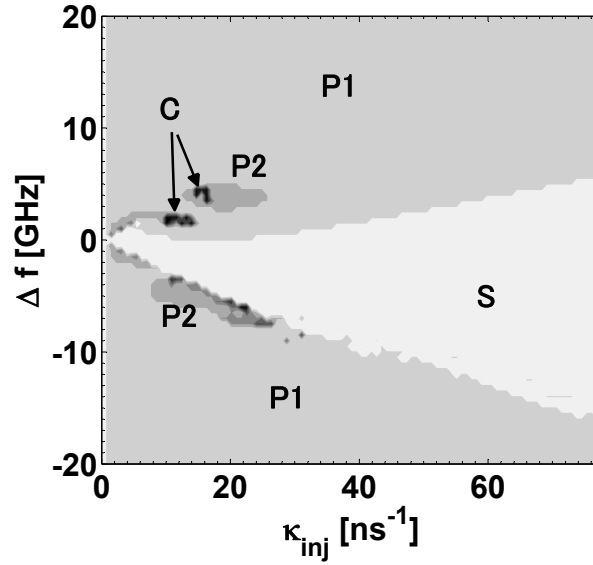


図 5.19: 戻り光を持たない一方向結合された半導体レーザにおける Response レーザのダイナミクスの変化を表している．横軸は光注入強度 κ_{inj} ，縦軸は光周波数差 Δf である．図において S は stable (安定状態，白色領域)，P1 は period-1 (1 周期，灰色領域)，P2 は period-2 (2 周期あるいは高周期，濃い灰色領域)，C は chaos (カオス，黒色領域) を表す．

された半導体レーザにおいてこれまでに報告されている．インジェクションロッキングの境界付近における分岐現象は，Drive レーザによる Response レーザの光周波数の引き込みが弱く生じているためであると考えられる．強いインジェクションロッキングは Response レーザの出力を一定の状態にしてしまうが，弱いインジェクションロッキングによる光周波数の引き込みの強さが時間的に変化することで，単体の半導体レーザでは生じないダイナミクスが発生する．その結果として図 5.19 における”C”の領域が生じると考えられる．図 5.19 の”C”の領域は図 5.18(a) で高い KS エントロピーが得られるパラメータ領域に良く似ている．したがって図 5.18(a) において KS エントロピーが増加する要因として光周波数の引き込みは重要な役割を果たしていると言える．このような一方向に結合されたシステムにおいて複雑性が増加する現象は 2 つの周波数 (つまり光キャリア振動と遅いカオス振動を示す包絡線成分) を有するレーザに特有の現象であり，結合されたレスラーモデルやマッキグラスモデルのような一般的な非線形ダイナミカルシステムにおいて観測されていない．

5.3.6 考察

一方向に光結合された半導体レーザの複雑性をリアプノフスペクトラム解析に基づき、KS エントロピーと KY 次元を用いて評価し、コンシステンシー状態との関係を調査した。光結合半導体レーザの複雑性はコンシステンシー状態に強く依存することが分かった。コンシステンシーが達成されている時、レーザシステム全体の複雑性は単体の Drive レーザとほぼ同じとなる。これに対してコンシステンシー状態でなければレーザシステム全体の複雑性は単体の Drive レーザと Response レーザの複雑性の和と等しくなる。しかしながらコンシステンシー領域の境界付近では複雑性は増加した。この複雑性の増加現象は光結合半導体レーザシステム特有の性質であり、他の非線形ダイナミカルシステムでは観測されていない [60]。複雑性の増加はインジェクションロッキング領域付近で生じる Drive レーザによる Response レーザの光周波数の弱い引き込みが要因であると考えられ、これは図 5.19 に示される結合による時間ダイナミクスの変化と同じ要因である。これに対して強い光注入により Response レーザの光周波数が Drive レーザの光周波数によりロッキングされコンシステンシー状態となると、システム全体の複雑性は単体の Drive レーザにより支配されてしまう。この複雑性増加現象は高速物理乱数生成における物理エントロピー生成源として半導体レーザを用いる際に有用である。加えて、これらの知見は半導体レーザを用いたリザーバコンピューティングや物理的一方向性関数への応用に有用である。

コンシステンシーの概念は一般化同期に関係づけられる。一般化同期は Drive レーザと Response レーザの関数関係として定義されるが、一方でコンシステンシーは繰り返し入力された複雑信号に対する非線形ダイナミカルシステムの再現性として定義される。しかしながら一般化同期は結合されたダイナミカルシステムについて考えられる現象であり、コンシステンシーは単体のシステムに適用可能な概念である。一般化同期は Response システムの全てのリアプノフ指数が負となる時に達成される。それゆえに一般化同期状態の下でシステム全体の複雑性は低くなると考えられる。この推測は複雑性とコンシステンシーに関する我々の数値計算結果と一致している。

半導体レーザの物理的一方向性関数への応用のためには高い複雑性とコンシステンシーの達成が必要となる。我々の結果から、コンシステンシーが達成されると複雑性は低下し、単体の Drive レーザの複雑性とほぼ等しくなることが分かった。それゆえに物理的一方向性関数の実装のために、Response レーザではなくの Drive レーザの複雑性を増加させることが重要である。

また戻り光を有する結合半導体レーザはリザーバコンピューティングへの応用が

期待されている．結合半導体レーザの複雑性や次元はリザーバコンピューティングにおける情報処理能力の評価につながるため重要である．本研究で用いる複雑性や次元の評価方法はリザーバコンピューティングの応用のために必要となる．

5.4 まとめ

本章では一方向に結合されたダイナミカルシステムにおいてコンシステンシーの有無とリアプノフスペクトラム解析により定量化された複雑性の関係性について調査した．まず一般的な非線形ダイナミカルシステムであるレスラーモデルと時間遅延ダイナミカルシステムであるマッキングラスモデルにおいて調査を行った．これらの2つのシステムにおいて，1つの Drive システムから出力された信号を2つの Response システムに一方向に入力することを行い，2つの Response システムの出力の相関関係からコンシステンシーの有無を調査した．どちらのシステムにおいても Drive-Response 間の結合強度を増加させることによりコンシステンシーが達成された．この時の結合システムの複雑性をリアプノフスペクトラム解析により定量化されたエントロピーと次元により評価すると，コンシステンシー状態である時に複雑性が低下し，Drive システム単体の複雑性とほぼ一致することが分かった．

また本章において一方向に光結合された戻り光を有する半導体レーザにおける応答のコンシステンシーを調査し，リアプノフスペクトラム解析により光結合レーザシステムの複雑性を評価した．その結果，レーザシステム全体の複雑性がコンシステンシー状態に依存して3つの領域に分類されることが分かった．コンシステンシー状態である時，システム全体 (Drive と Response) の複雑性は単体の Drive システムの複雑性と等しくなる．コンシステンシー状態でない時，レーザシステム全体の複雑性は Drive と Response システムの複雑性の和と等しくなる．しかしながらコンシステンシー領域の境界付近ではシステム全体の複雑性が増加することが分かった．この現象は光結合により弱いインジェクションロッキングが生じるためであると考えられる．このようにコンシステンシー状態により複雑性が大きく変化することが分かった．この結果は物理的一方向性関数やリザーバコンピューティングへの結合半導体レーザの応用において複雑性の評価のために有用であると考えられる．

第6章 時間遅延システムにおける有限時間リアプノフ指数の算出手法の提案

非線形ダイナミカルシステムの状態空間におけるアトラクタ上の局所的な安定性を調査するための方法の一つとして、有限時間リアプノフ指数が提案されている [31, 32, 35]. 有限時間リアプノフ指数は、状態空間の基準軌道に与えられた無限小の揺らぎの有限時間における指数関数的な拡大率を表す. 有限時間リアプノフ指数は局所的リアプノフ指数としても知られている [33, 93]. また類似した量として、有限サイズリアプノフ指数が提案されている [94]. 一般的に用いられているリアプノフ指数はカオスアトラクタを覆うために時間的あるいは空間的に平均化される. しかしながらリアプノフ指数の収束は一般的にかなり遅いことが分かっている [95]. そのような場合、システムの状態空間においてカオスや周期状態が共存していることがある. このような局所的な構造を定量化するために一般的なリアプノフ指数は適しておらず、有限時間リアプノフ指数を用いることでアトラクタの構造をより詳しく調べることができる. この有限時間リアプノフ指数を用いた解析はカオスの分類 [34, 96] やカオス制御 [25], 物理乱数生成 [5] に応用することができる. 特に戻り光を有する半導体レーザを用いた高速物理乱数生成において、状態空間の位置に依存して不安定性が異なる時、不安定性が最も低くなる状態空間においてランダム性の低い乱数が生成されてしまう可能性がある. それゆえに有限時間リアプノフ指数の確率分布が平均のリアプノフ指数よりも重要となる.

しかしながら時間遅延ダイナミカルシステムにおける有限時間リアプノフ指数の算出例はこれまでにほとんど報告されていない. 文献 [97, 98] では完全同期を用いることで時間遅延ダイナミカルシステムにおいて有限時間リアプノフ指数の算出を行っている. しかしながら戻り光を有する半導体レーザは完全同期の実験的な達成が困難であるため適用できない. また微小揺らぎの時間発展を直接に調査しているわけではないため、その精度には限界がある. 数値モデルの線形化方程式を用いることで、より正確な有限時間リアプノフ指数を算出することが可能であると考えら

れる．しかしながらこれまでに時間遅延ダイナミカルシステムにおいて線形化方程式を用いた有限時間リアプノフ指数の算出方法は提案されていない．

そこで本章では時間遅延ダイナミカルシステムにおける有限時間リアプノフ指数の算出方法を提案し，戻り光を有する半導体レーザーモデルに対して本手法を適用する．

6.1 時間遅延ダイナミカルシステムにおける有限時間リアプノフ指数の算出手法

n 次元状態変数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\dagger$ (\dagger は転置を表す) を持つ時間遅延ダイナミカルシステムを以下のように表す．

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)), \text{ for } j = 1, 2, \dots, n \quad (6.1)$$

ここで $\mathbf{x}(t - \tau)$ は時間遅延変数， τ は遅延時間を表す．時間遅延を有するダイナミカルシステムの状態空間は遅延時間 τ 内の全ての状態変数により構成される．しかしながら状態が連続であるため，状態空間は理論的に無限次元である．そこで微小時間 $h = \tau/M$ を用いて離散化することにより， $M + 1$ 個の状態変数 $\mathbf{x}(t)$ からなるシステムとしてその状態を近似する [36]．この時， $M + 1$ 個の $\mathbf{x}(t)$ からなる新しい状態変数 $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{x}^\dagger(t), \mathbf{x}^\dagger(t - h), \mathbf{x}^\dagger(t - 2h), \dots, \mathbf{x}^\dagger(t - Mh))^\dagger$ を考える． $\mathbf{y}(t)$ から $\mathbf{y}(t + h)$ への写像は新しい状態変数 $\mathbf{x}(t + h)$ の生成と他の状態変数 $(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - h), \mathbf{x}(t - 2h), \dots, \mathbf{x}(t - Mh))$ のシフト操作を意味する．

$$\mathbf{y}(t + h) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(t)) \quad (6.2)$$

このような写像を考えることにより，有限時間リアプノフ指数の算出が可能となる．過去の文献では，時間遅延ダイナミカルシステムの時間単位を遅延時間として考えているために，有限時間リアプノフ指数の算出を困難にしていた [36]．しかしながら $\mathbf{y}(t)$ から $\mathbf{y}(t + h)$ への写像を考えることにより， h 間隔における有限時間リアプノフ指数を算出することができる．

リアプノフ指数を算出するために，基準軌道 $\bar{\mathbf{x}}$ に与えられた無限小の揺らぎ $\delta\mathbf{x} = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n)$ を考える．モデル方程式 (6.1) を線形化することにより， $\delta\mathbf{x}$ の発展方程式は以下のように表される．

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{J}_t \delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}_{t-\tau} \delta\mathbf{x}(t - \tau) \quad (6.3)$$

式 (6.3) において行列 \mathbf{J}_t の i - j 要素は $\partial f_i / \partial x_j(t)$ であり, $\mathbf{J}_{t-\tau}$ の i - j 要素は $\partial f_i / \partial x_j(t-\tau)$ である. また右辺の第 2 項は時間遅延を表す. 遅延時間 τ を微小時間 h により離散化することにより, $M+1$ 個の $\delta \mathbf{x}$ からなる新しい状態変数 $\delta \mathbf{y}(t) = (\delta \mathbf{x}^\dagger(t), \delta \mathbf{x}^\dagger(t-h), \delta \mathbf{x}^\dagger(t-2h), \dots, \delta \mathbf{x}^\dagger(t-Mh))^\dagger$ を考える. $\delta \mathbf{y}$ の時間発展は式 (6.2) を線形化することにより得られる以下の方程式で表される.

$$\delta \mathbf{y}(t+h) = D\mathbf{F}(\mathbf{y}(t))\delta \mathbf{y}(t) \quad (6.4)$$

ここで $D\mathbf{F}$ は \mathbf{F} の $N(M+1) \times N(M+1)$ ヤコビ行列である. 式 (6.3) は時間遅延項を持つため, ヤコビ行列を導出することができないが, 式 (6.2) の写像を考えることで, ヤコビ行列 $D\mathbf{F}$ を考えることができる. リアプノフ指数を算出するために, 初期変位 $\delta \mathbf{y}(0)$ を $\delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\delta \mathbf{y}(0)$ に写像する行列 $\mathbf{Y}(t)$ を考える. ここで $\mathbf{Y}(t)$ は $D\mathbf{F}$ の行列積に相当する ($\mathbf{Y}(t) = D\mathbf{F}(\mathbf{y}(t-h))D\mathbf{F}(\mathbf{y}(t-2h)) \cdots D\mathbf{F}(\mathbf{y}(0))$). この時, 平均のリアプノフ指数は行列 $\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{Y}^\dagger(t)\mathbf{Y}(t)]^{1/(2t)}$ の固有値の対数として得ることができる [30, 37, 38, 40]. 一方で本研究では平均のリアプノフ指数ではなく有限時間リアプノフ指数を算出したい. 有限時間リアプノフ指数は有限時間 L を用いると, $[\mathbf{Y}^\dagger(L)\mathbf{Y}(L)]^{1/(2L)}$ の固有値の対数として得ることができる. ヤコビ行列 $D\mathbf{F}$ はオイラー法などを用いて式 (6.3) を離散化することにより得ることができるが, 数値誤差が大きくなるため, 式 (6.1) と (6.3) を数値積分することにより $D\mathbf{F}$ を求める必要がある. また実際の数値計算では計算過程において QR 分解などを用いて直交化と規格化を行う必要がある [30, 37, 38].

行列 \mathbf{Y} を用いることで $N(M+1)$ 個のリアプノフ指数を算出することができるが, 本章では最大の有限時間リアプノフ指数のみの算出を行う. この場合, 1 組の初期状態 $\mathbf{y}(0)$ および $\delta \mathbf{y}(0)$ について式 (6.1) と (6.3) を数値積分することで, $\delta \mathbf{y}(t)$ の発展を調べ, $\delta \mathbf{y}(t)$ のノルム $d(t)$ を計算する.

$$d(t) = \|\delta \mathbf{y}(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^M |\delta x_j(t-ih)|^2} \quad (6.5)$$

有限時間 $L = kh$ (k は整数, h は数値計算の刻み時間幅) についての有限時間リアプノフ指数は次のように定義することができる.

$$\lambda_f(L) = \frac{1}{L} \ln \frac{d(t+L)}{d(t)} = \frac{1}{kh} \sum_{j=1}^k \ln \frac{d(t+jh)}{d(t+(j-1)h)} \quad (6.6)$$

数値計算において $\delta \mathbf{x}(t)$ を計算ごとに規格化する必要があることに注意する. 2 個以上の有限時間リアプノフ指数を計算する場合, 計算したい有限時間リアプノフ指数の数だけ $\delta \mathbf{y}(0)$ を用意し, 式 (6.3) を用いて数値積分を行い, QR 分解などを用いて直交化と規格化を行う.

6.2 マッキーグラスモデルの有限時間リアプノフ指数

良く知られた一般的な時間遅延ダイナミカルシステムとしてマッキーグラス (Mackey-Glass) モデルが挙げられる [36, 91]. これは白血球細胞の生成をモデル化するために提案されたモデルであり, 非線形な時間遅延項を持つシステムである. マッキーグラスモデルは時間遅延を持つ比較的簡単なシステムであるため, 時間遅延ダイナミカルシステムの研究に良く用いられる [67, 99–101]. そこで本節において有限時間リアプノフ指数の算出例としてマッキーグラスモデルを用いる.

6.2.1 マッキーグラスモデル

マッキーグラスモデルは次のように記述される時間遅延ダイナミカルシステムである [36, 91].

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{ax(t-\tau)}{1+x^b(t-\tau)} - cx(t) \quad (6.7)$$

式 (6.7) の右辺の第 1 項は時間遅延の項であり, $x(t-\tau)$ は遅延時間 τ だけ遅れた変数を表す. a, b, c は固定パラメータであり, 本研究ではそれぞれ $a = 2, b = 10, c = 1$ とする. また数値計算において式 (6.7) を解くために 4 次の Runge-Kutta 法を使用し, 数値計算の時間刻み幅は $h = 0.02$ とする.

6.2.2 マッキーグラスモデルの有限時間リアプノフ指数の算出結果

マッキーグラスモデルの有限時間リアプノフ指数の算出結果を示す. 図 6.1(a) および (b) はそれぞれマッキーグラスモデルの $x(t)$ の時系列およびアトラクタ上の有限時間リアプノフ指数の値を色で表した図である. アトラクタは縦軸を $x(t)$, 横軸を時間遅延変数 $x(t-\tau)$ とした状態空間上の軌道を示している. 有限時間リアプノフ指数を算出するために使用した有限時間は $L = h = 0.02$ である. またこの時の平均の最大リアプノフ指数は $\lambda_{max} = 0.058$ であり, $\lambda_{max} > 0$ であることからダイナミクスはカオスとなっている. 図 6.1 において色が濃い領域は有限時間リアプノフ指数が高いことを表す. 図 6.1(a) において時間的に色の濃さが変化していることから, 有限時間リアプノフ指数が時間的に異なることが分かる. また図 6.1(b) において $x(t-\tau) \approx 1$ の付近に特に色が濃い領域が多く現れていることが分かる. 以上から有限時間リアプノフ指数の値は時間的, 空間的に異なる値を持つ. これは状態空間の位置に依存して不安定性が異なることを表す. また特に図 6.1(b) から有限時

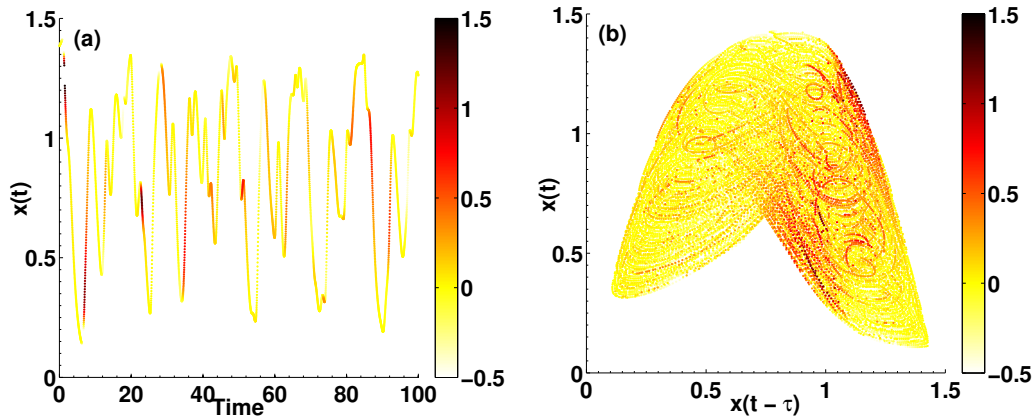


図 6.1: マッキーグラスモデルの (a) 時系列および (b) アトラクタ. アトラクタは縦軸が $x(t)$, 横軸が $x(t - \tau)$ の状態空間上の軌道が示されている. またそれぞれの図において有限時間リアプノフ指数の値が色で表されている. 濃い色は有限時間リアプノフ指数が高いことを表す. この時の遅延時間は $\tau = 5$ であり, 有限時間リアプノフ指数の算出のために用いられる有限時間は $L = 0.02$ である. 一方で平均の最大リアプノフ指数は $\lambda_{max} = 0.058$ であり, ダイナミクスがカオスである.

間リアプノフ指数が高い値が現れる状態空間の位置が偏ることから, 有限時間リアプノフ指数がアトラクタの構造 (安定多様体や不安定多様体) の特徴を表していると考えられる.

次に図 6.2 に有限時間リアプノフ指数の確率分布を示す. 図 6.2(a) は図 6.1 と同じ有限時間 $L = 0.02$ を用いて計算された有限時間リアプノフ指数の確率分布である. 有限時間リアプノフ指数の分布範囲は $-1.5 < \lambda_f < 1.5$ 程度であり, 平均の最大リアプノフ指数 $\lambda_{max} = 0.058$ と比べて非常に大きな値が得られていると共に, 負の有限時間リアプノフ指数も得られていることが分かる. このように平均の最大リアプノフ指数が正であっても有限時間リアプノフ指数が負, つまり安定な軌道が存在することが分かる. さらに有限時間 L を増加させた時の有限時間リアプノフ指数の確率分布の変化が図 6.2(b) に示されている. 図 6.2(a) と (b) において横軸の範囲が異なることに注意する. 図 6.2(b) では $L = 1, 5 (= \tau), 100 (> \tau)$ の時の有限時間リアプノフ指数の確率分布が示されている. 有限時間 L を増加させることで確率分布の幅が狭くなることが分かる. また $L = 1 (< \tau)$ の場合, 確率分布の頂点は 0 付近に存在していたのに対し, $L = 5, 100$ と L を増加させると確率分布の頂点が移動していることが分かる. この時の頂点の値は 0.058 であり平均の最大リアプノフ指数の値と等しい. 有限時間リアプノフ指数の算出において大きな有限時間 L を用いることは軌道上の安定性を長い時間で平均化することを意味する. 有限時間

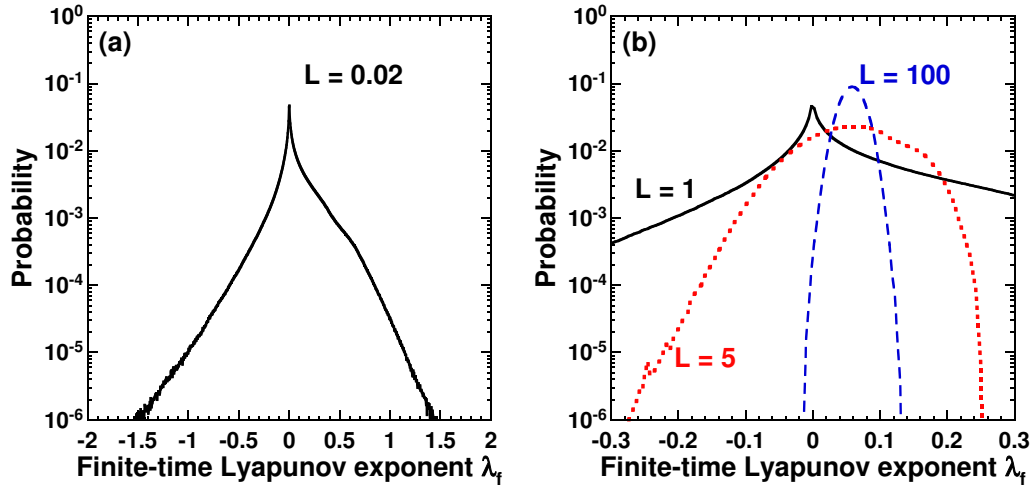


図 6.2: マッキーグラスモデルの有限時間リアプノフ指数の確率分布. (a) は有限時間 $L = 0.02$ の場合を表している. また (b) は有限時間 L を変化させた時の確率分布の変化を表しており, $L = 1, 5 (= \tau), 100$ の場合が示されている. (a) は図 6.1 と同じ L が用いられている. この時の遅延時間は $\tau = 5$ である. 平均の最大リアプノフ指数は $\lambda_{max} = 0.058$ である.

L が小さい場合 (図 6.2(a)), 有限時間リアプノフ指数の確率分布は 0 付近が最も多く, そのため有限時間 L を増加させると平均化により確率分布の幅が狭くなる. 特に図 6.2(b) の有限時間 $L = 100$ の場合は図 6.1(a) の時系列の時間 0 から 100 までの範囲の有限時間リアプノフ指数を平均化したことに相当する. しかしそれでも有限時間リアプノフ指数の分布範囲は -0.01 から 0.13 程度であり, 最大リアプノフ指数 $\lambda_{max} = 0.058$ の 2 倍以上の大きさの有限時間リアプノフ指数が得られている.

有限時間 L の変化に対する有限時間リアプノフ指数の確率分布の変化を詳細に調査するために, 有限時間リアプノフ指数の標準偏差の調査を行った. 図 6.3 は有限時間 L の変化に対する有限時間リアプノフ指数の標準偏差の変化を表した図である. 縦軸と横軸をどちらも対数で表示していることに注意する. また図 6.3 において遅延時間 $\tau = 5, 10, 20$ の場合について示されている. いずれの遅延時間の場合においても有限時間リアプノフ指数の標準偏差は有限時間 L の増加に対して減少することが分かる. 特に図 6.3 のように両対数プロットにおいてほぼ線形に減少しているように見えることから, 有限時間リアプノフ指数の標準偏差は有限時間 L の増加に対してべき乗則を持つと考えられる. ここで図 6.3 の 3 つの遅延時間の場合に対して最小二乗法により標準偏差にべき乗近似 cL^{-p} (ここで c は定数, p はべき指数) を行くと, $\tau = 5, 10, 20$ のそれぞれに対して $p = 0.48, 0.50, 0.51$ が得られる. 時間遅延

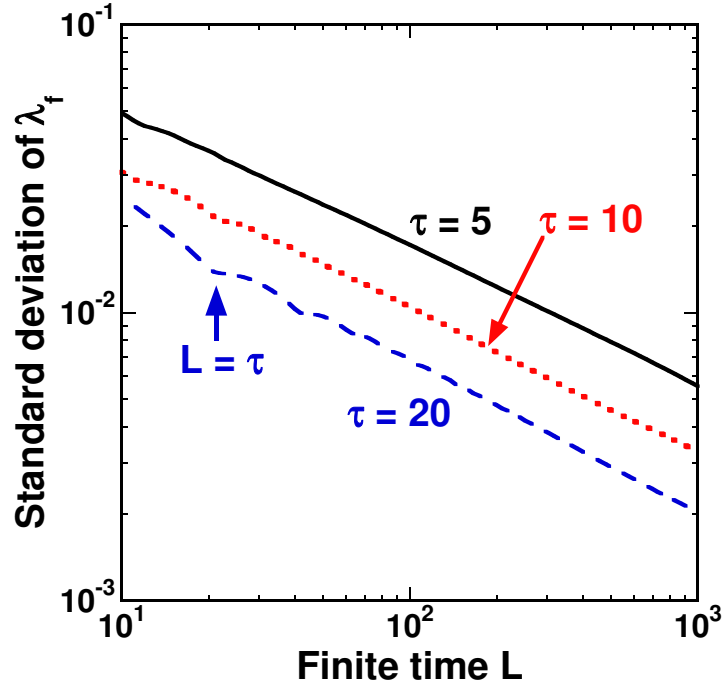


図 6.3: 有限時間 L を変化させた時の有限時間リアプノフ指数の標準偏差の変化．縦軸と横軸はどちらも対数表示されている．遅延時間 $\tau = 5, 10, 20$ の3つの場合について示されている．図に示されている有限時間 L の全ての範囲において最小二乗法により標準偏差にべき乗近似 cL^{-p} を行くと，それぞれの遅延時間 $\tau = 5, 10, 20$ に対してべき指数 $p = 0.48, 0.50, 0.51$ が得られる．

変数を持たないシステムの場合，有限時間リアプノフ指数の標準偏差のべき乗近似により得られる指数は $0.5 < p < 1.0$ であり [31]，時間遅延システムにおいても同様の結果が得られることが分かった．しかし時間遅延システムの場合，図 6.3 で観察されるように $L = \tau$ の時に標準偏差の変化に歪みが存在する．この歪みは図 6.2(b) の $L = 1$ から $L = 5 (= \tau)$ のように，有限時間 L を増加させた時に確率分布の頂点が 0 から $\lambda_{max} = 0.058$ の位置に変化するために生じる．有限時間 L を遅延時間 τ よりも小さな値から大きな値に変化させることで確率分布の形状が変化し，これが図 6.3 の $L = \tau$ における歪みとして現れる．

時間遅延ダイナミカルシステムにおいて，遅延時間 τ に対するダイナミクスの依存性は重要である．マッキーグラスモデルの平均の最大リアプノフ指数 λ_{max} は一般的に $1/\tau$ のオーダーとなる [36, 102]．これに対して本節では遅延時間 τ に対する有限時間リアプノフ指数の確率分布および標準偏差の変化を調査する．図 6.4 は遅延時間 τ を変化させた時の有限時間リアプノフ指数の確率分布の変化を示している．

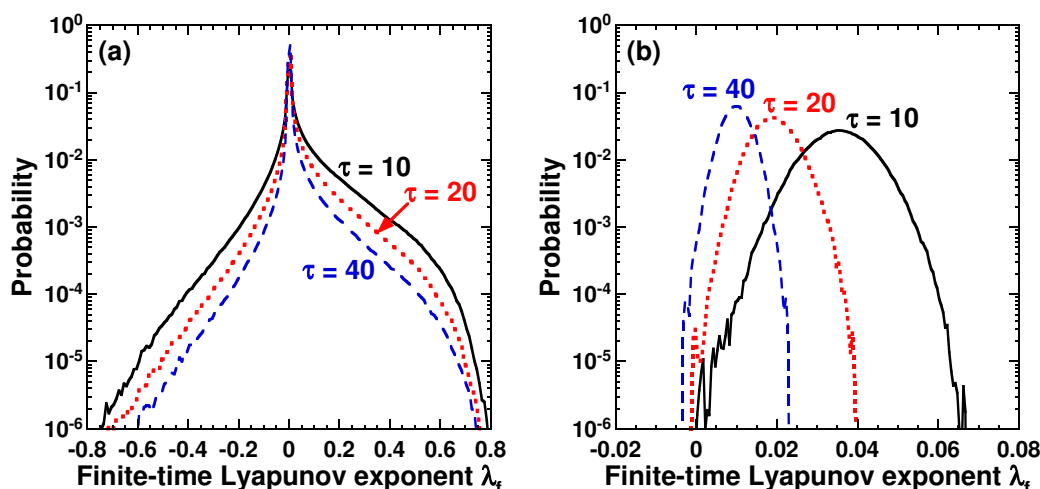


図 6.4: 遅延時間 τ を変化させた時の有限時間リアプノフ指数の確率分布の変化を表している. (a), (b) はそれぞれ有限時間が $L = 1, 200$ の場合が示されている. またそれぞれの図において 3 つの遅延時間 $\tau = 10, 20, 40$ の時の確率分布が示されている. それぞれの遅延時間 $\tau = 10, 20, 40$ の時の平均の最大リアプノフ指数 λ_{max} は $0.036, 0.019, 0.010$ である.

図 6.4(a), (b) において有限時間 L はそれぞれ $L = 1, 200$ である. これらの 2 つの図の横軸のスケールが異なることに注意する. 図 6.4(a) のように有限時間 L が小さい場合 ($L = 1 < \tau$), 有限時間リアプノフ指数の確率分布は 0 付近に頂点を持ち, 広い分布範囲となる. 一方で遅延時間 τ を $\tau = 10, 20, 40$ と増加させると, 確率分布の頂点の位置は変化しないが, 頂点付近以外の有限時間リアプノフ指数の分布が減少している. また頂点付近の確率分布は増加する. これに対して図 6.4(b) のように有限時間 L が大きな場合 ($L = 200 > \tau$) の場合, $L = 1$ の場合とは異なり確率分布のピークは最大リアプノフ指数に位置し, 有限時間リアプノフ指数は狭い範囲に分布する. 遅延時間 τ を増加させるとピーク位置の分布が増加し分布の幅は減少している. この変化は $L = 1$ の場合と同様であるが, $L = 200$ の場合にはピーク位置が移動する点異なる. $L = 200$ における確率分布のピーク位置は平均のリアプノフ指数の値とほぼ一致している.

図 6.5 は遅延時間 τ に対する有限時間の標準偏差の変化を表しており, 図の縦軸, 横軸は共に対数で表示されている. 図 6.5 の $L = 1$ の場合, 両対数プロットにおいてほぼ直線で有限時間リアプノフ指数の標準偏差が減少していることから, 遅延時間 τ に対してべき乗則が存在していると考えられる. ここで $L = 1$ の時の有限時間リアプノフ指数の標準偏差に対して最小二乗法により遅延時間 τ のべき乗近似 $c\tau^{-q}$

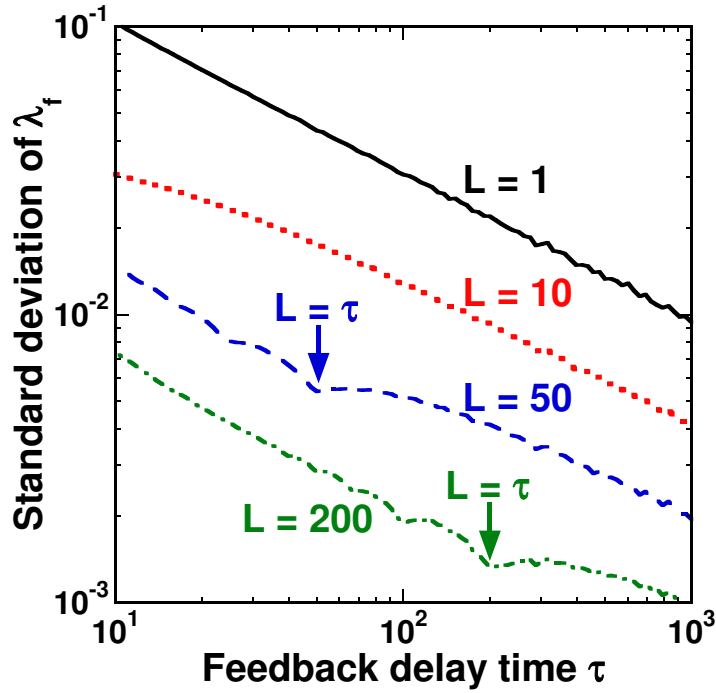


図 6.5: 遅延時間 τ を変化させたときの有限時間リアプノフ指数の標準偏差の変化. 4つの有限時間 $L = 1, 10, 50, 200$ の場合について示されている. $L = 1$ の場合について最小二乗法により図に示されている遅延時間の範囲でべき乗近似 $c\tau^{-q}$ を行うと, べき指数 $q = 0.51$ が得られる. $L = 10$ に対して $100 \leq \tau \leq 1000$ の範囲でべき乗近似を行うと $q = 0.50$ が得られる. $L = 50$ の場合, $10 \leq \tau \leq 50$ および $200 \leq \tau \leq 1000$ の2つの範囲に対してべき乗近似を行うと, それぞれ $q = 0.59, 0.46$ が得られる. $L = 200$ の場合, $200 \leq \tau \leq 1000$ の範囲でべき乗近似を行うと $q = 0.54$ が得られる.

(c は定数, q はべき指数) を行うと, $q = 0.51$ が得られる. 一方で他の有限時間 L の場合については図 6.5 で示されている遅延時間 τ の全ての範囲において直線とはならない. これは図 6.3 で述べたように遅延時間 τ と有限時間 L の大小関係により有限時間リアプノフ指数の確率分布の形状が変化するためである. しかしながら図 6.5 において $\tau \approx L$ 付近を除くと有限時間リアプノフ指数の標準偏差の変化はほぼ直線となっている. $L = 10$ の場合, $100 \leq \tau \leq 1000$ の範囲では標準偏差の変化がほぼ直線であり, べき乗近似を行うとべき指数 $q = 0.50$ が得られる. また $L = 50$ の場合, $10 \leq \tau \leq 50$ および $200 \leq \tau \leq 1000$ の2つの範囲に対してべき乗近似を行うと, それぞれに対してべき指数 $q = 0.59$ と 0.46 が得られる. 最後に $L = 200$ の場合, $10 \leq \tau \leq 200$ の範囲に対してべき乗近似を行うとべき指数 $q = 0.54$ が得られ

る．以上に示したように有限時間リアプノフ指数の標準偏差は遅延時間に対してもべき乗則を有することが本研究により初めて明らかとなった．さらにべき乗則 τ^{-q} のべき指数は $q \sim 0.5$ であることが分かった．また遅延時間と有限時間の大小関係により有限時間リアプノフ指数の確率分布の形状が変化するが，図 6.5 の $L = 50$ の場合において遅延時間 τ が大きな場合と小さな場合のどちらにおいても標準偏差は遅延時間 τ の増加と共にほぼ直線で減少するため，どちらの形状においても標準偏差はべき乗則を有することが明らかとなった．

6.3 戻り光を有する半導体レーザの有限時間リアプノフ指数

前節では時間遅延ダイナミカルシステムの有限時間リアプノフ指数の算出例としてマッキングラスモデルを用いた．本節では戻り光を有する半導体レーザにおいて同様の解析を行う．

6.3.1 戻り光を有する半導体レーザモデル

本節で用いる戻り光を有する半導体レーザの数値モデルを示す．本節では第 3 章で導出した無次元化され，複素電界を実部と虚部に分離した Lang-Kobayashi 方程式 (3.91)–(3.93) を用いる．以下に Lang-Kobayashi 方程式 (3.91)–(3.93) を再度示す．

$$\begin{aligned} \frac{de_{re}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} - \gamma_e \right] (e_{re}(t) - \alpha e_{im}(t)) \\ & + \kappa_e [e_{re}(t - \tau') \cos(\omega\tau) + e_{im}(t - \tau') \sin(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} - \gamma_e \right] (\alpha e_{re}(t) + e_{im}(t)) \\ & + \kappa_e [-e_{re}(t - \tau') \sin(\omega\tau) + e_{im}(t - \tau') \cos(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} = & \gamma_n \left(n_{th} \frac{J}{J_{th}} - n(t) \right) \\ & - \frac{g_n(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} (e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Symbols	Parameter	Value
G_N	Gain coefficient	$8.40 \times 10^{-13} m^3 s^{-1}$
N_0	Carrier density at transparency	$1.40 \times 10^{24} m^{-3}$
τ_p	Photon lifetime	$1.927 \times 10^{-12} s$
τ_s	Carrier lifetime	$2.04 \times 10^{-9} s$
τ_{in}	Roundtrip time in internal cavity	$8.0 \times 10^{-12} s$
r_2	Reflectivity of laser facet	0.556
r_3	Reflectivity of laser facet	0.04
J/J_{th}	Normalized injection current	1.36
L	External cavity length	0.3 m
α	Linewidth enhancement factor	3.0
λ	Optical wavelength	$1.537 \times 10^{-6} m$
c	Speed of light	$2.998 \times 10^8 ms^{-1}$
τ	Roundtrip time in external cavity (feedback delay time)	$2.001 \times 10^{-9} s$
N_{th}	Carrier density at threshold	$2.018 \times 10^{24} m^{-3}$
J_{th}	Injection current at threshold	$9.892 \times 10^{32} m^{-3} s^{-1}$
ω	Optical angular frequency	$1.215 \times 10^{15} s^{-1}$
ϵ	Gain saturation coefficient	2.0×10^{-23}

表 6.1: 本節の数値計算で使用するレーザパラメータ

e_{re} , e_{im} , n は無次元化定数 \bar{A} , \bar{N} により無次元化された無次元量であり, 電界実部 E_{re} , 電界虚部 E_{im} およびキャリア密度 N と $E_{re} = \bar{A}e_{re}$, $E_{im} = \bar{A}e_{im}$, $N = \bar{N}n$ という関係を持つ. 無次元化定数は第3章の式 (3.80) のように, 戻り光を持たない半導体レーザの定常解を用いて定義されている. 方程式中の定数 g_e , g_n , γ_e , γ_n , n_0 , n_{th} は第3章の式 (3.76) として定義されている. また式 (6.8) および (6.9) の右辺第2項の κ_e は時間 $t' = 10^{-9}$ で規格化された戻り光強度を表し, 次のように定義される.

$$\kappa_e = t' \kappa = \frac{1}{\tau_{in}} \frac{(1 - r_2^2) r_3}{r_2} \quad (6.11)$$

戻り光強度 κ は外部鏡反射率 r_3 を変えることにより変化させる. 本章で用いるレーザパラメータを表 6.1 に示す. また半導体レーザの出力強度 I は電界実部 e_{re} と電界虚部 e_{im} から $I = e_{re}^2 + e_{im}^2$ として計算される.

6.3.2 Lang-Kobayashi 方程式の線形化

戻り光を有する半導体レーザに対して有限時間リアプノフ指数を算出するために、Lang-Kobayashi 方程式 (6.8)–(6.10) を線形化する．状態空間において，基準となる軌道に対する微小揺らぎ $\delta e_{re}(t) = \bar{e}_{re}(t) - e_{re}(t)$, $\delta e_{im}(t) = \bar{e}_{im}(t) - e_{im}(t)$, $\delta n(t) = \bar{n}(t) - n(t)$ を考える．ここで $\bar{e}_{re}(t)$, $\bar{e}_{im}(t)$, $\bar{n}(t)$ はそれぞれ電界実部，電界虚部，キャリア密度の基準軌道に対して微小揺らぎを与えられた軌道を表す．微小揺らぎ $\delta e_{re}(t)$, $\delta e_{im}(t)$, $\delta n(t)$ に対して Lang-Kobayashi 方程式を線形化すると，以下の方程式が得られる [3, 36].

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{J}_t[\mathbf{x}(t)]\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}_{t-\tau}[\mathbf{x}(t-\tau)]\delta\mathbf{x}(t-\tau) \quad (6.12)$$

ここで $\mathbf{x}(t) = (e_{re}(t), e_{im}(t), n(t))^\dagger$, $\delta\mathbf{x}(t) = (\delta e_{re}(t), \delta e_{im}(t), \delta n(t))^\dagger$ であり， \dagger は転置を表す． \mathbf{J}_t および $\mathbf{J}_{t-\tau}$ はそれぞれ時間 t と $t-\tau$ の変数 \mathbf{x} の偏微分により得られる 3×3 係数行列である．線形化方程式の詳細については第 4 章の第 4.3 節で述べられている．

6.3.3 有限時間リアプノフ指数の数値計算結果

図 6.6(a) にレーザ強度の時系列を示す．時系列が不規則な振動をしており，この時の平均の最大リアプノフ指数を計算すると，正の値 ($\lambda_{max} = 1.09 \text{ ns}^{-1}$) が得られることから，ダイナミクスがカオスとなっている．図 6.6(b) はレーザの光周波数とキャリア密度の状態空間におけるアトラクタを示している．

図 6.6(b) のアトラクタ上に有限時間リアプノフ指数をプロットした結果を図 6.7(a) に示す．有限時間リアプノフ指数を計算するために，図 6.7 において有限時間 $L = 0.1 \text{ ns}$ が用いられている．有限時間リアプノフ指数の大きさが色で表されており，色が濃い領域は高い有限時間リアプノフ指数が得られていることを表す．図 6.7(a) からアトラクタの位置に依存して有限時間リアプノフ指数の値が異なることが分かる．特に高い有限時間リアプノフ指数が縞状に現れていることが確認できる．この有限時間リアプノフ指数の確率分布が図 6.7(b) に示されている．最も大きな有限時間リアプノフ指数は 40 ns^{-1} 程度であり，平均のリアプノフ指数 ($\lambda_{max} = 1.09 \text{ ns}^{-1}$) と比較して非常に大きな値であることが分かる．また負の有限時間リアプノフ指数も得られており，状態空間の一部の領域では軌道が安定であることも確認できる．しかしながら確率分布のピークは 0 の位置に存在し，多くの有限時間リアプノフ指数は 0 である．

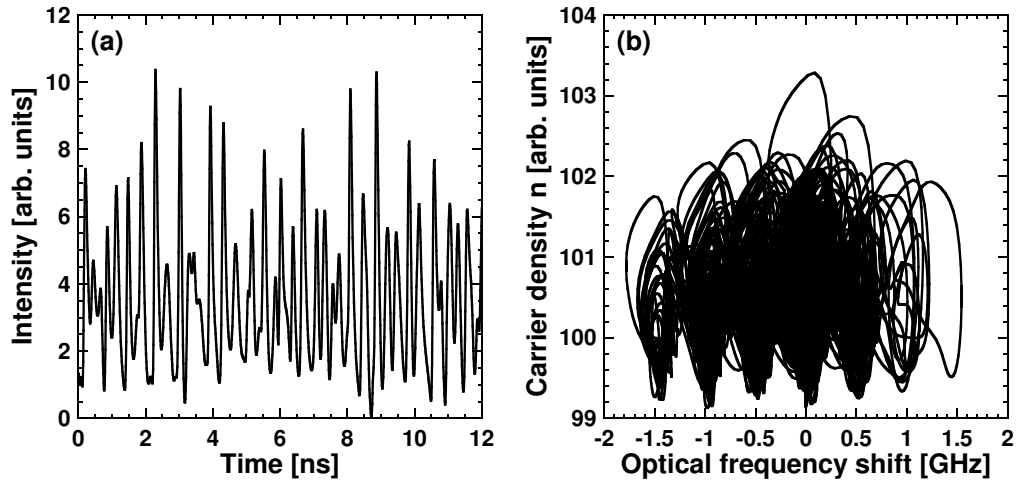


図 6.6: (a) レーザカオスの時系列および (b) アトラクタ. アトラクタは光周波数の基準周波数 $f = \omega/(2\pi)$ からの差 (横軸) とキャリア密度 (縦軸) の状態空間上に写像されている. 光周波数の基準周波数からの差は遅延時間 τ における光位相の変化量から算出されている.

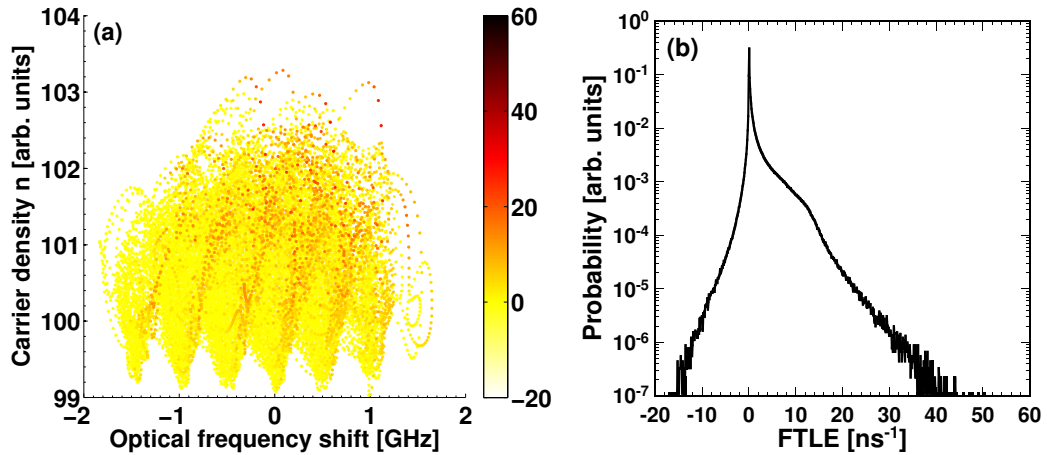


図 6.7: (a) 図 6.6(b) の状態空間における有限時間リアプノフ指数を表している. (b) 有限時間リアプノフ指数の確率分布を表している. 有限時間リアプノフ指数を算出するために有限時間 $L = 0.1$ ns が用いられている.

次に有限時間 L を変化させた時の有限時間リアプノフ指数の確率分布の変化を図 6.8 に示す. 有限時間 L を増加させることは, 有限時間リアプノフ指数をより長い軌道で平均化することを意味する. 図 6.8 では 3 つの L ($L < \tau$, $L = \tau$, $L > \tau$) を用いた結果が示されている. 有限時間 L を増加させると, 有限時間リアプノフ指数の確

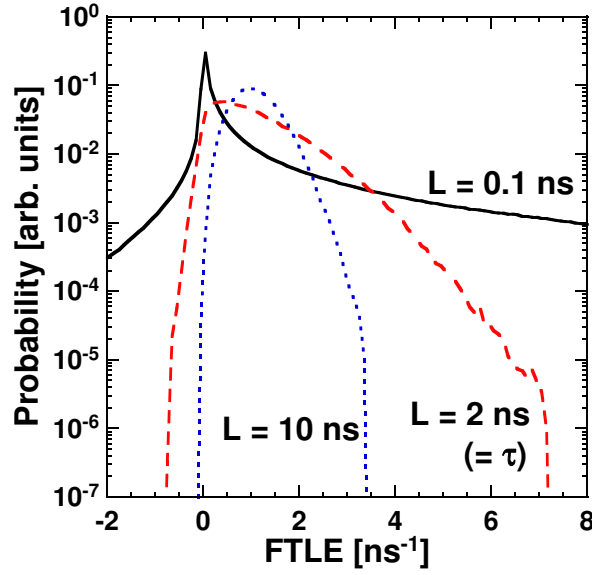


図 6.8: 有限時間 L を増加させた時の有限時間リアプノフ指数の確率分布の変化を表している．それぞれ実線は $L = 0.1 \text{ ns}$ ($L < \tau$)，破線は $L = 2 \text{ ns}$ ($L = \tau$)，点線は $L = 10 \text{ ns}$ ($L > \tau$) を用いている．この時の遅延時間は $\tau = 2 \text{ ns}$ である．

率分布の幅が狭くなり，確率分布の形がガウス分布に近づいている．また確率分布の頂点は $L = 0.1 \text{ ns}$ の時に $\lambda_f = 0 \text{ ns}^{-1}$ に位置していたのに対し， $L = 2 \text{ ns}$ ， $L = 10 \text{ ns}$ と増加させるにつれて頂点が移動している． $L = 10 \text{ ns}$ の時，確率分布の頂点は $\lambda_f = 0.95 \text{ ns}^{-1}$ であり，平均のリアプノフ指数 $\lambda_{max} = 1.09 \text{ ns}^{-1}$ に近い．このように有限時間 L を変化させることで有限時間リアプノフ指数の確率分布は大きく変化する．特に L を増加させると確率分布の形がガウス分布に近づくことから，有限時間リアプノフ指数は中心極限定理に従うことが分かる．

有限時間 L を変化させることで有限時間リアプノフ指数の確率分布の形が大きく変化する事が分かった．有限時間 L への確率分布の依存性を定量的に評価するために，有限時間リアプノフ指数の標準偏差の算出を行った．図 6.9 に有限時間 L を変化させた時の有限時間リアプノフ指数の標準偏差の変化を示す．図 6.9 の縦軸，横軸は共に対数表示されている．

これまでに時間遅延ダイナミカルシステムでないシステムにおいて有限時間の増加に対する有限時間リアプノフ指数の標準偏差の変化について調査が行われている [31]．時間遅延ダイナミカルシステムでない場合，有限時間リアプノフ指数の標準偏差はべき乗則に従い，有限時間 L の増加に対して L^{-p} の速さで減少する．ここで指数 p はおおむね $0.5 \leq p \leq 1.0$ となることが知られている [31]．図 6.9 において両対

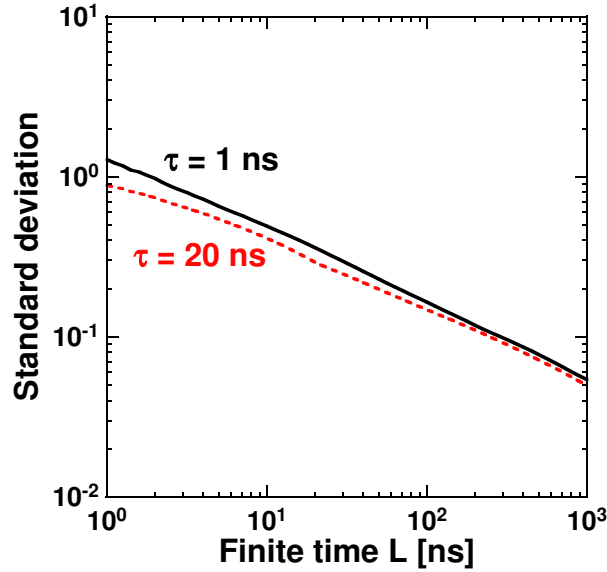


図 6.9: 有限時間 T を増加させた時の有限時間リアプノフ指数の標準偏差の変化を表している．縦軸，横軸共に対数で表示されている．遅延時間 $\tau = 1$ (実線)， $\tau = 20$ (破線) の場合について示されており，それぞれの場合についてべき乗近似を行うと，指数部 0.46 および 0.42 が得られる．

数表示における標準偏差の変化がほぼ直線となっていることから，時間遅延ダイナミカルシステムにおいても有限時間の増加に対して，標準偏差はべき乗則 (cL^{-p}) で減少することが分かる．ここで図 6.9 に対してべき乗近似を行うと，遅延時間 $\tau = 1$ ns, 20 ns のそれぞれに対して $p = 0.46, 0.42$ となった．このように戻り光を有する半導体レーザーにおいて時間遅延を持たないシステムと同様に有限時間リアプノフ指数のべき乗則が観測されることが分かった．

次に戻り光の遅延時間 τ への有限時間リアプノフ指数の確率分布の依存性を調査した．時間遅延ダイナミカルシステムにおいて最大リアプノフ指数は遅延時間に関係づけられることが知られている [102]．図 6.10(a), (b) はそれぞれ有限時間が $L = 0.1$ ns および $L = 20$ ns の時の有限時間リアプノフ指数の確率分布であり，遅延時間 τ への確率分布の依存性を示している． $L = 0.1$ ns の場合 (図 6.10(a))，確率分布は $\lambda_f = 0$ にピークを持ち，広い範囲に有限時間リアプノフ指数が分布する．確率分布は $\lambda_f = 0$ を中心に非対称であり，正の有限時間リアプノフ指数に多く偏っている．このため最大リアプノフ指数は正となる．遅延時間 τ を増加させると，確率分布のピーク位置は変化しないが，正および負の有限時間リアプノフ指数の分布は共に減少している．一方で τ の増加に対して $\lambda_f = 0$ の分布は増加してい

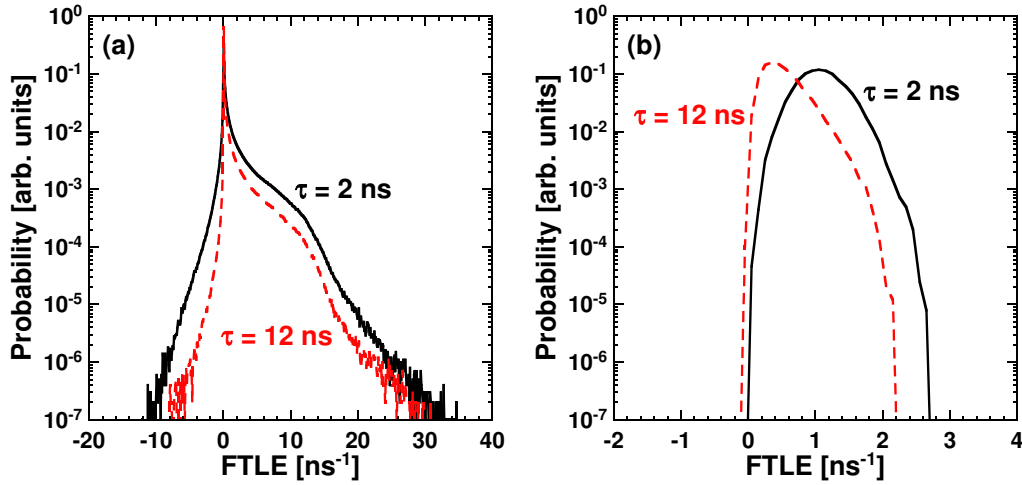


図 6.10: 遅延時間 τ を変化した時の有限時間リアプノフ指数の確率分布の変化を表している．有限時間 $L = 0.1$ ns, (b) 有限時間 $L = 20$ ns の場合について示されている．それぞれの図において実線は $\tau = 2$ ns, 破線は $\tau = 12$ ns の遅延時間が用いられている．

る．このため遅延時間を増加させると最大リアプノフ指数が減少する． $L = 20$ の場合 (図 6.10(b)), $L = 0.1$ の場合とは異なり確率分布のピークは最大リアプノフ指数に位置し, 図 6.10(a) と比較して有限時間リアプノフ指数の分布範囲は狭い．遅延時間 τ を増加させるとピーク位置の分布が増加し分布の幅は減少している．この点については $L = 0.1$ の場合と同様であるが, $L = 20$ の場合にはピーク位置が移動する点が大きな違いである．

次に図 6.11 に遅延時間 τ に対する有限時間リアプノフ指数の標準偏差の変化を示す．図の縦軸, 横軸は共に対数で表示されている． $L = 1$ に関して, 有限時間リアプノフ指数の標準偏差は遅延時間 τ の増加に対して減少していることが分かる．特に両対数表示においてほぼ直線であることから, 有限時間リアプノフ指数の標準偏差は遅延時間に対してもべき乗則を持つことが分かった． $L = 1$ の直線に対して $c\tau^{-q}$ としてべき乗近似を行うと, $q = 0.13$ が得られた．しかしながら $L = 200$ ns の場合, 遅延時間 τ を変化させても有限時間リアプノフ指数の標準偏差はほとんど変化していない．このように有限時間リアプノフ指数の標準偏差の遅延時間 τ への依存性は, 有限時間 L により異なることが分かった．

マッキークラスモデルの場合, 遅延時間の増加に対する有限時間リアプノフ指数の標準偏差におけるべき指数の値は 0.5 程度であった．本節で得られた戻り光を有する半導体レーザの場合, べき指数は 0.13 と小さな値であった．このような結果と

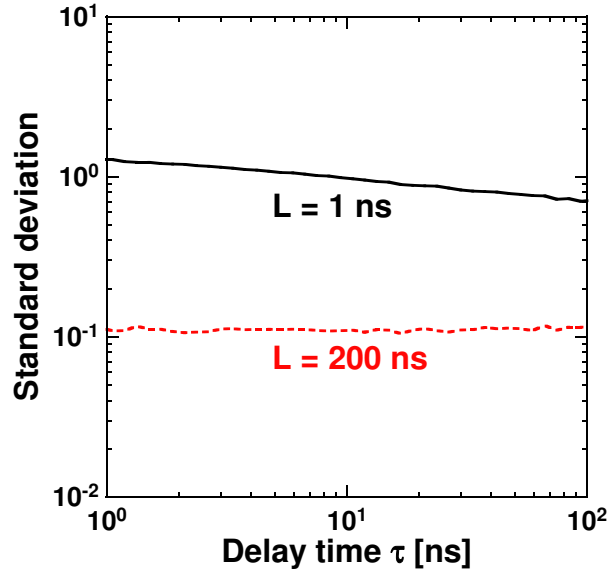


図 6.11: 戻り光の遅延時間 τ を増加させた時の有限時間リアプノフ指数の標準偏差の変化を表している．縦軸，横軸は共に対数表示されている．実線は $L = 1$ ns，破線は $L = 200$ ns の場合を表している．

なった理由として，戻り光を有する半導体レーザが遅延の項以外も非線形性を生成する性質を有するためではないかと考えられる．マッキーグラスモデルの時間 t の項は単なる減衰を表す項であり，非線形性は遅延の項のみにより生成される．一方で戻り光を有する半導体レーザは時間 t の項も非線形性を有している．したがって遅延時間を増加させた時のダイナミクスの複雑さが減少しづらくなる可能性があり，これがべき指数が小さくなることとして現れていると考えられる．

6.4 まとめ

本章では時間遅延ダイナミカルシステムにおける有限時間リアプノフ指数の算出方法を提案し，マッキーグラスモデルおよび戻り光を有する半導体レーザにおいて有限時間リアプノフ指数の算出を行った．有限時間リアプノフ指数は状態空間におけるアトラクタの局所的な不安定性を定量化する指標であり，平均のリアプノフ指数よりも多くの情報を得ることができる．これまでに時間遅延ダイナミカルシステムにおいて有限時間リアプノフ指数を算出する手法は確立されていなかった．これは時間遅延ダイナミカルシステムが無次元の状態空間を有するためである．これ

に対して本研究では時間遅延ダイナミカルシステムにおける有限時間リアプノフ指数の算出手法を提案した．本手法をマッキークラスモデルに適用し，有限時間リアプノフ指数の確率分布の標準偏差の算出を行った．有限時間リアプノフ指数の標準偏差は有限時間および遅延時間の増加に対してべき乗則にしたがって減少することが明らかとなった．この時のべき指数は有限時間および遅延時間のどちらに対してもほぼ 0.5 となることが分かった．有限時間に対する有限時間リアプノフ指数の標準偏差のべき乗則は時間遅延を持たないシステムにおいてもこれまでに観測されており，そのべき指数は 0.5 から 1.0 程度である．したがって本研究で得られたマッキークラスモデルにおける結果は時間遅延を持たないシステムと同様であることが分かった．これに対して遅延時間に対する有限時間リアプノフ指数の標準偏差のべき乗則は本研究において初めて観測された．

さらに本章では戻り光を有する半導体レーザにおいてマッキークラスモデルに対して行った解析と同様の解析を行った．マッキークラスモデルと同様に，戻り光を有する半導体レーザの有限時間リアプノフ指数の標準偏差も有限時間と遅延時間に対してべき乗則を有することが分かった．しかしながら遅延時間に対するべき乗則のべき指数の値はマッキークラスモデルと比較して小さいことが分かった．

有限時間リアプノフ指数の標準偏差が大きいことは，状態空間の位置により予測不可能性が大きく異なることを意味する．これは予測の限界時間が状態空間の位置により異なることを表す．また戻り光を有する半導体レーザを用いた物理乱数生成において，小さいあるいは負の有限時間リアプノフ指数の確率分布が大きい場合，類似した乱数列が部分的に現れてしまう可能性がある．このように有限時間リアプノフ指数の標準偏差はカオスの物理乱数生成器への応用において予測不可能性の評価指標となり得る．

第7章 戻り光を有する半導体レーザー のリアプノフスペクトラム解 析の応用

7.1 戻り光を有する半導体レーザーにおける一般化同期を 用いたリアプノフ指数の推定

リアプノフ指数はダイナミカルシステムの軌道に対して与えられた無限小の揺らぎの指数関数的な成長・減衰率を表す。正のリアプノフ指数が少なくとも1つ存在することはシステムが決定論的カオスであることを表し、リアプノフ指数はシステムの予測の限界時間を決定する。システムのモデルとパラメータが既知である場合におけるリアプノフ指数の算出方法として、無限小の揺らぎを与えられた軌道を仮定しモデルを線形化し、揺らぎの発展を調べる方法が挙げられる。システムのモデルやパラメータが未知であり、実験的に得られる観測時系列からリアプノフ指数を算出する場合、埋め込みによりシステムの状態空間に再構成したカオス軌道を用いてリアプノフ指数の見積もりを行う。しかしながら時間遅延ダイナミカルシステムの場合、システムが自身の時間遅延された成分を持ち無限次元を有するため、状態空間の構成が困難となり、リアプノフ指数を観測時系列から算出する方法はいまだに確立されていない。

これに対して、光電気フィードバックシステムにおいて完全同期を用いることで予測可能時間（リアプノフ指数の逆数に対応）を定量化する方法がCohenらにより提案されている [97, 98]。しかしながらこの方法を戻り光を有する半導体レーザーに適用するのは、完全同期が困難であるという理由で難しい。2つのシステムが完全同期を達成するためには、システムが有するパラメータが一致していることが望ましい。しかし半導体レーザーは多くの固定パラメータを有しており、これを一致させることが非常に困難である [103]。そのため戻り光を有する半導体レーザーで完全同期を達成させることが困難となる。

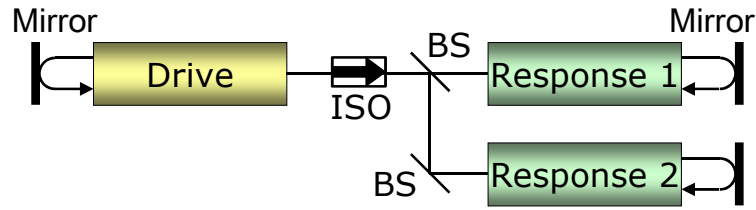


図 7.1: 3つの半導体レーザからなるモデル. Drive レーザから出力された光が一方
向に 2 つの Response レーザに入力される. Drive レーザからそれぞれの Response
レーザとの距離は等しいと考える. ISO は光アイソレータ (Isolator), BS はビーム
スプリッタ (Beam Splitter) を表す.

そこで本章では図 7.1 に示される 3 つのレーザからなるシステムを用いることにより, 戻り光を有する半導体レーザにおいてリアプノフ指数を定量化する方法を提案する. このシステムでは 1 つのレーザ (Drive) の出力光を他の 2 つのレーザ (Response 1, Response 2) に入力を行う. 図 7.1 のシステムは Auxiliary システムと呼ばれ, 一般化同期の達成を確認するためのシステムとして用いられている [57]. 一般化同期が達成される場合, 同じ光を入力されている 2 つのレーザは同じ光を出力する. ここで, Drive レーザから Response レーザへの出力光を切断し, その後の Response レーザの差の時間発展からリアプノフ指数を算出する. 本研究では提案方法により算出されたリアプノフ指数と, 線形化されたモデル方程式を用いて算出されたリアプノフ指数 [3, 88] の比較を行い, 提案方式の有効性を数値的に実証する.

7.1.1 時間遅延システムにおける完全同期を用いたリアプノフ指数の算出手法

本節では Cohen らにより文献 [97] で提案された完全同期を用いたリアプノフ指数の算出手法について説明する. 文献 [97] では, 光電気フィードバックシステムと呼ばれる時間遅延システムを用いている. この時間遅延システムを図 7.2 に示す. 図 7.2 は Drive および Response の 2 つのシステムからなる. Drive システムはレーザから出力された光が変調器を通り, 光検出器により電気信号に変換される. 変換された電気信号はハイパスフィルタ (High Pass Filter, HPF) とローパスフィルタ (Low Pass Filter, LPF) を通過し, 時間遅延フィードバックとして変調器の変調信号に用いられる. また変調器と光検出器の間に遅延を設けることで時間遅延フィードバックを構成しており, ダイナミクスがカオスとなる. この Drive システムの数値モデ

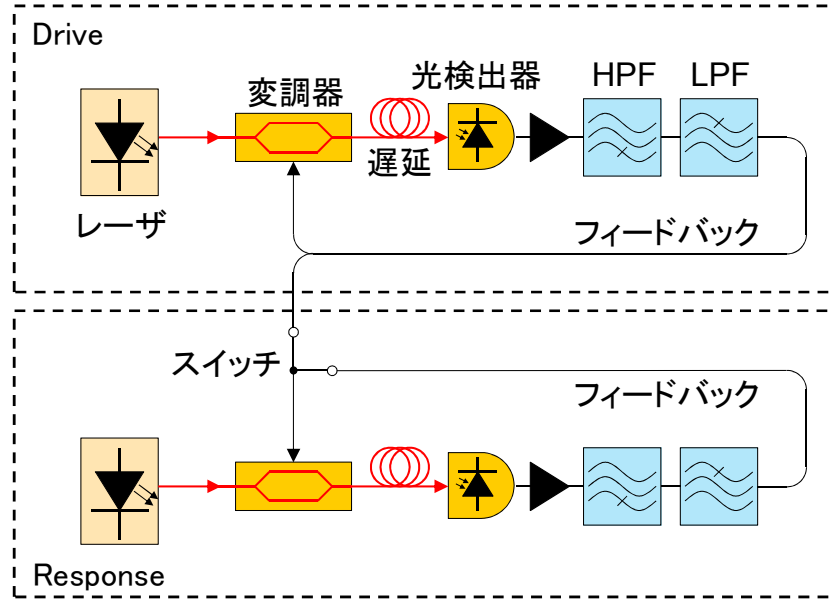


図 7.2: 文献 [97] において述べられている完全同期を用いて最大リアプノフ指数を推定する手法. Drive, Response と呼ぶ 2 つの光電気フィードバックシステムを一方方向に結合させる. HPF, LPF はそれぞれハイパスフィルタ (High Pass Filter), ローパスフィルタ (Low Pass Filter) を表す. Response において Drive からの入力と遅延入力を切り替えることが可能となっている.

ルを以下に示す.

$$\tau_{L,d} \frac{dx_d(t)}{dt} = - \left(1 + \frac{\tau_{L,d}}{\tau_{H,d}} \right) x_d(t) - y_d(t) - \beta_d \cos^2[x_d(t - \tau_d) + \phi_{0,d}] \quad (7.1)$$

$$\tau_{H,d} \frac{dy_d(t)}{dt} = x_d(t) \quad (7.2)$$

ここで $x(t)$ は変調器に入力される規格化された出力信号を表す. 下付きの d は Drive を表す. β はフィードバック強度を表す無次元化された定数である. τ はフィードバック信号の遅延時間, ϕ_0 は変調器のバイアスにより付加される位相である. τ_L および τ_H はそれぞれ LPF と HPF のカットオフ周波数に関係づけられるパラメータである.

Response は Drive とほぼ同一の構成を持つが, 変調器への入力を Drive からの入力信号と Response 自身のフィードバック信号に切り替えることができるスイッチを持つ. Drive からの入力信号を有する Response の数値モデルは次のように表さ

れる．

$$\tau_{L,r} \frac{dx_r(t)}{dt} = - \left(1 + \frac{\tau_{L,r}}{\tau_{H,r}} \right) x_r(t) - y_r(t) - \beta_r \cos^2[x_d(t - \tau_{inj}) + \phi_{0,r}] \quad (7.3)$$

$$\tau_{H,r} \frac{dy_r(t)}{dt} = x_r(t) \quad (7.4)$$

ここで下付きの r は Response を表す． τ_{inj} は Drive から Response への入力信号の遅延時間である．他の変数は Drive と同じものを表す．

図 7.2 の Drive-Response システムにおいて，Drive から Response に一方向に結合することで完全同期を達成することができる．完全同期を達成することで時間遅延されたフィードバックの状態も一致させることができる．2つのシステムが完全に一致している状態で，Response システムのスイッチを Drive からの信号から Response の遅延信号に切り替える．2つのシステムは完全同期を達成していたので，スイッチを切り替えた直後はほとんど同じ振る舞いを示す．しかしながら2つのシステムは微小なノイズを有し，またカオスであるため，2つのシステムの出力の誤差は指数関数的に拡大する．この時の誤差拡大率から Drive システムの最大リアプノフ指数を定量化する．

完全同期を達成するためには2つのシステムが同一でなければならない．図 7.2 の Drive-Response の数値モデル (7.1)–(7.4) において，次のように表される完全同期解を仮定する．

$$x_d(t) = x_r(t) \quad (7.5)$$

$$y_d(t) = y_r(t) \quad (7.6)$$

上記の完全同期解を達成するためには式 (7.1)–(7.2) と式 (7.1)–(7.2) において Drive と Response のパラメータが一致する必要がある．図 7.2 のシステムはモデル方程式からも分かるように，比較的簡単な構成であるため，2つのシステムのパラメータをほぼ一致させることは比較的容易である．

7.1.2 戻り光を有する半導体レーザにおける完全同期と一般化同期

第 7.1.1 節の方法を用いてリアプノフ指数を推定するためには，完全同期を達成する必要がある．これまでに半導体レーザにおける完全同期は観測されているものの [104, 105]，その観測は比較的困難である [103]．この理由は，半導体レーザの光利得や媒質の屈折率，線幅増幅係数などのパラメータが，半導体をウエハ (シリコ

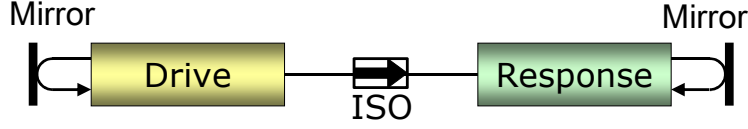


図 7.3: 一方向に光結合された 2 つの半導体レーザモデル．それぞれのレーザは外部の鏡により戻り光を付加されている．ISO はアイソレータ (Isolator) を表す．

ン基板) から切り出す際に決定されてしまい，個々の半導体レーザのパラメータを一致させることができない点にある．また第 7.1.1 節の方法を戻り光を有する半導体レーザに用いる場合，Drive レーザから Response レーザへの光注入を Response レーザの戻り光に同時に切り替えることは，半導体レーザのダイナミクスが数 GHz を超える非常に高速なダイナミクスを持つため困難である．

これに対して一方向に光結合された半導体レーザの実験的な同期現象の達成は一般化同期 (Generalized Synchronization) によるものが良く観測されている [106, 107]．一般化同期は Drive と Response が関数関係を示す同期現象である [57]．図 7.3 に一方向に光結合された 2 つの半導体レーザのモデルを示す．Drive レーザから出力された光がアイソレータ (Isolator, ISO) により一方向に Response レーザに入力されている．また 2 つのレーザはどちらも外部の鏡により自身の光をフィードバックされている．図 7.3 のダイナミクスを表す数値モデルを以下に示す．

[Drive laser]

$$\begin{aligned} \frac{dE_d(t)}{dt} = & \frac{1 + i\alpha}{2} \left[\frac{G_N(N_d(t) - N_0)}{1 + \epsilon|E_d(t)|^2} - \frac{1}{\tau_p} \right] E_d(t) \\ & + \kappa_d E_d(t - \tau_d) \exp(i\omega_d \tau_d) \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\frac{dN_d(t)}{dt} = J_d - \frac{N_d(t)}{\tau_s} - \frac{G_N(N_d(t) - N_0)}{1 + \epsilon|E_d(t)|^2} |E_d(t)|^2 \quad (7.8)$$

[Response laser]

$$\begin{aligned} \frac{dE_r(t)}{dt} = & \frac{1 + i\alpha}{2} \left[\frac{G_N(N_r(t) - N_0)}{1 + \epsilon|E_r(t)|^2} - \frac{1}{\tau_p} \right] E_r(t) \\ & + \kappa_r E_r(t - \tau_r) \exp(i\omega_r \tau_r) \\ & + \sigma E_d(t - \tau_{inj}) \exp[i(\Delta\omega t - \omega_d \tau_{inj})] \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\frac{dN_r(t)}{dt} = J_r - \frac{N_r(t)}{\tau_s} - \frac{G_N(N_r(t) - N_0)}{1 + \epsilon|E_r(t)|^2} |E_r(t)|^2 \quad (7.10)$$

E はゆっくり変化する複素電界, N はレーザ内部のキャリア密度である. 下付きの d, r はそれぞれ Drive レーザおよび Response レーザであることを表す. G_N は光利得係数, ϵ は利得飽和強度, N_0 は光透過時のキャリア密度, α は線幅増幅係数, τ_p は光子寿命, τ_s はキャリア寿命を表す. $J = jJ_{th}$ はレーザを駆動するための注入電流であり, 発振しきい値電流 J_{th} の j 倍に設定する. 式 (7.7) および (7.9) の右辺の第2項は戻り光を表す. κ は戻り光強度, τ は戻り光の遅延時間, ω はレーザの光角周波数を表す. 式 (7.9) の右辺の第3項は Drive レーザから Response レーザへの注入光を表す. σ は光注入強度, τ_{inj} は Drive レーザから Response レーザへの光伝搬時間, $\Delta\omega = \omega_d - \omega_r$ は2つのレーザの光角周波数差を表す.

半導体レーザにおいて一般化同期は, Drive レーザから Response レーザへの光注入強度 σ を増加させることにより観測することができる. 強い光を Response レーザに入力することによりインジェクションロッキングを達成することできる. インジェクションロッキングの達成により Response レーザの光周波数は Drive レーザの光周波数と一致し, これにより Drive レーザと Response レーザが同期する. インジェクションロッキング現象は Drive レーザと Response レーザのパラメータが多少異なっていたとしても容易に達成することできるため, 半導体レーザの一般化同期は実験的にも観測可能となる.

しかしながら一般化同期において Drive レーザと Response レーザの間に関数関係が存在するだけであり, 同期解は存在しない. 半導体レーザにおいて一般化同期を達成するためには光注入強度 σ を戻り光強度 κ よりも5倍から10倍程度の大きな値に設定し, またレーザ間の負の光周波数差 $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi) < 0$ を与えるため, Drive レーザと Response レーザのパラメータが異なる. このため2つのレーザ間に完全同期解が存在せず, パラメータによっては Drive レーザと Response レーザの出力強度は異なるものになる.

2つのレーザの出力が異なる場合に一般化同期が生じているかどうかを確かめる方法として Auxiliary System Approach が挙げられる [57]. この方法では1つの Drive システムから出力された信号を2つの Response システムに入力するモデルを用いる. 半導体レーザにおいて Auxiliary System Approach を適用するために用いるモデルは図7.1と同じモデルである. 図7.1において, Response 1 レーザと Response 2 レーザが同じパラメータを持つならば, Response 1-2 間において同期解が存在する. 一般化同期を達成することによりこの同期解を観測することができ, この時2つの Response レーザは状態空間において同一の振る舞いを示す. また Response 1-2 間でパラメータが異なっていたとしても, インジェクションロッキングにより Response 1-2 間の同期は実験的にも容易に観測することできる.

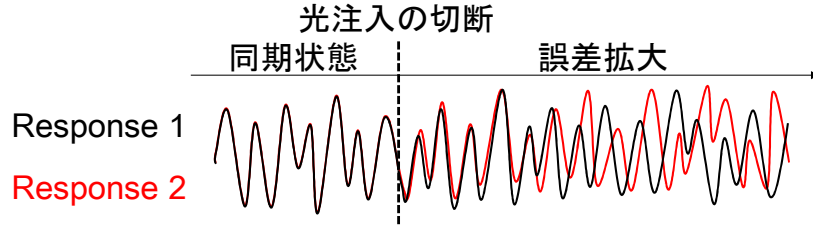


図 7.4: 3つの半導体レーザーモデル (図 7.1) において Drive レーザからの光注入の切断前後における 2つの Response レーザの時間ダイナミクスの模式図。

7.1.3 戻り光を有する半導体レーザーにおける一般化同期を用いた最大リアプノフ指数の算出手法

第 7.1.2 節では完全同期と一般化同期について説明し、図 7.1 において一般化同期により 2つの Response レーザが完全同期解を持つことを述べた。本節では同期した 2つの Response レーザを用いて戻り光を有する半導体レーザーの最大リアプノフ指数を推定する手法について説明する。

まず図 7.1 において Drive レーザから 2つの Response レーザに光注入を行うことで、Response 1 レーザと Response 2 レーザを同期させる。図 7.4 に 2つの Response レーザの出力強度の模式図を示す。Response 1 レーザおよび Response 2 レーザの出力強度をそれぞれ $I_1(t)$ および $I_2(t)$ で表す。2つの Response レーザが Drive レーザからの光注入を有する場合、図 7.4 の同期状態に示されているように 2つの Response レーザの出力強度は以下のように完全同期する。

$$I_1(t) = I_2(t) \quad (7.11)$$

ここで Drive レーザからの光注入を切断すると、切断した直後の 2つの Response レーザはほぼ同一の振る舞いを示すが、2つの出力強度の誤差は時間に対して指数関数的に拡大する。この時、Response 1 レーザと 2 レーザの出力強度差の時間変化を次のように指数近似する。

$$|I_1(t) - I_2(t)| \approx C \exp(\lambda_k t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (7.12)$$

ここで $|\cdot|$ は絶対値を表し、 C は任意の定数を表す。 t_0 および t_1 は指数近似を行う時間領域を決定し、 t_0 は Drive レーザからの光注入を切断する時間、 t_1 はレーザー強度差 $|I_1(t) - I_2(t)|$ が拡大しアトラクタと同程度の大きさとなる時間である。 λ_k は指数近似により得られる指数部であり、これが最大リアプノフ指数に相当する量で

ある． k は整数であり，繰り返し λ_k を計算した時のインデックスである．リアプノフ指数は一般的に状態空間の位置に依存して異なるため [31]，時間あるいは空間について平均化する必要がある．そこで Drive レーザからの光注入の切斷と結合を繰り返し行い， $|I_1(t) - I_2(t)|$ の指数近似から λ_k を繰り返し算出することで，次のようにリアプノフ指数の平均化を行う．

$$\lambda_{max} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \lambda_k \quad (7.13)$$

ここで N は λ_k の繰り返し計算回数を表し， λ_{max} は最大リアプノフ指数を表す．以上のような方法で最大リアプノフ指数を算出する．

7.1.4 数値計算において使用する半導体レーザの数値モデル

本章では図 7.1 の数値モデルとして，以下に示す無次元化された Lang-Kobayashi 方程式を用いる．これらの方程式は第 5 章の式 (5.38)–(5.43) と同じ方程式であり，無次元化の方法およびパラメータ具体的な説明については第 5 章に述べられている．

Drive laser:

$$\begin{aligned} \frac{de_{re,d}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n_d(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t))} - \gamma_e \right] (e_{re,d}(t) - \alpha e_{im,d}(t)) \\ & + \kappa_{e,d}[e_{re,d}(t - \tau_d) \cos(\omega_d \tau_d) + e_{im,d}(t - \tau_d) \sin(\omega_d \tau_d)] \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im,d}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n_d(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t))} - \gamma_e \right] (\alpha e_{re,d}(t) + e_{im,d}(t)) \\ & + \kappa_{e,d}[-e_{re,d}(t - \tau_d) \sin(\omega_d \tau_d) + e_{im,d}(t - \tau_d) \cos(\omega_d \tau_d)] \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_d(t)}{dt} = & \gamma_n(n_{th} \frac{J_d}{J_{th}} - n_d(t)) \\ & - \frac{g_n(n_d(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t))} (e_{re,d}^2(t) + e_{im,d}^2(t)) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Response laser:

$$\begin{aligned} \frac{de_{re,r}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n_r(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,r}^2(t) + e_{im,r}^2(t))} - \gamma_e \right] (e_{re,r}(t) - \alpha e_{im,r}(t)) \\ & + \kappa_{e,r}[e_{re,r}(t - \tau_r) \cos(\omega_r \tau_r) + e_{im,r}(t - \tau_r) \sin(\omega_r \tau_r)] \\ & + \kappa_{inj}[e_{re,d}(t - \tau_{inj}) \cos \theta(t) - e_{im,d}(t - \tau_{inj}) \sin \theta(t)] \\ & + \zeta(t) \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im,r}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n_r(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,r}^2(t) + e_{im,r}^2(t))} - \gamma_e \right] (\alpha e_{re,r}(t) + e_{im,r}(t)) \\ & + \kappa_{e,r}[-e_{re,r}(t - \tau_r) \sin(\omega_r \tau_r) + e_{im,r}(t - \tau_r) \cos(\omega_r \tau_r)] \\ & + \kappa_{inj}[e_{re,d}(t - \tau_{inj}) \sin \theta(t) + e_{im,d}(t - \tau_{inj}) \cos \theta(t)] \\ & + \eta(t) \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_r(t)}{dt} = & \gamma_n(n_{th} \frac{J_r}{J_{th}} - n_r(t)) \\ & - \frac{g_n(n_r(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re,r}^2(t) + e_{im,r}^2(t))} (e_{re,r}^2(t) + e_{im,r}^2(t)) \end{aligned} \quad (7.19)$$

ここで下付きの d および r はそれぞれ Drive レーザおよび Response レーザを表す。 e_{re} , e_{im} , n は無次元化定数 \bar{A} , \bar{N} により無次元化された無次元量であり, 電界実部 E_{re} , 電界虚部 E_{im} およびキャリア密度 N と $E_{re} = \bar{A}e_{re}$, $E_{im} = \bar{A}e_{im}$, $N = \bar{N}n$ という関係を持つ. 式 (7.14)–(7.19) において, 定数 g_e , g_n , κ_e , γ_e , γ_n , n_0 , n_{th} は方程式の無次元化により現れた定数を整理した定数であり, 第3章の式 (3.76) として定義されている. また無次元化定数は第3章の式 (3.80) のように, 戻り光を持たない半導体レーザの定常解を用いて定義されている.

式 (7.17) および (7.18) の右辺の最後の項は自然放出光によるダイナミカルノイズを表す. $\zeta(t)$ および $\eta(t)$ は次の性質を有する白色ガウス雑音である.

$$\langle \zeta(t) \zeta(t - T) \rangle = D \delta(T) \quad (7.20)$$

$$\langle \eta(t) \eta(t - T) \rangle = D \delta(T) \quad (7.21)$$

ここで $\langle \rangle$ は負の無限大から正の無限大までの平均を表し, δ はデルタ関数である. D は雑音強度を表し, 簡単のため ζ と η は同じ雑音強度を持つと仮定する. 本章では $D = 10^3$ を用いる. 数値計算では白色ガウス雑音を生成するために, Box-Muller

Symbol	Parameter	Value
G_N	Gain coefficient	$8.40 \times 10^{-13} \text{ m}^3/\text{s}$
N_0	Carrier density at transparency	$1.40 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$
τ_p	Photon lifetime	$1.927 \times 10^{-12} \text{ s}$
τ_s	Carrier lifetime	$2.04 \times 10^{-9} \text{ s}$
τ_{in}	Roundtrip time in internal cavity	$8.0 \times 10^{-12} \text{ s}$
r_2	Reflectivity of laser facet	0.556
α	Linewidth enhancement factor	3
λ_d	Optical wavelength of the drive laser	$1.537 \times 10^{-6} \text{ m}$
c	Speed of light	$2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$
N_{th}	Carrier density at threshold	$2.018 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$
J_{th}	Injection current at threshold	$9.892 \times 10^{32} \text{ m}^{-3}\text{s}^{-1}$
ω_d	Optical angular frequency of the drive laser	$1.215 \times 10^{15} \text{ rad/s}$
ϵ	Gain saturation coefficient	2.0×10^{-23}
$\kappa_{d,r}$	Feedback strength of the drive and response lasers	6.2 ns^{-1}
κ_{inj}	Injection strength from the drive to response lasers	62.1 ns^{-1}
j_d, j_r	Normalized injection current of the drive and the response lasers	1.36, 1.36
$L_{d,r}$	External cavity length of the drive and the response lasers	0.6 m
$\tau_{d,r}$	Roundtrip time in external cavity of the drive and response lasers (feedback delay time)	4.003 ns
L_{inj}	Distance from the drive to response lasers	1.2 m
τ_{inj}	Propagation time of light from the drive to response lasers	4.003 ns
Δf	Initial optical-frequency detuning between the drive and response lasers	-4.0 GHz

表 7.1: 光結合された半導体レーザのパラメータ

アルゴリズムを 2 つの一樣分布を持つ乱数源に使用している．また一樣乱数源は Mersenne-Twister アルゴリズムにより生成する．

Response 1 レーザおよび Response 2 レーザは初期状態およびダイナミカルノイ

ズのみ異なるとし、同じ方程式を用いて数値計算する．数値計算において用いるパラメータを表 7.1 に示す．方程式 (7.14)–(7.19) に現れる定数は表 7.1 に示されている定数を用いて、第 3 章の式 (3.76) を用いて計算される．

7.1.5 一般化同期を用いた最大リアプノフ指数の推定の数値計算結果

まず Drive レーザから Response レーザに光注入を行うことにより一般化同期を達成し、Response 1 レーザと 2 レーザが同期することを示す．図 7.5 は Drive レーザから Response レーザに光注入がある時とない時の 3 つのレーザの強度時系列である．レーザ強度 $I(t)$ は電界実部 e_{re} および電界虚部 e_{im} から、 $I = e_{re}^2 + e_{im}^2$ として計算される．半導体レーザの一般化同期において、Drive レーザから Response レーザへの光伝搬時間 τ_{inj} だけ遅れた Drive 信号と Response 信号の相互相関が高くなる．したがって図 7.5 において Drive レーザの強度時系列は光伝搬時間 τ_{inj} だけ遅れた信号が示されている．図 7.5(a) は Drive レーザからの光注入がない時の 3 つのレーザの強度時系列を表している．Response 1 レーザと 2 レーザの強度時系列が異なる振る舞いを示しており、2 つの Response レーザが同期していないことが分かる．図 7.5(b) は Drive レーザからの光注入がある時の 3 つのレーザの強度時系列を表している．この時の光注入強度は $\kappa_{inj} = 62.1 \text{ ns}^{-1}$ であり、戻り光強度 $\kappa_{d,r} = 6.2 \text{ ns}^{-1}$ の約 10 倍に設定されている．2 つの Response レーザが同じ振る舞いを示しており、同期していることが分かる．このように Drive レーザから光注入を行うことで 2 つの Response レーザを同期させることができる．

一方で図 7.5(b) において、Drive レーザと Response レーザの強度時系列も同じ振る舞いを示しているように見える．Response 1–2 間および Drive–Response 間の同期の差異を確認するために、図 7.6 に Response 1–2 間および Drive–Response 間の相関プロットを示す．図 7.6(a) は Response 1–2 間の相関プロットであり、斜め 45° に点が分布していることから 2 つの Response レーザが高い精度で同期していることが分かる．図 7.6(b) は Drive–Response 間の相関プロットを表しており、斜め 45° に点が分布しているが、図 7.6(a) と比較して多少点にばらつきが観察される．Drive レーザと Response レーザの電流値 j や戻り光強度 κ を異なる値に設定するとこのばらつきが広がり、Drive レーザと Response レーザの強度時系列の差異が大きくなる．しかしながら本章で用いているパラメータでは Drive レーザと Response レーザの強度に大きな差は確認されず、Drive レーザと Response レーザの強度差の誤差拡大率から最大リアプノフ指数を算出可能と考えられるかもしれない．

しかしながら実際には一般化同期状態における Drive レーザと Response レーザ

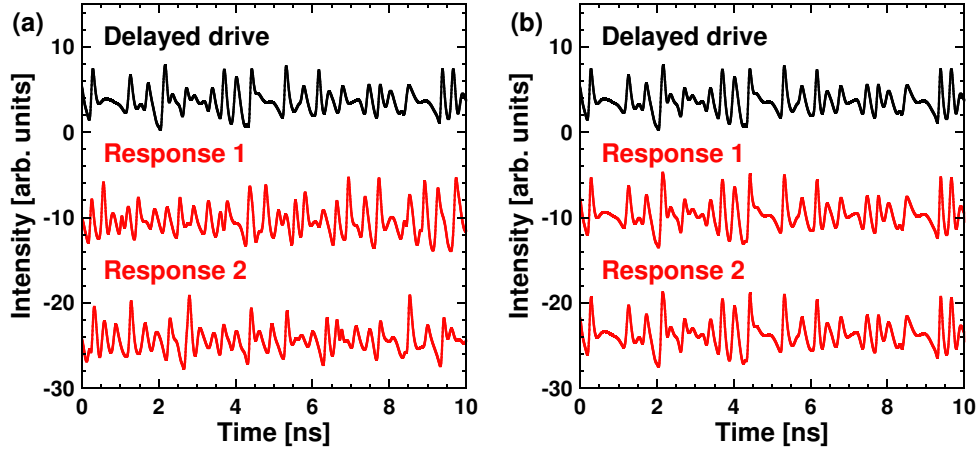


図 7.5: Drive レーザおよび Response 1 レーザ, 2 レーザのレーザ強度時系列. (a),(b) はそれぞれ (a) Drive レーザからの光注入がない場合と (b) Drive レーザからの光注入がある場合を示している. (b) において Drive レーザからの光注入強度は $\kappa_{inj} = 62.1 \text{ ns}^{-1}$ である.

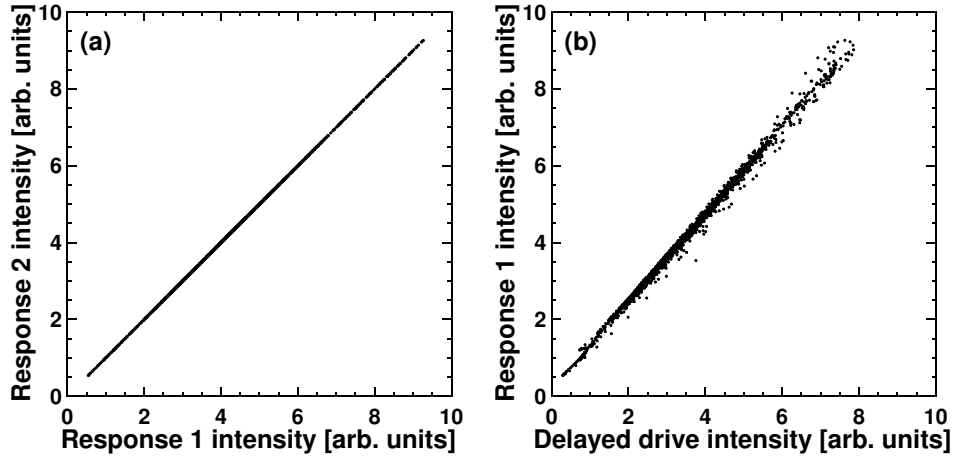


図 7.6: 図 7.5(b) に対応するレーザ強度の相関図. (a) は Response 1–2 間, (b) は Drive–Response 1 間の相関図をそれぞれ表している.

の強度差の誤差拡大から最大リアプノフ指数を求めることはできない. この理由を説明するために, 図 7.7 に一般化同期状態の Drive レーザと Response レーザのアトラクタを示す. 図 7.7 の縦軸はレーザのキャリア密度 n である. 一方で図 7.7 において横軸はレーザの光位相 ϕ から, 戻り光の遅延時間 τ について平均化された光周波数の変化を表している. レーザの光位相は電界実部 e_{re} および虚部 e_{im} から次の

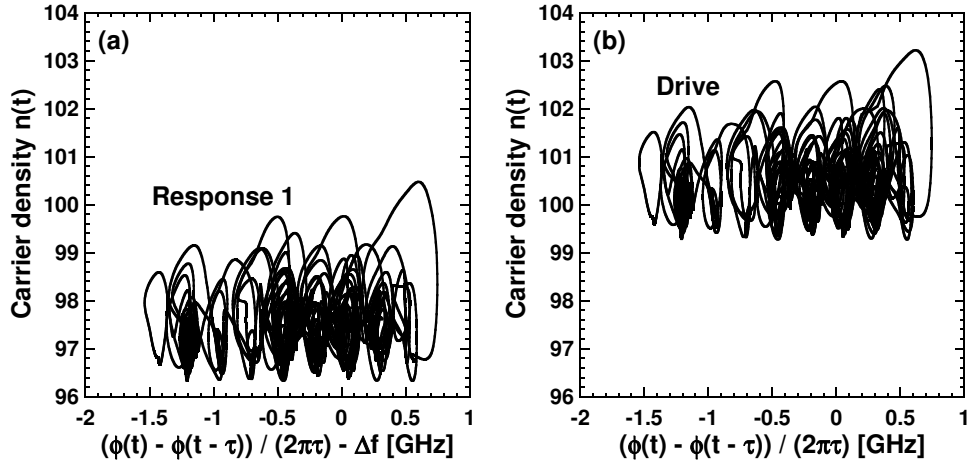


図 7.7: 一般化同期状態のアトラクタ. (a) は Response 1 レーザ, (b) は Drive レーザのアトラクタをそれぞれ示している. 縦軸はキャリア密度 $n(t)$ を表す. また横軸は戻り光の遅延時間 τ で時間平均された光周波数であり, レーザの光位相 $\phi(t)$ から計算されている. この時の光注入強度は $\kappa_{inj} = 62.1 \text{ ns}^{-1}$ である.

ように計算される.

$$\phi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{e_{im}(t)}{e_{re}(t)} \right) \quad (7.22)$$

数値計算で $\phi(t)$ の時間発展を追うために, 複素平面上の周回回数を記録する必要があることに注意する. 図 7.7 において, $(\phi(t) - \phi(t - \tau)) / (2\pi\tau) = 0$ は光注入および戻り光がない時の光周波数 $f = \omega / (2\pi)$ と時間 t の光周波数が一致している状態を表す.

図 7.7(a) は Response 1 レーザのアトラクタを示している. Drive レーザと Response レーザは初期光周波数差 Δf を有しているため基準の光周波数が異なる. そこで図 7.7(a) と (b) で基準の光周波数を一致させるために図 7.7(a) において横軸に Δf が差し引かれている. これにより図 7.7(a) において $(\phi(t) - \phi(t - \tau)) / (2\pi\tau) - \Delta f = 0$ の時の光周波数は Drive レーザの光周波数 $f_d = \omega_d / (2\pi)$ と一致する. 図 7.7(a) の Response 1 レーザのアトラクタと図 7.7(b) の Drive レーザのアトラクタを比較すると, 2つのアトラクタはキャリア密度の方向 (図 7.7 の縦方向) において異なる位置に存在することが分かる. このように一般化同期状態の Drive レーザと Response レーザのアトラクタは状態空間において異なる位置に存在する. レーザ強度についてはほとんど同じ振る舞いを示していたとしても, キャリア密度において全く異なる状態を有しているため, Drive レーザと Response レーザは状態空間において近傍に存在するとは言えない. したがって Drive レーザと Response レーザの誤差拡大

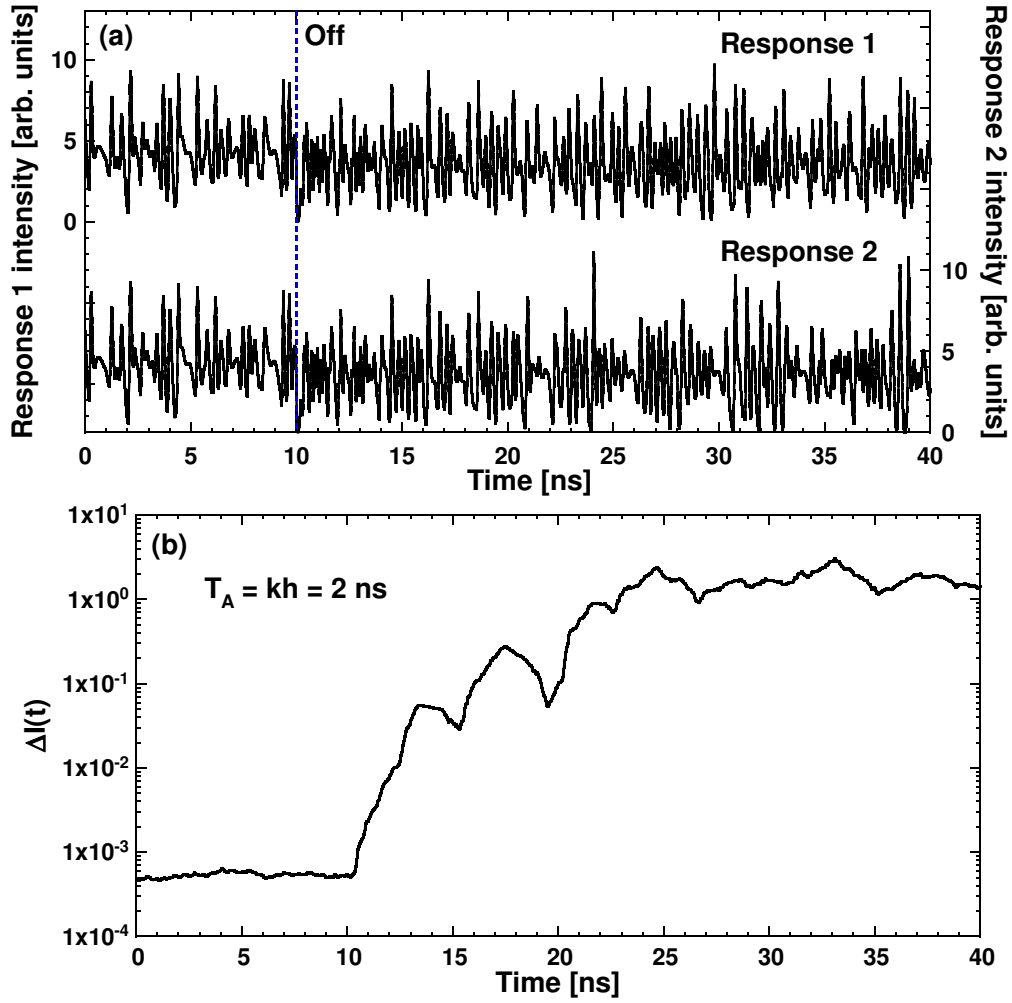


図 7.8: Drive レーザからの光注入が切断される前後の (a)Response レーザの強度 $I_1(t)$, $I_2(t)$ と (b) 移動平均された 2 つの Response レーザの強度差 $\Delta I(t)$ の時系列を示している. 10 ns で Drive レーザの光注入が切断されている. (b) の移動平均において用いられる窓幅は $T_A = 2 \text{ ns}$ である. Drive レーザからの光注入強度は $\kappa_{inj} = 62.1 \text{ ns}$ である.

から最大リアプノフ指数を算出することはできない.

2 つの Response レーザ強度時系列の誤差拡大から最大リアプノフ指数を算出するために, Drive レーザからの光注入を切断した後の Response レーザ強度の時間発展を観測する必要がある. そこで図 7.8(a) に Drive レーザからの光注入の切断前後の Response レーザの強度時系列を示す. 図 7.8(a) において, Response レーザは 10

ns まで Drive レーザの出力信号を有しているが、10 ns で光注入が切断されている。

Response 1 レーザと 2 レーザを比較すると、10 ns までは同じ振る舞いであることが確認できる。10 ns で Drive レーザからの光注入が切断された直後も 2 つの Response レーザの出力強度に違いは観測できないが、20 ns を超えたところで 2 つの Response レーザの強度時系列が異なる振る舞いとなっていることが確認できる。

次に Drive からの光注入を切断する前後の Response 1-2 間のレーザ強度差の時間変化を観測する。しかしながら Response 1-2 間のレーザ強度差をそのまま観測すると大きく揺らいでしまう。そこで Response 1-2 間のレーザ強度差の誤差拡大の観測を容易にするために、レーザ強度差の時系列に対して移動平均を行う。Response 1 および 2 の出力強度をそれぞれ $I_1(t)$, $I_2(t)$ と置き、移動平均された Response 1-2 間のレーザ強度差を $\Delta I(t)$ と置くと、 $\Delta I(t)$ は次のように表される。

$$\Delta I(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} |I_1(t - ih) - I_2(t - ih)| \quad (7.23)$$

ここで h は数値計算における刻み幅を表し、 k は平均化する点数を表す。この時 $T_A = kh$ は平均化に用いられる窓幅 (時間幅) を表す。

図 7.8(b) は (a) に対応する $\Delta I(t)$ の時間変化を示している。縦軸は対数で表示されていることに注意する。図 7.8(b) で $\Delta I(t)$ を計算するために使用した窓幅は $T_A = 2$ ns である。Drive レーザからの光注入が切断されていない 10 ns までの時系列において、 $\Delta I(t)$ は 10^{-3} を下回る小さな値となっている。この点から 2 つの Response レーザが同期していることが分かる。数値計算において同期状態の $\Delta I(t)$ の値はダイナミカルノイズの大きさに依存する。本章の数値計算では D の大きさがノイズ強度に相当するため、 D を増加させると同期状態の $\Delta I(t)$ の大きさも増加する。10 ns で Drive レーザからの光注入が切断されると $\Delta I(t)$ は増加し、25 ns 程度で $\Delta I(t)$ が収束する。Drive レーザからの光注入がない時、2 つの Response レーザ間のレーザ強度差の平均値は 1.90 であるため、図 7.8(b) で $\Delta I(t)$ も 1.90 程度まで増加する。

次に図 7.8(b) の $\Delta I(t)$ に対して指数関数近似を行うことにより、有限時間リアプノフ指数を算出する。リアプノフ指数は状態空間の軌道に与えられた無限小の揺らぎの指数関数的な拡大率を表す。そこでまず図 7.8(b) において、 $\Delta I(t)$ が指数関数的に増加する範囲に対して指数近似を行うことで、 $\Delta I(t)$ の指数関数的拡大率を得る。図 7.8(b) に対して指数近似を行い、有限時間リアプノフ指数を算出した例を図 7.9 に示す。図 7.9 において次のように t_0 から t_1 の範囲に対して指数近似を行う。

$$\Delta I(t) \approx C \exp[\lambda_k t], \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (7.24)$$

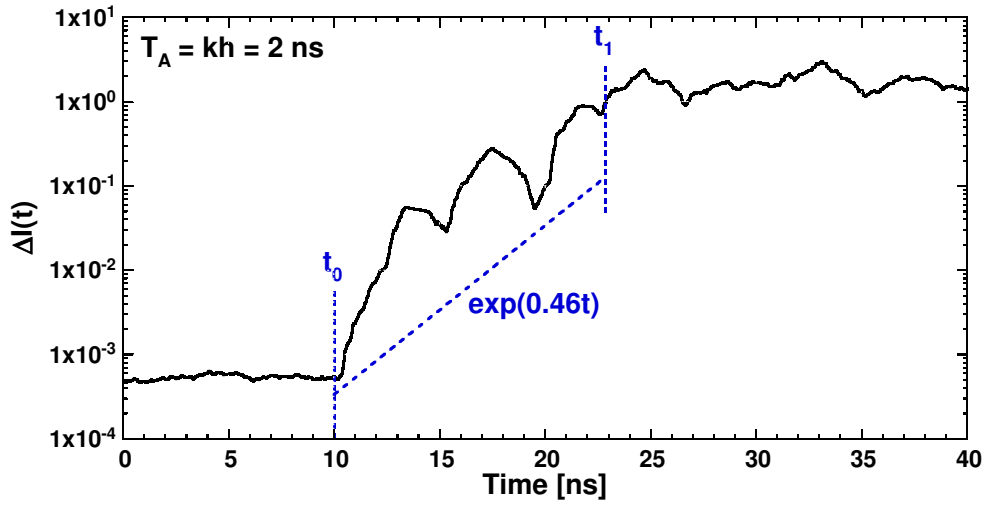


図 7.9: 図 7.8(b) に対して指数近似を行い有限時間リアプノフ指数を算出した例. t_0 は Drive レーザからの光注入が切断された時間であり, t_1 は $\Delta I(t) = 1$ に達した時間を表す. 指数近似により推定された有限時間リアプノフ指数は $\lambda_k = 0.46 \text{ ns}^{-1}$ である.

ここで C は任意の定数である. t_0 と t_1 は指数近似を行う範囲の最初の時間と最後の時間を表す. Drive レーザからの注入光が切断された時間が t_0 に対応する. また t_1 は $\Delta I(t)$ が増大し, 収束した時の時間に対応する. ここで $\Delta I(t) = 1$ となった時に $\Delta I(t)$ が収束したとみなし, この時の時間を t_1 としている. $\Delta I(t) = 1$ を収束判定とした理由は, 2つの Response レーザの強度差の平均値が 1.90 であり, これよりも小さい値を収束判定に用いる必要があるためである. 収束判定のために 1.90 を用いた場合, $\Delta I(t)$ が 1.90 に到達しづらい場合があるため, 誤差拡大率が小さく見積もられてしまうことがある. そのため収束判定のために 1.90 よりも小さい値を用いている. 指数近似により得られる指数部は λ_k で表されており, これが有限時間リアプノフ指数に相当する量である. 図 7.9 において得られた λ_k の値は 0.46 ns^{-1} である.

有限時間リアプノフ指数は状態空間の位置に依存する量であり, 最大リアプノフ指数を算出するためには有限時間リアプノフ指数を平均化する必要がある. そこで Drive レーザからの光注入と切断を繰り返し行い, 有限時間リアプノフ指数を計算し, 平均化することで次のように最大リアプノフ指数を算出する.

$$\lambda_{max} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \lambda_k \quad (7.25)$$

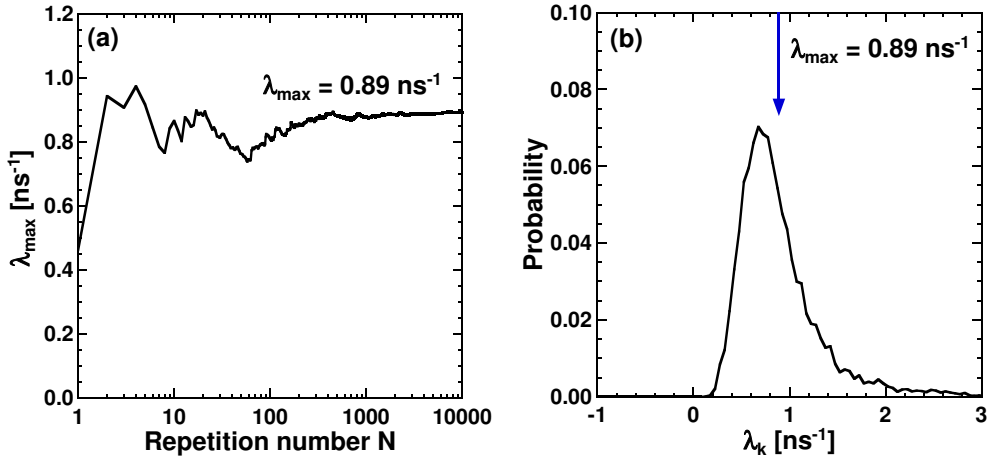


図 7.10: 本章により提案された手法による最大リアプノフ指数の算出結果. (a) は平均回数 N を増加させた時の最大リアプノフ指数の収束の様子を表している. 提案手法により算出された最大リアプノフ指数は $\lambda_{max} = 0.89 \text{ ns}^{-1}$ である. (b) は有限時間リアプノフ指数 λ_k の確率分布を表している.

ここで N は λ_k の計算回数である. 有限時間リアプノフ指数 λ_k を繰り返し算出するために, Drive レーザからの光注入と切断を繰り返し行う必要があるが, Response 1 レーザと 2 レーザが非同期の状態から同期状態に変遷する (つまり $\Delta I(t)$ が十分小さくなる) のに十分な時間待つ必要がある. 本章では同期が達成するまでの時間として 50 ns 待ってから再び Drive レーザからの注入光を切断する.

提案手法による最大リアプノフ指数の算出結果を示す. 図 7.10(a) はリアプノフ指数の平均回数 N を増加させた時の最大リアプノフ指数の収束を表している. この時の $\Delta I(t)$ を算出するための窓幅は $T_A = 2 \text{ ns}$ である. また図 7.10(a) の横軸は対数で表示されていることに注意する. 図 7.10(a) から平均回数 N を増加させることで最大リアプノフ指数 λ_{max} が収束する様子を観測することができる. $N = 10000$ まで平均化することにより, 最大リアプノフ指数 $\lambda_{max} = 0.89 \text{ ns}^{-1}$ が得られている. 一方で図 7.10(b) は有限時間リアプノフ指数 λ_k の確率分布を表している. 平均である $\lambda_{max} = 0.89 \text{ ns}^{-1}$ と比較して 3 倍以上の大きな有限時間リアプノフ指数 λ_k が得られていることが分かる. これは有限時間リアプノフ指数 λ_k を計算するごとに, Drive レーザからの光注入を切断する瞬間の Response レーザの状態が異なるため, Response 1 レーザと 2 レーザの強度差が増加する速さも異なることにより生じる. このようにダイナミカルシステムの不安定性は状態空間の位置により異なる.

7.1.6 線形化方程式を用いて算出された最大リアプノフ指数との比較

本手法により推定された最大リアプノフ指数の妥当性を検証するために、線形化されたモデル方程式を用いて算出された最大リアプノフ指数との比較を行う。本章で提案された手法により推定される最大リアプノフ指数は単体の戻り光を有する半導体レーザの最大リアプノフ指数である。したがって第4章と同様の方法で最大リアプノフ指数の算出を行う。

まず戻り光を有する半導体レーザのダイナミクスを表す方程式を線形化する。その方程式は本章で Drive レーザのダイナミクスを数値計算するために用いた方程式 (7.14)–(7.16) と同じ方程式である。ここで単体の戻り光を有する半導体レーザの状態ベクトルを $\mathbf{x}(t) = (e_{re}(t), e_{im}(t), n(t))^{\dagger}$ と表し、微小揺らぎを $\delta\mathbf{x}(t) = (\delta e_{re}(t), \delta e_{im}(t), \delta n(t))^{\dagger}$ として式 (7.14)–(7.16) を線形化する。ただし \dagger は転置を表し、簡単のため Drive レーザを表す下付きの d は省略した。以下に線形化方程式を示す。

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{J}_t[\mathbf{x}(t)]\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}_{t-\tau}[\mathbf{x}(t-\tau)]\delta\mathbf{x}(t-\tau) \quad (7.26)$$

\mathbf{J}_t および $\mathbf{J}_{t-\tau}$ はそれぞれ $\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{x}(t-\tau)$ の偏微分により得られる 3×3 係数行列である。式 (7.26) の詳細については第 (4) 章の式 (4.33)–(4.50) に示されている。

得られた線形化方程式を用いて微小揺らぎの時間発展を計算し、最大リアプノフ指数の算出を行う。最大リアプノフ指数の詳しい算出手法は第4章に示されている。戻り光の遅延時間 $\tau = 4$ ns を微小時間 $h = 0.005$ ns により離散化し、 τ 内に含まれる離散化された全ての変数を時間 t における状態とみなすことでノルム $d(t)$ を算出する。

$$d(t) = \sqrt{\sum_{i=0}^M (\delta e_{re}^2(t - ih) + \delta e_{im}^2(t - ih) + \delta n^2(t - ih))} \quad (7.27)$$

ここで $M = \tau/h$ である。最大リアプノフ指数 λ_{max} はノルム $d(t)$ を用いて次のように算出することができる。

$$\lambda_{max} = \frac{1}{kh} \sum_{i=1}^k \ln \frac{d(t + (i+1)h)}{d(t + ih)} \quad (7.28)$$

ここで k は λ_{max} を平均化するための計算回数であり、 λ_{max} を収束させるために十分大きくする必要がある。また $d(t)$ は指数関数的に増加するため、 h ごとに微小揺らぎを規格化する必要があることに注意する。

本節において提案された手法により推定された最大リアプノフ指数と線形化方程式を用いて算出された最大リアプノフ指数の比較を行う。図 7.11 は Response レーザ

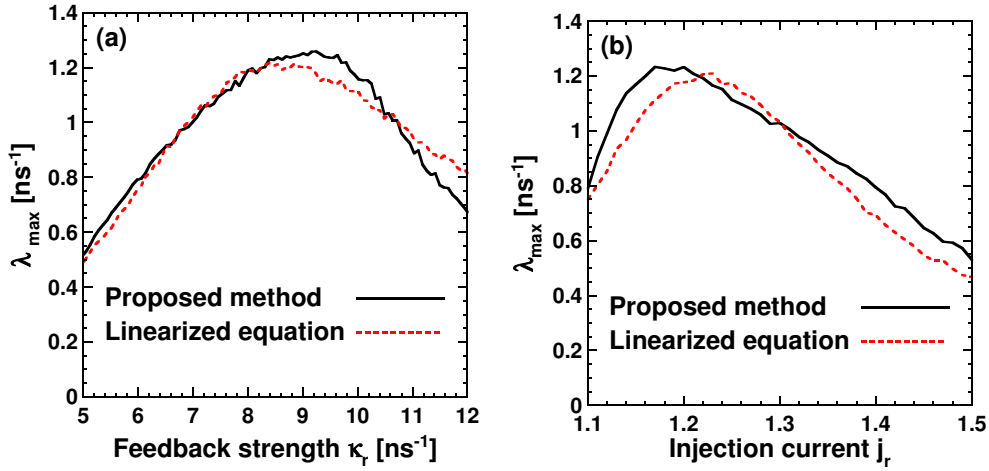


図 7.11: 本章で提案された手法と線形化方程式を用いた手法のそれぞれのより算出された最大リアプノフ指数の比較. (a) は Response レーザの戻り光強度 κ_r , (b) は Response レーザの規格化電流値 j_r をそれぞれ変化させている. 黒の実線は提案手法, 赤の破線は線形化方程式を用いた手法をそれぞれ表す. 線形化方程式を用いた手法の場合, 単体の戻り光を有する半導体レーザの戻り光強度と規格化電流値をそれぞれ変化させている.

の戻り光強度 κ_r および規格化電流値 j_r を変化させた時の最大リアプノフ指数 λ_{max} の変化を表している. 黒の実線は本章で提案された手法を用いて推定された最大リアプノフ指数であり, 赤の実線は線形化方程式を用いて算出された最大リアプノフ指数を表す. 図 7.11 において, 2 つの Response レーザの戻り光強度および規格化電流値を同時に変化させている. また線形化方程式を用いて最大リアプノフ指数を算出する場合, 単体の戻り光を有する半導体レーザの戻り光強度と規格化電流値を変化させている. 図 7.11(a) は戻り光強度 κ_r を変化させた時の最大リアプノフ指数 λ_{max} の変化を表している. $5 \leq \kappa_r \leq 8$ の範囲では黒の実線と赤の破線が良く一致している. しかしながら $\kappa_r \geq 8$ では 2 つの手法により得られた最大リアプノフ指数は少し異なる値となっている. $\kappa_r = 12$ の時, それぞれの手法によりで算出された最大リアプノフ指数は 20% 程度の誤差がある. しかしながらいずれの κ_r に対しても 2 つの手法により算出された最大リアプノフ指数は同程度のオーダーを持つことが分かる. 図 7.11(b) は規格化注入電流 j_r を変化させた時の最大リアプノフ指数 λ_{max} の変化を表している. 2 つの手法により算出された最大リアプノフ指数を比較すると, 多少の誤差は存在するが同程度の値が得られている. また電流値を増加させると最大リアプノフ指数は徐々に増加し, その後減少するという傾向は同じである.

以上の結果から, 戻り光を有する半導体レーザにおける本提案手法を用いた最大

リアプノフ指数の算出は，線形化方程式を用いて算出された値とほぼ同程度となることが分かった．線形化方程式の方法とは異なり，本提案手法は実験システムにも適用可能であり，実験における最大リアプノフ指数の算出方法として有用である．

7.2 光結合された半導体レーザの周波数帯域および自己相関関数と複雑性増加現象の関係調査

戻り光を有する半導体レーザは数 GHz 程度の高速なカオスを生成可能である．これに対して一方向に光結合された 2 つの半導体レーザを用いることで，さらに高速なレーザカオスを生成することができる [108–111]．これは周波数帯域拡大として知られ，2 つの半導体レーザ間の光周波数差に相当する周波数の振動が光注入されたレーザに現れる現象である．この周波数帯域拡大現象は高速物理乱数生成への応用が期待されており，実際に周波数帯域拡大されたレーザカオスを用いた物理乱数生成が行われている [10, 110, 112]．

一方で半導体レーザカオスの高速物理乱数生成への応用におけるレーザカオスの重要なもう 1 つの特徴としてレーザ強度時系列の自己相関関数が挙げられる [113–117]．戻り光を有する半導体レーザは時間遅延フィードバック光を持つため時間遅延システムであり，時間遅延システムの出力波形は遅延時間だけ時間シフトされた波形と自己相関を持つ．この遅延時間の自己相関は時間遅延フィードバックにより生じるため，Time delay signature と呼ばれる [113]．戻り光を有する半導体レーザを用いた高速物理乱数生成への応用のためには，自己相関が無い方がランダム性が高くなると考えられるため，この Time delay signature を減衰させる研究が行われている [113–117]．また逆に時系列から Time delay signature の特徴を用いてシステムの遅延時間を推定する手法も提案されている [99, 118–121]．

周波数帯域および自己相関関数は実験的にも比較的観測が容易であるため，戻り光を有する半導体レーザの高速物理乱数生成への応用においてこれら 2 つの量が調査される．物理乱数の生成速度やランダム性を高めるために，周波数帯域が増加するあるいは自己相関が減衰するパラメータ領域の探索が行われる．しかしながらこの 2 つの量が実際にカオスの複雑性とどのような関係を持つかはこれまでに調査されていない．周波数帯域が高いほど複雑性も高い，あるいは自己相関が小さいほど複雑性が高いといったことが明らかでない．これらの量が増加あるいは減衰されるレーザパラメータ領域の調査や新しいセットアップの提案を行ったとしても，複雑性の観点から本当に重要であるかは分からないと言える．

これに対して複雑性を定量化するための指標として、Permutation entropy[122]やStatistical complexity[123–126]などが挙げられるが、戻り光を有する半導体レーザの高速物理乱数生成への応用においてはリアプノフ指数が重要な複雑性の指標である。これまでに戻り光を有する半導体レーザのエントロピー生成率の評価が行われており、リアプノフ指数はエントロピー生成率ほとんど一致することが分かっている。しかしながら戻り光を有する半導体レーザのリアプノフ指数と周波数帯域や自己相関関数との関連性は調査されていない。特にリアプノフ指数は実験的に算出することが比較的困難であり（特に時間遅延システムのリアプノフ指数の実験的な算出手法は確立されていない）、周波数帯域や自己相関関数の増減とリアプノフ指数の増減に何らかの相関があれば、これらの2つの量を用いて実験的にも容易にリアプノフ指数の最大化を行うことができると期待できる。

そこで本章では一方向に光結合された戻り光を有する半導体レーザにおいて周波数帯域および自己相関関数を数値的に算出し、リアプノフ指数と比較する。

7.2.1 半導体レーザモデル

本章では図7.12に示されているように、1つのレーザから出力された光が一方向にもう1つのレーザに入力されるモデルを考える。入力側のレーザをDriveと呼び、入力される側のレーザをResponseと呼ぶ。Responseレーザは外部の鏡により戻り光を付加されているためカオス状態となっている。一方でDriveレーザは戻り光を持たないため、その出力強度は時間に対して一定である。したがって一定強度のレーザ光がResponseレーザに入力される。

以上のような光結合半導体レーザのResponseレーザダイナミクスを再現する数値モデルであるLang-Kobayashi方程式を以下に示す。

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} = & \frac{1+i\alpha}{2} \left[\frac{G_n(N(t)-N_0)}{1+\epsilon|E(t)|^2} - \frac{1}{\tau_p} \right] E(t) \\ & + \kappa E(t-\tau) \exp(-i\omega_r\tau) \\ & + \sigma E_d \exp[i(\Delta\omega t + \psi)] \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - \frac{G_n(N(t)-N_0)}{1+\epsilon|E(t)|^2} |E(t)|^2 \quad (7.30)$$

E および N は Response レーザの複素電界とキャリア密度を表す。式 (7.29) の右辺第2項は戻り光を表し、 κ は戻り光強度、 τ は戻り光の遅延時間、 $\omega_r = 2\pi f_r$ は

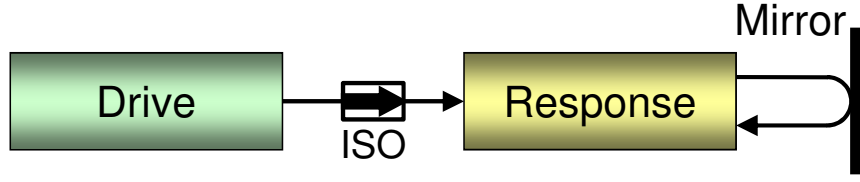


図 7.12: 一方向に光結合された半導体レーザーモデル. Drive レーザから出力された光が Response レーザに注入される. Drive レーザは戻り光を持っていないため, その出力強度は時間に対して常に一定である. 一方で Response レーザは外部の鏡により自身の戻り光が付加されているためダイナミクスがカオスとなる.

Response レーザの光角周波数であり, ここで f_r は Response レーザの光周波数である. また式 (7.29) の第 3 項は Drive レーザからの注入光を表し, E_d は Drive レーザの複素電界, σ は光注入強度を表す. $\Delta\omega = \omega_d - \omega_r$ は Drive レーザと Response レーザの光角周波数差であり, ここで $\omega_d = 2\pi f_d$ は Drive レーザの光角周波数であり, f_d は Drive レーザの光周波数である. また $\Delta\omega$ は Drive レーザと Response レーザの光周波数差 $\Delta f = f_d - f_r$ から $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ として計算される. また他の固定パラメータは, G_n が利得係数, N_0 が光透過時のキャリア密度, ϵ が飽和強度, τ_p が光子寿命, τ_s がキャリア寿命である. J は半導体レーザーの駆動電流値であり, 発振しきい値電流 J_{th} の j_r 倍となるように $J = j_r J_{th}$ として定義される.

Drive レーザは戻り光を持たないため式 (7.29) の第 3 項の E_d は定数となり, 戻り光を持たない時のレーザーの定常解 (平衡点) を用いて定義できる. そこで式 (7.29) の戻り光および注入光が無い方程式と式 (7.30) を Drive レーザのレート方程式とみなし, 定常解 $E_s = A_s \exp(i(\omega_s - \omega_d))$ と N_s を仮定することで戻り光を持たない半導体レーザーの定常解を算出する. 以上のような仮定を用いると以下の定常解を得ることができる.

$$A_s^2 = \frac{G_n \tau_p N_{th} (j_d - 1)}{G_n \tau_s + \epsilon} \quad (7.31)$$

$$\omega_s = \omega_d \quad (7.32)$$

$$N_s = \frac{G_n \tau_s + j_d \epsilon}{G_n \tau_s + \epsilon} N_{th} \quad (7.33)$$

Drive レーザの複素電界は定常解となることから $E_d = E_s = A_s \exp(i(\omega_s - \omega_d))$ であり, 式 (7.32) から $\omega_s = \omega_d$ であるため, $E_d = A_s$ となる. j_d は発振しきい値電流 J_{th} で規格化された Drive レーザの駆動電流値であり, これが Drive レーザの強度を変化させる. 本章では $j = 1.11$ を用いる.

数値計算においてリアプノフ指数を算出する場合, E と N の変化のオーダーが

異なることが問題となるため、方程式の無次元化を行う。無次元化のための定数 \bar{E} , \bar{N} , \bar{t} を用いて $E = \bar{E}e$, $N = \bar{N}n$, $t = \bar{t}t'$ として式 (7.29) と (7.30) に代入し、係数を整理すると以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} = & (1 + i\alpha) \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'|e(t)|^2} - \gamma_e \right] e(t) \\ & + \kappa e(t - \tau) \exp(-i\omega_r \tau) \\ & + \sigma' e_d \exp[i(\Delta\omega t + \psi)] \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \gamma_n(jn_{th} - n(t)) - \frac{g_n(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'|e(t)|^2} |e(t)|^2 \quad (7.35)$$

g_e , ϵ' , n_0 , γ_e , γ_n , n_{th} , g_n は整理のために用いた新しい係数であり、第3章で無次元化のために用いたものと同じである。 σ' は時間 $t' = 10^{-9}$ で規格化された戻り光強度を表し、次のように定義される。

$$\sigma' = t'\sigma = \frac{1}{\tau_{in}} \frac{(1 - r_2^2)r_3}{r_2} \quad (7.36)$$

戻り光強度 σ は外部鏡反射率 r_3 を変えることにより変化させる。また e_d は Drive レーザの電界であり、 $e_d = E_d/\bar{E}$ として得られる。また時間 t は $\bar{t}t' \rightarrow t$ とし、無次元化された値を新たに t として用いており、時間に関する定数 ω_d , ω_r , τ も同様である。さらに数値計算における複素計算を避けるために、式 (7.34) および (7.35) の複素電界 e を実部と虚部に分離した方程式を用いることにする。

$$\begin{aligned} \frac{de_{re}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} - \gamma_e \right] (e_{re}(t) - \alpha e_{im}(t)) \\ & + \kappa[e_{re}(t - \tau) \cos(\omega_r \tau) + e_{im}(t - \tau) \sin(\omega_r \tau)] \\ & + \sigma e_d \cos(\Delta\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{im}(t)}{dt} = & \left[\frac{g_e(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} - \gamma_e \right] (\alpha e_{re}(t) + e_{im}(t)) \\ & + \kappa[-e_{re}(t - \tau) \sin(\omega_r \tau) + e_{im}(t - \tau) \cos(\omega_r \tau)] \\ & + \sigma e_d \sin(\Delta\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (7.38)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \gamma_n(jn_{th} - n(t)) - \frac{g_n(n(t) - n_0)}{1 + \epsilon'(e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t))} (e_{re}^2(t) + e_{im}^2(t)) \quad (7.39)$$

Symbol	Parameter	Value
G_N	Gain coefficient	$8.40 \times 10^{-13} \text{ m}^3/\text{s}$
N_0	Carrier density at transparency	$1.40 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$
τ_p	Photon lifetime	$1.927 \times 10^{-12} \text{ s}$
τ_s	Carrier lifetime	$2.04 \times 10^{-9} \text{ s}$
τ_{in}	Roundtrip time in internal cavity	$8.0 \times 10^{-12} \text{ s}$
r_2	Reflectivity of laser facet	0.556
α	Linewidth enhancement factor	3
λ_d	Optical wavelength of the drive laser	$1.537 \times 10^{-6} \text{ m}$
c	Speed of light	$2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$
N_{th}	Carrier density at threshold	$2.018 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$
J_{th}	Injection current at threshold	$9.892 \times 10^{32} \text{ m}^{-3}\text{s}^{-1}$
ω_d	Optical angular frequency of the drive laser	$1.215 \times 10^{15} \text{ rad/s}$
ϵ	Gain saturation coefficient	2.0×10^{-23}
κ	Feedback strength of the response laser	6.2 ns^{-1}
σ	Injection strength from the drive to the response	31.1 ns^{-1}
j_d, j_r	Normalized injection current of the drive and the response lasers	1.11, 1.36
L	External cavity length of the response laser	0.3 m
τ	Roundtrip time in external cavity of the response laser (feedback delay time)	2.001 ns
Δf	Initial optical-frequency detuning between the drive and response lasers	Variable

表 7.2: レーザパラメータ

以上の3つの方程式を用いて数値計算を行う．このような光結合された半導体レーザにおいて，Response レーザの出力強度の周波数帯域拡大を観察することができる．周波数帯域拡大を観察するために，2つのレーザ間の光周波数差 $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi)$ が非常に重要である．なぜならば2つの光周波数差により生じるビート周波数が Response レーザに出現するためである．またこのビート周波数の振幅は入力光の強さに依存するため，Drive レーザから Response レーザへの光注入強度 σ も周波数帯域拡大のために重要である．したがって本章では上記の2つのパラメータを変化させる．また最後に本章で用いるレーザパラメータを表 7.2 に示す．

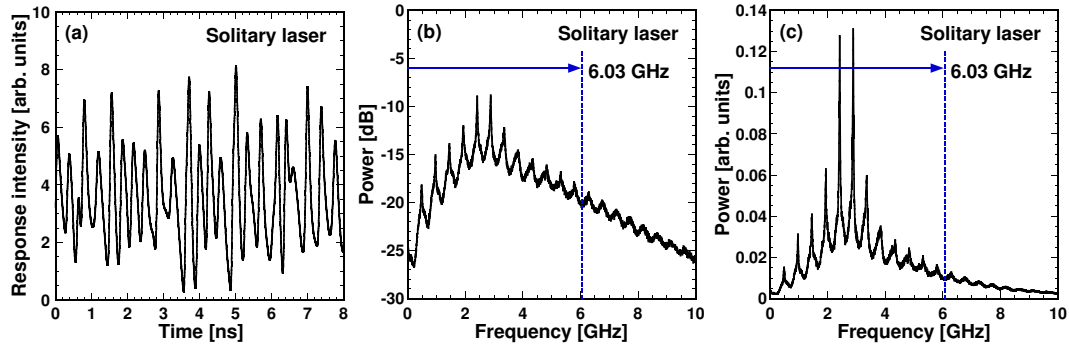


図 7.13: 単体の戻り光を有する半導体レーザのカオス状態の (a) 強度時系列, (b) 周波数スペクトル, (c) 周波数スペクトル (縦軸を線形表示). この時の外部共振器長 L は $L = 0.3$ m であり, 戻り光の外部共振周波数は 0.5 GHz である. また周波数スペクトルから得られた周波数帯域は 6.03 GHz である.

7.2.2 周波数帯域の定義

周波数帯域はアナログ信号に対してどのぐらいの幅の周波数領域が有効かを示す量である. 一般的な (カオスでない) アナログ信号に対する周波数帯域の定義としてパワーの最大値から -3dB 以内に含まれる周波数の幅が良く用いられる. しかしながらカオスは一般的な信号と比較して非常にブロードな周波数スペクトルを持つため, 異なる定義を用いる必要があると考えられる. これまでにカオス信号の周波数帯域の定義はいくつか提案されている [127–129]. これまでに最も良く用いられている周波数帯域は, 周波数スペクトルの DC 成分からパワーの和を計算し総和の 80% となる周波数として定義される. 本章ではこの定義を用いて周波数帯域の算出を行う.

図 7.13 に周波数帯域の計算例を示す. 図 7.13(a) は単体 (つまり注入強度 $\sigma = 0$ ns^{-1}) の戻り光を有する半導体レーザのカオス強度時系列である. 図 7.13(b) は (a) と同じパラメータを用いて得られた時系列に対して高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform, FFT) を適用し, 各周波数に対するパワーを対数 (dB) 表示した結果である. FFT に用いたレーザ強度時系列の点数は 2^{17} であり, この時の数値計算の刻み幅が 0.002 ns であるため, 262.144 ns の時系列に相当する. また周波数スペクトルは 200 回の平均を行っている. 図 7.13(c) は (b) のパワーを線形表示した結果である. 本章で用いる周波数帯域は, 図 7.13(c) において全ての周波数のパワーの和を算出し, その後に 0 GHz からのパワーの和が 80% となる周波数として計算される. 図 7.13(c) では 6.03 GHz の周波数帯域が得られる. より高い周波数が大きなパワーを持ち, またパワーの大きな範囲が広ければ広いほど周波数帯域は大きくなる. 本

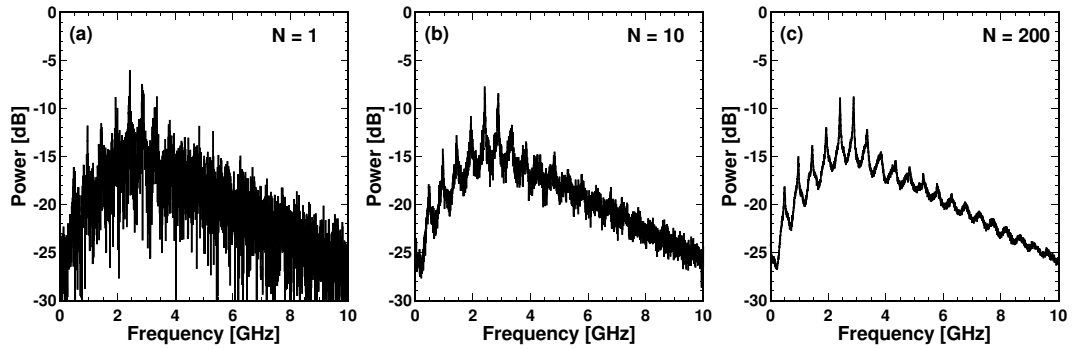


図 7.14: 平均化回数 N を増加させた時の周波数スペクトルの変化. それぞれの図において平均化回数は (a) $N = 1$, (b) $N = 10$, (c) $N = 200$ が用いられている. また (c) は図 7.13(b) と同じ周波数スペクトルである.

章では 0 GHz から 50 GHz のパワーの和を全体の和とみなす. 図 7.13(c) において周波数が 50 GHz のパワーは 2.20×10^{-5} であり, 最大パワー (1.31×10^{-1}) と比べて小さく, また最大パワーの周波数 (2.88 GHz) よりも十分大きな周波数までの和を計算しているため, 周波数帯域の計算に用いるのに十分な範囲である.

また周波数帯域の計算を正確に行うために, 周波数スペクトルの平均化を行う必要がある. 図 7.14 は周波数スペクトルの平均化回数 N を増加させた時の周波数スペクトルの変化の様子を表している. 図 7.14 の 3 つの図の平均化回数 N はそれぞれ (a) が $N = 1$, (b) が $N = 10$, (c) が $N = 200$ であり, (c) は図 7.13(b) と同じ図である. 平均化回数 N を増加させることにより周波数スペクトルの外部共振周波数に対応するピーク間隔が明瞭になるのが分かる (図 7.14 の外部共振器長は $L = 0.3$ m であり, 外部共振周波数 0.5 GHz に相当). 特に平均化されていない $N = 1$ の場合 (図 7.14(a)), 隣り合う周波数のパワーの増減が大きく, 周波数スペクトルの特徴が捉えづらい. これに対して平均化回数 N を増加させると周波数スペクトルが収束することが確認できる. 以上のように平均化を行うことにより周波数スペクトルが収束するため, 周波数帯域の計算において平均化された周波数スペクトルを用いるのが好ましい. 本章では $N = 200$ として周波数スペクトルの平均化を行う.

7.2.3 自己相関関数の評価方法

自己相関関数はカオス時系列の解析にしばしば用いられる. あるカオス時系列の自己相関関数を調査した時, 時間シフトさせる大きさを増加させるにつれて相関は

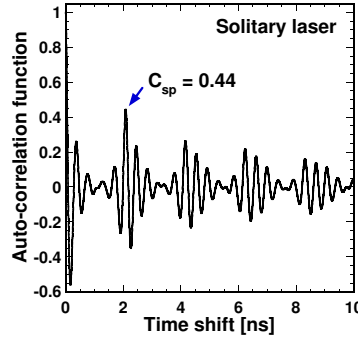


図 7.15: 単体の戻り光を有する半導体レーザのレーザ強度の自己相関関数．レーザパラメータは図 7.13 と同じものを用いており，この時外部共振器長が $L = 0.3$ m であるため，遅延時間 τ は $\tau \approx 2$ ns である．自己相関関数のセカンドピーク C_{sp} の値は $C_{sp} = 0.44$ である．

減少するが，相関が減少する速さが速いほど複雑なカオスであると期待できる．戻り光を有する半導体レーザのような時間遅延ダイナミカルシステムの場合，時間遅延フィードバックの遅延時間だけ時間シフトさせた時系列との自己相関が増加するという特徴が観察される．図 7.15 は単体の戻り光を有する半導体レーザの自己相関関数である．以下に本章で用いる自己相関関数の計算式を示す．

$$C_A(T) = \frac{\langle (I(t) - \bar{I})(I(t+T) - \bar{I}_T) \rangle}{\sigma \sigma_T}, \quad (7.40)$$

ここで I はレーザ強度， \bar{I} は $0 \text{ ns} \leq t \leq 10 \text{ ns}$ の間で平均化されたレーザ強度， \bar{I}_T は $T \text{ ns} \leq t \leq T + 10 \text{ ns}$ の間で平均化されたレーザ強度， σ および σ_T はそれぞれ $0 \text{ ns} \leq t \leq 10 \text{ ns}$ および $T \text{ ns} \leq t \leq T + 10 \text{ ns}$ の間のレーザ強度の標準偏差を表す．また図 7.15 は 100 個の $C_A(T)$ の平均を計算している． $\langle \cdot \rangle$ は $0 \text{ ns} \leq t \leq 10 \text{ ns}$ の間の時間平均を表す．図 7.13 と同じレーザパラメータが用いられている．この時の外部共振器長 L は $L = 0.3$ m であり，遅延時間 τ は $\tau = 2L/c$ (c は光速) として計算され， $\tau \approx 2$ ns が得られる．図 7.15 の自己相関関数において 2 ns ごとにピークが現れており，遅延時間の特徴が観察できる．これは時系列からシステムの遅延時間を推定することができることを示唆するため，カオス秘匿通信などの応用のためには自己相関関数における遅延時間の特徴は観測不可能であることが望ましい．また戻り光を有する半導体レーザの高速物理乱数生成への応用において，大きな自己相関を持つレーザカオス時系列を用いて生成された物理乱数も自己相関を持つと考えられるため，自己相関は極力低減させなければならない．

自己相関関数の評価手法はこれまでに減衰の速さという方法が用いられている

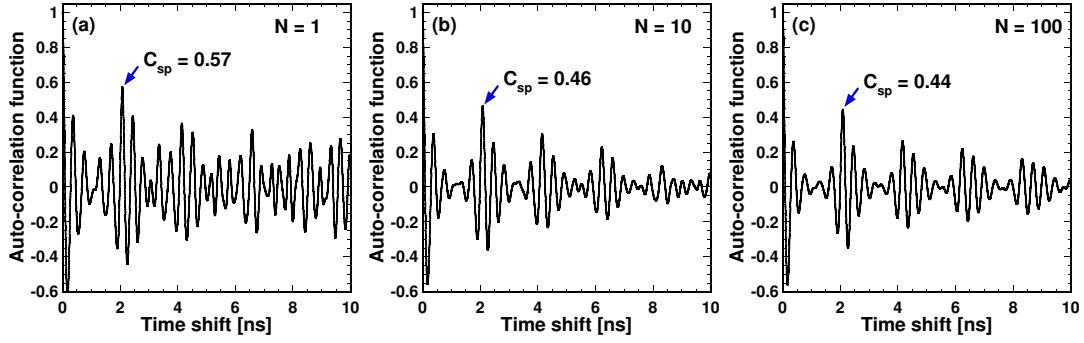


図 7.16: 平均化回数 N を増加させた時の自己相関関数の変化. それぞれの図において平均化回数は (a) $N = 1$, (b) $N = 10$, (c) $N = 100$ が用いられている. また (c) は図 7.15 と同じ自己相関関数である.

[130]. 自己相関関数の減衰が速いほど複雑なカオスであると考えられるためである. これに対して本章では自己相関関数のセカンドピーク C_{sp} を用いて評価を行う. 自己相関関数のセカンドピークは減衰の速さを算出するよりも容易であり, またセカンドピークが小さいほど減衰の速さも速いことが期待できる. 図 7.15 では自己相関関数のセカンドピーク $C_{sp} = 0.44$ が得られている.

周波数スペクトルと同様に, 自己相関関数も平均化を行う必要がある. 図 7.16 は平均化回数 N を増加させた時の自己相関関数の変化を示している. 平均化回数 N を増加させるにつれて遅延時間 $\tau \approx 2$ ns 毎に現れるピークが明瞭となり, 自己相関関数が収束していく様子が観測できる. 特に $N = 1$ と $N = 100$ のセカンドピーク C_{sp} の値はそれぞれ $C_{sp} = 0.57$, 0.44 であり異なるため, 正確なセカンドピークの値を得るために自己相関関数の平均化は必要であることが分かる. 本章では平均化回数 $N = 100$ を用いる.

7.2.4 Lang-Kobayashi 方程式の線形化と最大リアプノフ指数の算出方法

リアプノフ指数を算出するために方程式 (7.37)–(7.39) を線形化する. Response レーザの基準となるカオス軌道 $\mathbf{x}^\dagger = (e_{re}, e_{im}, n)$ に対して微小な揺らぎ $\delta \mathbf{x}^\dagger = (\delta e_{re}, \delta e_{im}, \delta n)$ を与えた軌道 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ を考える. ここで \dagger は転置を表す. $\bar{\mathbf{x}}$ を方程式 (7.37)–(7.39) に代入し, 基準軌道 \mathbf{x} のまわりで線形化することで, 以下のように表される線形化方程式を得ることができる.

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{J}_t[\mathbf{x}(t)]\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{J}_{t-\tau}[\mathbf{x}(t-\tau)]\delta\mathbf{x}(t-\tau) \quad (7.41)$$

上記の線形化方程式 (7.41) は第 4 章で導出された単体の戻り光を有する半導体レーザの線形化方程式 (4.32) と同じである．本章で用いる数値モデル (7.37)–(7.39) は Drive レーザからの注入光を持つが，Drive レーザは戻り光を持たないために出力強度が一定で常に安定ある．したがって Drive レーザの誤差拡大を考える必要がないため，線形化方程式において Drive レーザに直接関係する項が消える．このため本章で用いる式 (7.37)–(7.39) の線形化方程式 (7.41) は単体の戻り光を有する半導体レーザの線形化方程式 (4.32) と一致する．しかしながら Response レーザのカオス軌道は Drive レーザの注入光により単体の戻り光を有する半導体レーザとは異なるため，Drive レーザからの注入光は間接的に微小誤差 $\delta\mathbf{x}$ の時間発展に影響を与える．

以上のようにして得られる線形化方程式 (詳細は第 4 章を参照) を数値積分し，微小誤差 $\delta\mathbf{x}$ の時間発展を用いてリアプノフ指数を算出する．リアプノフ指数の詳しい算出手法は第 4 章に示されている．戻り光の遅延時間 $\tau \approx 2 \text{ ns}$ を微小時間 $h = 0.002 \text{ ns}$ により離散化し， τ 内に含まれる離散化された全ての変数を時間 t における状態とみなすことでノルムを算出する．

$$d(t) = \sqrt{\sum_{i=0}^M (\delta e_{re}^2(t - ih) + \delta e_{im}^2(t - ih) + \delta n^2(t - ih))} \quad (7.42)$$

ここで $M = \tau/h$ である．最大リアプノフ指数 λ_{max} はノルム $d(t)$ を用いて次のように算出することができる．

$$\lambda_{max} = \frac{1}{kh} \sum_{i=1}^k \ln \frac{d(t + (i+1)h)}{d(t + ih)} \quad (7.43)$$

ここで k は λ_{max} を平均化するための計算回数であり， λ_{max} を収束させるために十分大きくする必要がある．また $d(t)$ は指数関数的に増加するため， h ごとに微小揺らぎを規格化する必要があることに注意する．

7.2.5 光結合された半導体レーザの周波数帯域と自己相関関数の変化

本節では光結合された戻り光を有する半導体レーザにおいて、レーザ間の光周波数差 Δf を変化させた時の Response レーザのレーザ強度時系列、周波数帯域、自己相関関数の変化を示す。まず比較のため図 7.17(a1), (b1), (c1) に Drive レーザからの光注入が無い時 ($\sigma = 0 \text{ ns}^{-1}$) の Response レーザの時系列、周波数スペクトル、自己相関関数を示す。この時の周波数帯域は 6.03 GHz である。単体の戻り光を有する半導体レーザの周波数スペクトルのピークの周波数は半導体レーザの緩和発振周波数に近くなるため、緩和発振周波数が大きいほど周波数帯域が増加する。また半導体レーザの緩和発振周波数は規格化駆動電流値 j と共に増加するため、電流値が大きいほど大きな周波数帯域が得られることが期待できる。本章では $j = 1.36$ を使用しており、この時の緩和発振周波数は 3 GHz 程度となり、図 7.17(b1) のピーク周波数に近いことが分かる。一方で図 7.17(c1) において自己相関関数のセカンドピーク C_{sp} は $C_{sp} = 0.44$ である。セカンドピークは時間シフトが 2 ns の時に得られており、これは戻り光の遅延時間 $\tau = 2 \text{ ns}$ と一致する。

次に Drive レーザから Response レーザに光注入が有る場合の結果を示す。図 7.17(a2), (b2), (c2) は Drive レーザからの光注入強度 $\sigma = 31.1 \text{ ns}^{-1}$ 、光周波数差 $\Delta f = -18 \text{ GHz}$ の時のレーザ強度の時系列、周波数スペクトル、自己相関関数をそれぞれ表している。図 7.17(a2) の時系列の横軸の範囲が図 7.17(a1) よりも狭いことに注意する。光注入が無い時と比べて、明らかに時系列が速い振動成分を有していることが分かる。図 7.17(b2) の光周波数スペクトルを見ると、3 GHz 付近と 17 GHz 付近で高いパワーを有していることが分かる。3 GHz 付近のパワーは半導体レーザの緩和発振周波数によるもので、これは光注入が無い時にも観察されている。一方で 17 GHz 付近のパワーの増加は Drive-Response 間の光周波数差のため生じるビート周波数によるものである。この時の周波数帯域は 16.80 GHz であり、光注入が無い時よりも増加していることが分かる。このように光結合された半導体レーザでは 2 つのレーザ間の光周波数差に相当する振動成分を観測することができ、このため周波数帯域が拡大する。一方で光周波数差 $\Delta f = -18 \text{ GHz}$ であるのに対して、17 GHz の振動成分が増加しており、光周波数差 Δf と少し異なる。この理由は Response レーザが戻り光を有しているためである。戻り光を有する半導体レーザの光周波数は、戻り光を持たない場合と比べて光周波数が減少する。これは半導体レーザが比較的大きな線幅増幅係数を持つために生じる。したがって光注入前の光周波数差 Δf と Response レーザに現れるビート周波数は完全に一致しない。また戻り光を有する半導体レーザの光周波数は戻り光を持たない場合と比べて、光周波数が時間的に大きく変化する。このため Response レーザの周波数帯域拡大により生じるパワーの増加は広がりを持つ。これはよりフラットな周波数スペクトルを

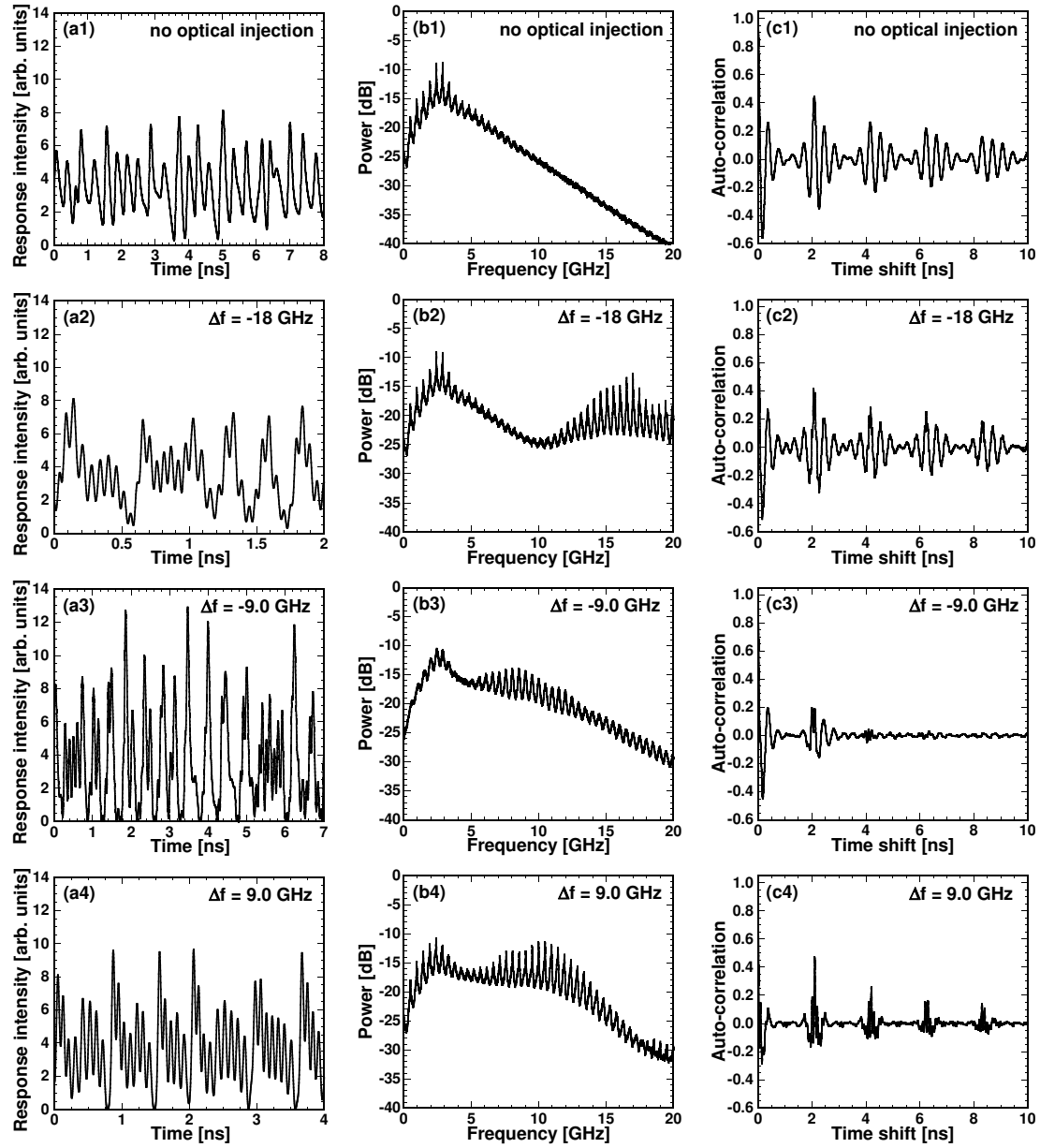


図 7.17: Response レーザの (a) レーザ強度時系列, (b) 周波数スペクトル, (c) 自己相関関数を表している. 図中のラベルの数字は (1) Drive レーザからの光注入が無い場合, 光周波数差 (2) $\Delta f = -18$ GHz, (3) $\Delta f = -9$ GHz, (4) $\Delta f = 9$ GHz の場合を表している. (b) においてそれぞれの周波数帯域は (1) 6.03 GHz, (2) 16.80 GHz, (3) 9.98 GHz, (4) 11.34 GHz である. (c) においてそれぞれの C_{sp} は (1) 0.44, (2) 0.50, (3) 0.20, (4) 0.47 である. また (1)–(4) のそれぞれの場合の最大リアプノフ指数 λ_{max} は (1) 1.08 ns^{-1} , (2) 1.12 ns^{-1} , (3) 3.31 ns^{-1} , (4) 1.14 ns^{-1} である.

有するカオスを生成するために重要であると考えられる。

また図 7.17(c2) から光周波数差 $\Delta f = -18$ GHz の時の自己相関関数において $C_{sp} = 0.50$ が得られている。光注入が無い時との大きな違いは、セカンドピークが戻り光の遅延時間 τ とは異なる時間シフトの時に得られていることである。この時の C_{sp} が得られている時間シフトは 0.05 ns であり、0.05 ns の逆数 (20 GHz) は光周波数差 Δf に近いことが分かる。このように大きな光周波数差により速い振動成分が生じると、自己相関関数のセカンドピークが得られる時間シフトが遅延時間 τ と異なる場合がある。一方で遅延時間 τ 付近の自己相関のピーク値は $C_{sp} = 0.42$ であり、光注入が無い場合と同程度である。

次に光周波数差 $\Delta f = -9$ GHz の場合の時系列、周波数スペクトル、自己相関関数を図 7.17(a3), (b3), (c3) に示す。時系列を比較すると、図 7.17(a3) は (a1), (a2) よりも大きな振幅を有している。また図 7.17(b3) から周波数スペクトルは光周波数差 $\Delta f = -9$ GHz に相当する周波数付近でパワーの増加が観察される。この時の周波数帯域は 9.98 GHz であり、図 7.17(b2) と比較すると周波数帯域は小さいが、光注入が無い場合よりも増加している。一方で図 7.17(c3) の自己相関関数から $C_{sp} = 0.20$ であり、図 7.17(c1) および (c2) よりも小さい値が得られた。また C_{sp} が得られる時間シフトは遅延時間 $\tau \approx 2$ ns と同程度であり、図 7.17(c2) の場合とは異なる。

最後に図 7.17(a4), (b4), (c4) に光周波数差 $\Delta f = 9$ GHz の時のレーザ強度の時系列、周波数スペクトル、自己相関関数をそれぞれ示す。光周波数差の符号が図 7.17(a3), (b3), (c3) の場合と逆であることに注意する。まず図 7.17(a4) の時系列を観察すると、振幅は図 7.17(a2) や (a1) と同程度である。特徴的な点は強度が 0 付近に近づいた後に比較的大きな振幅が現れるという振る舞いが観測されることである。また図 7.17(c3) と比較すると、常に速い振動が観測される。この時の周波数スペクトルが図 7.17(b4) に示されており、周波数帯域は 11.34 GHz となっている。一方で図 7.17(c4) から $C_{sp} = 0.47$ であり、図 7.17(c1), (c2) と同程度である。光周波数差が $\Delta f = -9$ GHz の時の周波数スペクトルである図 7.17(b3) と比較すると、図 7.17(b4) は 10 GHz 付近のパワーが増加している点が異なる。このため $\Delta f = -9$ GHz の時よりも $\Delta f = 9$ GHz の時の方が周波数帯域が増加している。光周波数差の正負でパワーが増加する周波数が異なる理由は、戻り光により Response レーザの光周波数が減少するためである。光周波数差が正の場合 ($\Delta f = f_d - f_r > 0$)、戻り光により Response レーザの光周波数が減少するが、Drive レーザの光周波数は変化しないため、実光周波数差は増加する。逆に光周波数差が負の場合 ($\Delta f = f_d - f_r < 0$) は実光周波数差は減少する。以上のように Response レーザに戻り光を付加した場合には正の光周波数差の時により周波数帯域が拡大される。

また一方向に光結合された半導体レーザにおいて Drive レーザと Response レーザの光周波数差の正負の関係は同期において重要であることが知られている [26, 103, 131–133]. 半導体レーザは比較的大きな線幅増幅係数を持つため、負の光周波数差、つまり $\Delta f = f_d - f_r < 0$ から、Response レーザの光周波数が Drive の光周波数よりも大きい時に光周波数の引き込み現象 (インジェクションロッキング) が生じやすいからである. インジェクションロッキングが発生した場合、2つのレーザの光周波数は一致するためビート周波数が生じず、周波数帯域拡大が達成されない. したがって周波数帯域拡大を達成するためには正の光周波数差が良く用いられる.

以上の4つの光周波数差の場合について周波数帯域および自己相関関数の C_{sp} の変化について整理する. 周波数帯域は光周波数差 $\Delta f = -18$ GHz の時に最も高い値が得られた. この理由は光周波数差に相当するビート周波数が Response レーザのダイナミクスに現れるため、光周波数差の大きさに依存して周波数帯域も増加するからである. また光周波数差の正負については、正の光周波数差の方が大きな周波数帯域が得られることが分かった. 一方で自己相関関数の C_{sp} は $\Delta f = -9$ GHz の時に最も小さな値 $C_{sp} = 0.20$ が得られた. 他の3つの光周波数差の時の C_{sp} は同程度となった.

次に図 7.17 の4つの場合に対応する最大リアプノフ指数の変化を示す. Drive レーザからの光注入が無い場合、光周波数差 $\Delta f = -18$ GHz, -9 GHz, 9 GHz の場合のそれぞれについて、最大リアプノフ指数 λ_{max} は $\lambda_{max} = 1.08 \text{ ns}^{-1}$, 1.12 ns^{-1} , 3.31 ns^{-1} , 1.14 ns^{-1} が得られた. 光周波数差 $\Delta f = -9$ GHz の時に最も大きな最大リアプノフ指数 $\lambda_{max} = 3.31 \text{ ns}^{-1}$ が得られた. 一方で光周波数差 $\Delta f = -18$ GHz, 9 GHz の時の最大リアプノフ指数は Drive レーザからの光注入が無い場合と同程度である. これは Drive レーザからの光注入が Response レーザの状態空間における軌道の不安定性にほとんど変化を与えていないことを意味する. 以上のように最大リアプノフ指数が増加する光周波数差が存在することが分かる.

7.2.6 周波数帯域および自己相関関数の最大リアプノフ指数との比較

周波数帯域および自己相関関数の C_{sp} の変化と最大リアプノフ指数の変化を比較し、それぞれの変化の関連性を調査する. Drive レーザと Response レーザの光周波数差 Δf の変化に対する周波数帯域および自己相関関数の C_{sp} , 最大リアプノフ指数の変化を図 7.18 に示す. この時の光注入強度 $\sigma = 31.1 \text{ ns}^{-1}$ であり, Response レーザの戻り光強度 $\kappa = 6.2 \text{ ns}^{-1}$ の5倍程度である. 周波数帯域拡大を観測するために比較的強い注入強度を用いているが、高い注入強度はインジェクションロッキング

を生じてしまう．そのため光周波数差 Δf の大きさが小さい場合に，Response レーザのダイナミクスがカオスでなくなる場合があることに注意する．

図 7.18(a) は周波数帯域の変化を表している． $-8 \text{ GHz} \leq \Delta f \leq -2 \text{ GHz}$ の範囲において周波数帯域が 0 GHz となっている．これは Response レーザの出力強度が一定となっており，周波数帯域を計算することができないため 0 GHz としている．Response レーザの出力強度が一定となる理由は Drive レーザにインジェクションロッキングされるためである．Drive レーザは戻り光を持たないためその出力強度は一定であり，Response レーザがインジェクションロッキングされると Response レーザの出力強度も一定となる．また $-2 \text{ GHz} \leq \Delta f \leq 5 \text{ GHz}$ の範囲で Response レーザのダイナミクスは周期状態となっている．このように光周波数差 Δf が小さすぎると Response レーザのダイナミクスがカオスでなくなるため，高速物理乱数生成への応用のためにはある程度光周波数差 Δf を大きくする必要がある．一方で図 7.18(a) の $\Delta f < -8 \text{ GHz}$ および $\Delta f > 5 \text{ GHz}$ の範囲では光周波数差 Δf の大きさを正または負の方向に増加させると，周波数帯域も増加することが分かる．この範囲の周波数帯域はいずれも Drive レーザからの光注入が無い場合よりも大きい．図 7.18(a) に示されている範囲では図の両端 ($\Delta f = \pm 20 \text{ GHz}$) において周波数帯域が最も高くなっているが，さらに Δf の大きさを増加させるとさらに周波数帯域は増加する．以上のように周波数帯域は光周波数差の大きさ $|\Delta f|$ が大きいほど増加する．この理由は $|\Delta f|$ が大きいほど大きなビート周波数が Response レーザのダイナミクスに現れるからである．

次に図 7.18(b) に自己相関関数のセカンドピーク C_{sp} の変化を示す．まず Response レーザのダイナミクスがカオスでない光周波数差の範囲 $-8 \text{ GHz} \leq \Delta f \leq 5 \text{ GHz}$ において $C_{sp} = 1$ である．Response レーザの出力強度が一定の場合 ($-8 \text{ GHz} \leq \Delta f \leq -2 \text{ GHz}$)，自己相関関数を計算することができないため， $C_{sp} = 1$ としている． $C_{sp} = 1$ となる範囲以外では，まず $\Delta f = -9 \text{ GHz}$ の時に C_{sp} が最少となっている． $-17 \text{ GHz} \leq \Delta f \leq -12 \text{ GHz}$ および $9 \text{ GHz} \leq \Delta f \leq 15 \text{ GHz}$ の範囲において C_{sp} は Drive レーザからの光注入が無い場合 ($C_{sp} = 0.44$) と同程度である．光周波数差 Δf が比較的大きな範囲 ($\Delta f < -17 \text{ GHz}$ および $\Delta f > 15 \text{ GHz}$) では光周波数差の大きさ $|\Delta f|$ の増加と共に C_{sp} も増加する．この光周波数差の大きさ $|\Delta f|$ と共に C_{sp} が増加する範囲では， C_{sp} が得られる時間シフトが遅延時間 $\tau = 2 \text{ ns}$ とは異なり (図 7.17(c2) 参照)， 0 ns に近い値で C_{sp} が得られる．

次に複雑性の変化を示す．図 7.18(c) は光周波数差 Δf を変化させた時の最大リアプノフ指数 λ_{max} の変化を表している．Drive レーザからの光注入が無い場合の最大リアプノフ指数は $\lambda_{max} = 1.08 \text{ ns}^{-1}$ であり，この値を超える λ_{max} が光注入により得られることが望ましい．まず $-8 \text{ GHz} \leq \Delta f \leq 5 \text{ GHz}$ の範囲では $\lambda_{max} \leq 0$

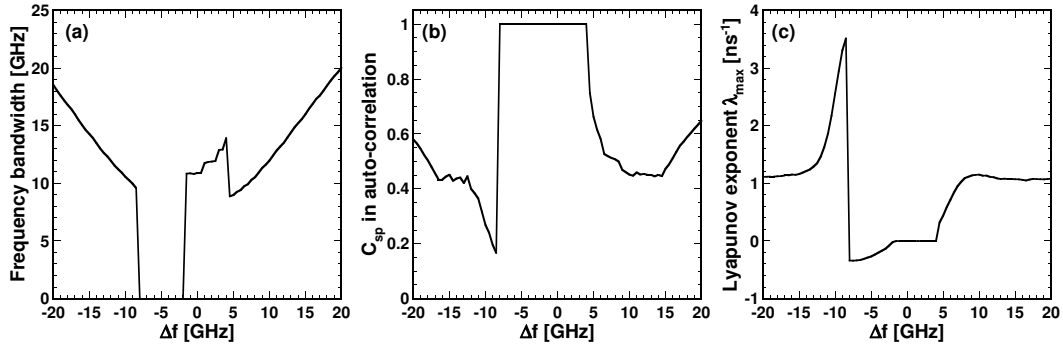


図 7.18: Drive-Response 間の光周波数差 Δf を変化した時の Response レーザの (a) 周波数帯域, (b) 自己相関関数のセカンドピーク C_{sp} , 最大リアプノフ指数 λ_{max} の変化を示している.

ns^{-1} であり, Response レーザのダイナミクスがカオスではないことが分かる. 一方で $-14.0 \text{ GHz} \leq \Delta f \leq -8.5 \text{ GHz}$ の範囲では最大リアプノフ指数が $\lambda_{max} > 1.20 \text{ ns}^{-1}$ であり, Drive レーザからの光注入が無い場合の値よりも高い最大リアプノフ指数が得られる. 特に $\Delta f = -8 \text{ GHz}$ の時に最大リアプノフ指数は最も大きくなり, $\lambda_{max} = 3.31 \text{ ns}^{-1}$ となっている. しかしながら $\Delta f < -14 \text{ GHz}$ および $\Delta f > 8 \text{ GHz}$ の範囲では最大リアプノフ指数は Drive レーザからの光注入が無い場合と同程度である.

以上の結果から周波数帯域および自己相関関数の C_{sp} と最大リアプノフ指数の変化の関連性を考える. 周波数帯域は光周波数差の大きさ $|\Delta f|$ が大きいほど高い値が得られる. 一方で最大リアプノフ指数は $|\Delta f|$ が大きな範囲では Drive レーザからの光注入が無い場合と同程度であり, 複雑性は増加しない. したがって図 7.18(a) と (c) において周波数帯域の増加と複雑性の増加に関連性は観測できない. しかしながら自己相関関数の C_{sp} は光周波数差 $\Delta f = -9 \text{ GHz}$ で最少となり, 最大リアプノフ指数が最も大きくなる光周波数差の値と一致する. ゆえに図 7.18(b) と (c) において自己相関関数の C_{sp} の減少は最大リアプノフ指数の増加を表すと考えられる.

7.2.7 周波数帯域, 自己相関関数のセカンドピーク, 最大リアプノフ指数の 2 次元図

本節では Drive レーザと Response レーザの間の光周波数差 Δf だけでなく, Drive レーザから Response レーザへの光注入強度 σ を変化させ, 周波数帯域, 自己相関

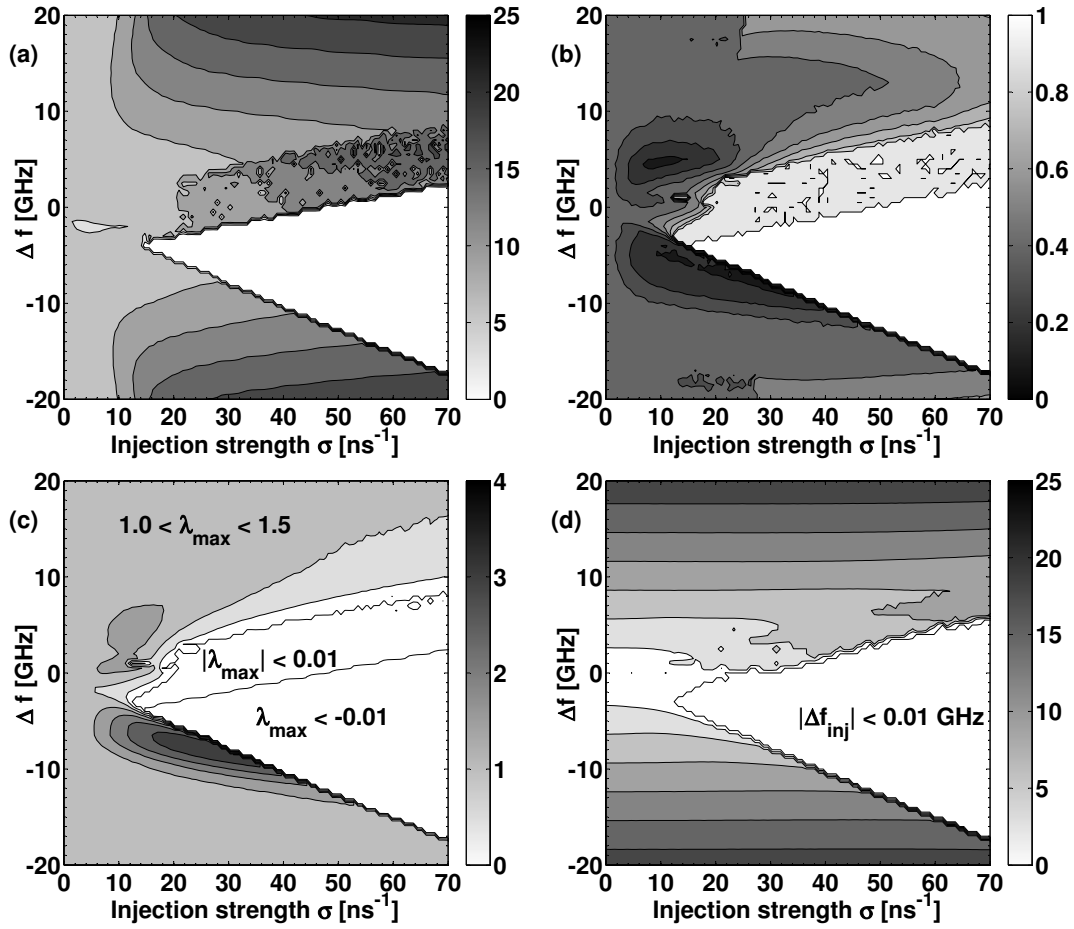


図 7.19: 光注入強度 σ および光周波数差 Δf の 2 次元パラメータ空間上における (a) 周波数帯域, (b) 自己相関関数のセカンドピーク C_{sp} , (c) 最大リアプノフ指数 λ_{max} , (d) 実光周波数差 Δf_{inj} の変化を示している. (a) の黒色領域は周波数帯域が高いことを表し, (b) の黒色領域は C_{sp} が小さいことを表し, (c) の黒色領域は λ_{max} が高いことを表す. また (d) の白色領域は $|\Delta f_{inj}| < 0.01$ GHz であり, インジェクションロッキング領域を表している.

関数のセカンドピーク C_{sp} , 最大リアプノフ指数の変化を示し, これらの量の変化の関連性について調査する. 図 7.19 は Response レーザの周波数帯域, 自己相関関数の C_{sp} , 最大リアプノフ指数, 実光周波数差 Δf_{inj} の 2 次元パラメータ空間上における変化を表している. 縦軸, 横軸はそれぞれ光周波数差 Δf , 光注入強度 σ を表す. 図 7.19(a) は周波数帯域の変化を表しており, 黒色領域は周波数帯域が高く, 白色領域は周波数帯域が 0 GHz (Response レーザのダイナミクスが定常状態) である. 周波数帯域が高くなる領域は光注入強度 σ が大きく, 光周波数差 $\Delta f = \pm 20$

GHz となるあたりに現れる．基本的には光周波数差の大きさ $|\Delta f|$ が大きいほど周波数帯域も大きくなるが，光注入強度 $\sigma < 10 \text{ ns}^{-1}$ では $|\Delta f|$ が大きくても周波数帯域はあまり増加しない．光注入強度 σ が小さいと，レーザ間の光周波数差により生じるビート周波数の振幅も小さくなるためであると考えられる．一方で光周波数差が小さく光注入強度が比較的大きな時 (図 7.19(a) の白色領域)，インジェクションロッキングにより Response レーザのダイナミクスは定常状態となる (図 7.19(d) の $|\Delta f_{inj}| < 0.01 \text{ GHz}$ の領域に相当)．この白色領域は光注入強度を増加させると光周波数差が負の領域に広がりやすい．一方で光周波数差が正の方向の白色領域の境界付近では Response レーザのダイナミクスが周期または準周期となっている．この領域ではインジェクションロッキングは達成されておらず，またダイナミクスが周期や準周期となる理由も明らかでないため，物理現象の観点から興味深い．

図 7.19(b) は自己相関関数のセカンドピーク C_{sp} の変化を表しており，黒色領域は C_{sp} が小さいことを表し，白色領域は $C_{sp} = 1$ である．光注入強度 σ ，光周波数差の大きさ $|\Delta f|$ がどちらも比較的小さい領域において黒色領域が現れている．一方で白色領域は Response レーザのダイナミクスがインジェクションロッキングにより定常状態となる．この領域は光周波数差が小さく光注入強度が比較的大きな場合に現れる．この白色領域の光周波数差が正の方向の境界付近の灰色領域において Response レーザのダイナミクスは周期または準周期となっている．また光周波数差の大きさ $|\Delta f|$ が大きい時 ($\Delta f \approx \pm 20 \text{ GHz}$)，光注入強度 σ を増加させると C_{sp} も増加する． C_{sp} が Drive レーザからの光注入が無い時の値を超えて増加する時， C_{sp} が得られる時間シフトは遅延時間 τ ではなく光周波数差の逆数に相当する値となっている．この時，遅延時間 τ に相当する自己相関関数のピークは Drive から光注入が無い時の C_{sp} と同程度になっている．

図 7.19(c) は最大リアプノフ指数 λ_{max} の変化を示しており，黒色領域は最大リアプノフ指数が高いことを表す．高い最大リアプノフ指数が得られる黒色領域は光周波数差 Δf が負の方向の白色領域の境界付近で得られている． $1.0 \text{ ns}^{-1} < \lambda_{max} < 1.5 \text{ ns}^{-1}$ となる灰色領域は黒色領域付近を除いて，Drive レーザからの光注入が無い時の最大リアプノフ指数と同程度となる．つまり光周波数差の大きさ $|\Delta f|$ が大きい場合，最大リアプノフ指数はほとんど変化しない．また白色領域は最大リアプノフ指数が $|\lambda_{max}| < 0.01 \text{ ns}^{-1}$ および $\lambda_{max} < -0.01$ となる領域を表している．最大リアプノフ指数が $|\lambda_{max}| < 0.01 \text{ ns}^{-1}$ となる領域では Response レーザのダイナミクスが周期または準周期となっており， $\lambda_{max} < -0.01$ となる領域では定常状態となっている．

図 7.19(d) は実光周波数差 Δf_{inj} の変化を表しており，白色領域は $|\Delta f_{inj}| < 0.01 \text{ GHz}$ となる範囲を表している．この白色領域ではインジェクションロッキングが

生じていると考えることができる．図 7.19(d) の白色領域は図 7.19(a), (b) の白色領域および (c) の $\lambda_{max} < -0.01 \text{ ns}^{-1}$ となる領域とほとんど一致し，この領域では Response レーザのダイナミクスが定常状態となっている．

最大リアプノフ指数の変化 (図 7.19(c)) を周波数帯域および自己相関関数のセカンドピーク C_{sp} の変化 (図 7.19(a) および (b)) と比較する．図 7.19(a) から周波数帯域は光注入強度 σ および光周波数差の大きさ $|\Delta f|$ が大きいほど増加するが，図 7.19(c) から最大リアプノフ指数は $|\Delta f|$ が大きなパラメータ空間では高い値が得られない．したがって周波数帯域と最大リアプノフ指数の間に関連性は観測できず，ダイナミクスの振動周波数が増加したとしても複雑性は増加するとは限らない．一方で図 7.19(b) の C_{sp} の変化と図 7.19(c) の最大リアプノフ指数の変化を比較すると，2 次元パラメータ空間上の黒色領域が似ていることが分かる．図 7.19(b) と (c) の黒色領域はどちらも白色領域の境界付近に現れており，光周波数差が正よりも負の領域に広く分布している．よって光注入強度と光周波数差の 2 次元パラメータ空間においても， C_{sp} の減少は最大リアプノフ指数の増加 (つまり複雑性の増加) を示すと言えることができる．

リアプノフ指数が増加するということは時系列の予測不可能性が増加することを意味する．一方で自己相関関数は時間経過後の波形が元の波形の情報をどの程度有しているかを表していると考えることができる．自己相関関数のセカンドピークが減少するということは時間経過後の波形が有している元の波形の情報量が減少することを表すため，予測不可能性が増加するということを意味すると言える．ゆえに自己相関関数のセカンドピークの減少は最大リアプノフ指数の増加を示すと考えられる．

実験的にダイナミカルシステムの複雑性を定量化する場合，得られた時系列に対して非線形解析を用いた手法，あるいは統計的な手法を適用することが考えられる．非線形解析における最大リアプノフ指数の算出は代表的な指標の 1 つであるが，実験的に行う場合には比較的困難である．特に戻り光を有する半導体レーザは時間遅延システムであるため無限次元を有し，埋め込みによる状態空間を再構成する方法を一般的なシステムと同様に考えて良いかは不明である．これに対してこれまでに時間遅延システムにおいて時系列から埋め込みを用いてリアプノフ指数を算出する手法 [101] や完全同期を用いてリアプノフ指数を算出する手法が提案されている [97, 98]．しかしながらこれらの方法は戻り光を有する半導体レーザが非常に速いダイナミクスを持つ (数 GHz から十数 GHz) ことや，完全同期を実験的に観測することが困難であることから，戻り光を有する半導体レーザに適用するのが難しい．これに対して本章で得られた自己相関関数のセカンドピーク C_{sp} の減少が最大リアプノフ指数の増加を表すという結果は，実験的に最大リアプノフ指数を比較的容易に

増加させることが可能であることを示唆するため重要である。自己相関関数はレーザ強度時系列から容易に得ることができるため、自己相関関数のセカンドピークを最小化するようにレーザパラメータを変化させることで最大リアプノフ指数を増加させることができる。最大リアプノフ指数の値を算出することはできないが、最大リアプノフ指数を増加させることができるという観点で重要である。

一方で本章の結果により、周波数帯域と最大リアプノフ指数に関連性が無いことが明らかになった。これまでの研究において、光結合された半導体レーザにおいて光注入強度と光周波数差の2次元パラメータ空間上で周波数帯域の変化の調査が行われている [134]。しかしながら高速物理乱数生成や光カオス秘匿通信への応用においてシステムの複雑性が重要であり、周波数帯域を増加させたとしても複雑性が増加するとは限らないため、応用のためには周波数帯域を調査するだけでは不十分であることを本章の結果は示している。

7.2.8 まとめ

本章では戻り光を有する半導体レーザのリアプノフスペクトラム解析の2つの応用について示した。1つ目の応用として、戻り光を有する半導体レーザにおいて一般化同期を用いて最大リアプノフ指数を算出する方法を提案し、その有効性を数値計算により調査した。提案手法では3つの戻り光を有する半導体レーザを用意し、1つの半導体レーザから他の2つの半導体レーザに光注入することで一般化同期させる。光注入された2つのレーザは完全同期を示すが、光注入を切断すると2つの半導体レーザの出力強度差は指数関数的に拡大する。そのためレーザ強度差の指数関数的拡大率から最大リアプノフ指数を算出することができる。本研究では半導体レーザの戻り光強度および注入電流を変化させ、最大リアプノフ指数の算出を行った。さらに線形化されたモデル方程式を用いて算出された最大リアプノフ指数と提案手法により求めた最大リアプノフ指数との比較を行った。その結果、本提案手法により算出された最大リアプノフ指数は線形化方程式を用いて算出された最大リアプノフ指数と同程度の値となることが分かった。提案手法により最大リアプノフ指数を算出することが可能であり、本手法は実験システムにも適用可能である。

2つ目の応用として外部から入力される一定の光と戻り光を有する半導体レーザの数値計算を行い、周波数帯域および自己相関関数のセカンドピークの変化を調査した。また最大リアプノフ指数を用いて複雑性の定量化を行い、周波数帯域および自己相関関数のセカンドピークの変化と最大リアプノフ指数の関連性を調査した。Drive-Response 間の光周波数差および Drive レーザから Response レーザへの光注

入強度を変化させたところ、周波数帯域は光周波数差および光注入強度が高いほど増加した。一方で自己相関関数のセカンドピークはインジェクションロッキング領域の境界のすぐ外側で小さくなった。これらの結果と最大リアプノフ指数の変化を2次元パラメータ空間上で比較したところ、自己相関関数のセカンドピークの減少領域において最大リアプノフ指数が増加することが分かった。一方で周波数帯域の増減と複雑性の変化には関係性が見られなかった。

最大リアプノフ指数はカオスの予測不可能性を定量化する指標であり、埋め込みなどによって実験的に得られた時系列から推定することが可能である。しかしながら半導体レーザはGHzを超える高い振動周波数を持ち、また時間遅延ダイナミカルシステムであるため、埋め込み法を用いて最大リアプノフ指数を算出するのは比較的困難である。一方で自己相関関数は時系列から比較的容易に得ることができるため、実験的に最大リアプノフ指数が増加するパラメータ領域を探索するために本研究で得られた知見は有効である。また半導体レーザを用いて物理乱数生成器の応用のために周波数帯域は良く調査されているが、本研究で得られた結果は周波数帯域のみを増加させても最大リアプノフ指数が増加するとは限らないため、周波数帯域のみの調査では複雑性の向上のためには不十分であると言える。

第8章 結論

本研究では、数値計算により時間遅延されたフィードバック光を有する半導体レーザーにおいてカオスダイナミクスを観測し、そのレーザーカオスの複雑性をリアプノフ指数により評価した。リアプノフ指数は、状態空間においてダイナミカルシステムの軌道に与えられた微小な揺らぎが時間に対して拡大するときの指数関数的拡大率を表す量である。リアプノフ指数が正であれば、その軌道は不安定であるためシステムはカオスとなる。高いリアプノフ指数は軌道がより不安定であることを表すため、システムがより複雑であると言えることができる。戻り光を有する半導体レーザーにより出力されるカオスは GHz を超える高速な振動成分を有するため、高速物理乱数生成器への応用が期待されており、リアプノフ指数により評価されたカオスの複雑性は生成された乱数のランダム性を理論的に保証するために重要となる。以下に各章における結論を述べる。

第1章では、本研究の背景と目的、本論文の構成を述べた。

第2章では、序論としてリアプノフ指数、コンシステンシー、物理的一方向性関数、リザーバコンピューティングについて述べた。

第3章では、戻り光を有する半導体レーザーのダイナミクスを良く表現する Lang-Kobayashi 方程式の導出を行い、本研究の数値計算において使用する数値モデルを示した。また導出された方程式を用いて戻り光を有する半導体レーザーにおいて数値計算によりカオスを観測した。戻り光強度を変化させることにより、半導体レーザーの出力強度が一定の状態から周期、準周期、カオスへと変化する、カオスへの準周期ルートを示すことを観測した。

第4章では、戻り光を有する半導体レーザーにおいてリアプノフスペクトラム解析を用いて、複雑性の指標であるエントロピーおよび次元を算出した。さらに半導体レーザーのパラメータを変化させ、エントロピーおよび次元が増加する条件の調査を行った。半導体レーザーの戻り光強度および注入電流を最適化することでエントロピーと次元を最大化することが可能であることが分かった。次元を増加させるためには外部共振器長を増加させることが効果的であることが分かった。また半導体レーザー

の内部パラメータとして、線幅増幅係数が大きく利得飽和係数が小さな半導体レーザを用いることが複雑性向上のために効果的であることが明らかとなった。これらの知見は戻り光を有する半導体レーザを用いた高速物理乱数生成においてランダム性の高い乱数生成を行うために有用である。

第5章では、Drive から Response システムに一方向に結合されたダイナミカルシステムにおいてコンシステンシーの有無とリアプノフスペクトラム解析により定量化された複雑性の関係について調査した。まず結合レスラーモデルと結合マッキィグラスモデルを用いた。この2つのモデルにおいて結合強度を増加させることによりコンシステンシーを達成した。さらにリアプノフスペクトラム解析により定量化されたエントロピーと次元を用いて複雑性を評価した。コンシステンシー状態の複雑性は単体の Drive システムと同程度となることが分かった。さらに本章では、Drive レーザから Response レーザに一方向に光結合された戻り光を有する半導体レーザにおいてリアプノフスペクトラム解析によりエントロピーおよび次元を算出し、コンシステンシー状態の有無との関係について調査を行った。まず Drive レーザから Response レーザへの光注入強度を増加させることによりコンシステンシーを達成した。また2つのレーザ間の光周波数差を変化させたところ、正よりも負の光周波数差においてコンシステンシーの達成が容易であることが分かった。次にエントロピーおよび次元により複雑性を評価し、コンシステンシーの有無との関係性を調査した。コンシステンシー状態の結合システム全体のエントロピーおよび次元は、結合が無い時の結合システムが持つエントロピーや次元よりも低くなり、Drive レーザが持つエントロピーと次元と同程度の値に収束することが分かった。コンシステンシー状態でない領域では、光周波数差が大きい時、結合があっても結合が無い時のシステム全体のエントロピーおよびKY次元と同程度の値となった。しかしながらコンシステンシー状態となる領域の境界付近で結合が無い時のシステム全体の値よりも大きくなることが分かった。以上よりエントロピーおよび次元は3つの領域に分けることができる。1つ目は結合が無い時よりも低くなる領域であり、この時コンシステンシー状態である。2つ目は結合が無い時と同程度の値となる領域である。3つ目は結合が無い時よりも大きくなる領域であり、これはコンシステンシー状態となる領域のすぐ近くの領域において観測された。

第6章では、時間遅延ダイナミカルシステムにおいて有限時間リアプノフ指数を算出する方法を提案した。また本手法をマッキィグラスモデルおよび戻り光を有する半導体レーザに適用した。まずマッキィグラスモデルに本手法を適用し、有限時間リアプノフ指数の標準偏差を算出した。有限時間リアプノフ指数の標準偏差は、有限時間および遅延時間の増加に対してべき乗則で減少することが分かった。有限時間に対する標準偏差のべき乗則は、時間遅延フィードバックを持たない一般的な

システムでも観測されており、この時のべき指数は -0.5 から -1.0 となることが分かっている。これに対してマッキークラスモデルにおいて、べき指数は -0.5 であり、時間遅延フィードバックを持たないシステムと同様の結果が得られた。一方で遅延時間に対する有限時間リアプノフ指数の標準偏差のべき乗則が本研究で初めて明らかとなった。この時のべき指数はほぼ -0.5 となることが分かった。さらに戻り光を有する半導体レーザにおいて本手法を適用した。戻り光を有する半導体レーザの有限時間リアプノフ指数の標準偏差は、マッキークラスモデルの場合と同様に有限時間および遅延時間の増加に対してべき乗則に従って減少することが分かった。しかしながら遅延時間に対する有限時間リアプノフ指数の標準偏差のべき乗則のべき指数は -0.1 程度であり、マッキークラスモデルとは異なる結果が得られた。

第7章では、戻り光を有する半導体レーザのリアプノフスペクトラム解析の2つの応用について述べた。1つ目として、戻り光を有する半導体レーザにおいて実験的に適用可能である一般化同期を用いてリアプノフ指数を算出する手法を提案した。また本手法の妥当性を数値計算により示した。本手法では3つの戻り光を有する半導体レーザを用いる。Driveレーザから出力された光を2つのResponseレーザに一方方向に入力することで2つのResponseレーザを同期させることができる。2つのResponseレーザを同期させた状態から、Driveレーザからの入力を切断すると、2つのResponseレーザは戻り光によりカオス状態となっているため、その出力強度の差は指数関数的に拡大する。この時の指数関数的拡大率として最大リアプノフ指数を算出する。本手法で得られた最大リアプノフ指数と線形化されたモデル方程式を用いて算出された最大リアプノフ指数の比較を行い、本手法の妥当性を調査した。2つの手法で得られた最大リアプノフ指数は最大で20%の誤差はあるが、レーザパラメータの変化に対して同様の傾向が得られたため、本手法により最大リアプノフ指数の見積もりは可能である。本手法は実験的にリアプノフ指数を算出する方法として有用である。2つ目は、一方方向に光結合された半導体レーザにおいて最大リアプノフ指数により評価された複雑性と周波数帯域および自己相関関数の関係性について調査した。レーザカオスの周波数帯域は高速物理乱数生成における乱数生成速度を向上させるために重要である。一方で戻り光を有する半導体レーザの自己相関関数において、戻り光の遅延時間の特徴が現れることが知られており、この特徴は物理乱数生成においてなるべく観測されることが望まれる。本研究では、周波数帯域の大きさおよび自己相関関数の大きさと、リアプノフ指数により評価された複雑性の大きさとの関連性を調査した。その結果、周波数帯域と複雑性には関係性は観測されなかった。一方で自己相関関数のセカンドピークが小さくなる時にリアプノフ指数が増加することが明らかとなった。

今後の課題として、戻り光を有する半導体レーザにおいて実験的に観測された時

系列を用いたリアプノフ指数の算出が挙げられる．またリアプノフ指数を用いてシステムの複雑性を評価し，戻り光を有する半導体レーザを用いたリザーバコンピューティングの性能との関連性を調査することは，非線形時系列解析，特にダイナミカルシステムの安定性の観点からリザーバコンピューティングの情報容量を評価するという意味で重要である．さらに半導体レーザカオスを用いた高速物理乱数生成において，戻り光を有する半導体レーザのエントロピー生成速度と最大リアプノフ指数の関連性については示されているが，実際の物理乱数生成速度とリアプノフ指数の関係については調査されておらず，今後の研究課題である．

以上の成果は戻り光を有する半導体レーザを用いた高速物理乱数生成のランダム性の評価や，半導体レーザのコンシステンシーを用いたリザーバコンピューティングの性能評価，および物理的一方向性関数の安全性評価に有用であると期待される．

謝辞

本研究は埼玉大学 大学院 理工学研究科 内田 淳史 准教授のご指導の下に行われたものであります。内田 淳史 准教授には、私が研究室に配属されて以来、本日に至るまでの間、たくさんのご指導とご助力を賜りました。研究活動においては、研究方針についての助言、論文原稿執筆やプレゼンテーションの指導に加え、日常における研究への取り組み方など、様々な面でご指導いただきました。本研究における研究の機会を与えていただき、研究活動から日常生活に至るまで大変に熱心にご指導していただきました内田 淳史 准教授に対し、心から感謝いたします。

本論文を審査していただきました埼玉大学 大学院 理工学研究科 久野 義徳 教授、重原 孝臣 教授、池口 徹 教授、および島村 徹也 教授には大変お世話になりましたことを深く感謝いたします。

埼玉大学 大学院 理工学研究科 池口 徹 教授には学会や非線形問題勉強会を通して多くのご助言、ご指導を賜りました。また研究活動に対する姿勢や物事に対する道理など様々な面で学ばせていただきました。心から感謝いたします。

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報システム工学コース 内田研究室 博士課程1年 荒幡 真也 修士，修士課程2年 櫻庭 良祐 学士，高橋 里枝 学士，野澤 隆宏 学士，樋田 拓也 学士，修士課程1年 岩川 健人 学士，掛巢 和泉 学士，学部4年 宇賀神 上総 氏，鈴木 頌允 氏，中山 丞真 氏には、良き後輩として日々支えていただき、充実した時間の中で研究させて頂いたこと感謝いたします。

最後に、全ての面において私をご支援くださいました両親，祖父母をはじめとした皆様方に深く感謝いたします。

研究業績リスト

公刊論文 (査読有り)

1. 菅野 円隆, 内田 淳史, "時間遅延した戻り光を有する半導体レーザーの複雑性解析", レーザー研究, Vol. 39, No. 7, pp. 543-549 (2011).
2. K. Kanno and A. Uchida, "Generalized synchronization and complexity in unidirectionally coupled dynamical systems," Nonlinear Theory and Its Applications IEICE, Vol. 3, No. 2, pp. 143-154 (2012).
3. K. Kanno and A. Uchida, "Consistency and complexity in coupled semiconductor lasers with time-delayed optical feedback," Physical Review E, Vol. 86, pp. 066202-1-9 (2012).
4. T. Mikami, K. Kanno, K. Aoyama, A. Uchida, T. Ikeguchi, T. Harayama, S. Sunada, K. Arai, K. Yoshimura, and P. Davis, "Estimation of entropy rate in a fast physical random-bit generator using a chaotic semiconductor laser with intrinsic noise," Physical Review E, Vol. 85, pp. 016211-1-7 (2012).
5. K. Kanno and A. Uchida, "Finite-time Lyapunov exponents in time-delayed nonlinear dynamical systems," Physical Review E (投稿中).

国際学会 (査読有り, プロシーディングス有り)

1. K. Kanno and A. Uchida, "Consistency and complexity in coupled semiconductor lasers with time-delayed optical feedback," Proceedings of 2011 the International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA2011), Vol. 1, pp. 649-652 (2011), Kobe, Japan, Sep. 2011.
2. K. Kanno and A. Uchida, "Complexity analysis in optically-coupled chaotic semiconductor lasers with consistency," Frontiers in Optics, OSA Technical Digest, paper FThM3, San Jose, California, USA, Oct. 2011.
3. K. Kanno and A. Uchida, "Finite-time Lyapunov exponents in nonlinear dynamical systems with time-delayed feedback," Proceedings of 2012

- the International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA 2012), Vol. 1, pp. 276-279 (2012), Palma, Majorca, Spain, Oct. 2012.
4. K. Kanno and A. Uchida, "Evaluation of complexity in optically-coupled semiconductor lasers by using time-delay signature and frequency bandwidth," Proceedings of 2013 RISP International Workshop on Nonlinear Circuits, Communications and Signal Processing, Vol. 1, pp. 49-52 (2013), Hawaii, USA, March 2013.
 5. K. Kanno and A. Uchida, "Estimation of maximum Lyapunov exponent using generalized synchronization in semiconductor lasers with optical feedback," Proceedings of 2013 the International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA2013), Vol. 1, pp. 405-408 (2013), Santa Fe, USA, Sep. 2013.
 6. K. Kanno and A. Uchida, "Complexity and frequency bandwidth in unidirectionally-coupled semiconductor lasers with optical feedback" Frontiers in Optics, Orlando, OSA Technical Digest, paper FTu3A.11, USA, Oct. 2013.
 7. T. Mikami, K. Kanno, K. Aoyama, A. Uchida, T. Harayama, S. Sunada, K. Arai, K. Yoshimura, and P. Davis, "Estimation of Entropy Rate for Random Bit Generators with Chaotic Semiconductor Lasers," Proceedings of 2011 the International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2011), Vol. 1, pp. 342-355, Kobe, Japan, Sep. 2011.
 8. T. Hida, K. Kanno, and A. Uchida, "Spontaneous exchange of leader-laggard relationship in mutually-coupled semiconductor lasers," Proceedings of 2012 the International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA 2012), Vol. 1, pp. 399-402 (2012), Palma, Majorca, Spain, Oct. 2012.
 9. R. Sakuraba, K. Kanno, K. Iwakawa, A. Uchida, "Bandwidth enhancement of chaos in three cascaded semiconductor lasers," Frontiers in Optics, OSA Technical Digest, paper FM3C.4, Orlando, USA, Oct. 2013.
 10. K. Iwakawa, K. Kanno, R. Sakuraba, Y. Akizawa, A. Uchida, "Statistical evaluation of correlation for physical random number generation with chaotic semiconductor lasers," Frontiers in Optics, OSA Technical Digest, paper FM3C.5, Orlando, USA, Oct. 2013.

国際会議 (査読有り, プロシーディングス無し)

1. K. Kanno and A. Uchida, "Evaluation of local Lyapunov exponents in semiconductor lasers with time-delayed optical feedback," Kyoto Workshop on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA), paper NP20, Kyoto, Japan, Nov. 2011.
2. K. Kanno and A. Uchida, "Local Lyapunov exponents in chaotic semiconductor lasers with time-delayed feedback," Dynamics Days 2012, WP60, Baltimore, Maryland, USA, Jan. 2012.

国内会議 (査読無し)

1. 菅野 円隆, 内田 淳史, "時間遅延を有する光結合された半導体レーザにおけるリアプノフ解析", 電子情報通信学会 2010 年 ソサイエティ大会, A-2-16, 大阪府立大学, 2010 年 9 月.
2. 菅野 円隆, 内田 淳史, "半導体レーザー結合系のカオス同期における複雑性の評価", 日本光学会年次学術講演会 Optics and Photonics Japan 2010, paper 8aG5, pp. 76-77, 中央大学, 2010 年 11 月.
3. 菅野 円隆, 内田 淳史, "半導体レーザーにおけるコンシステンシーと複雑性の評価", レーザー学会学術講演会第 31 回年次大会, H109pV06, 電気通信大学, 2011 年 1 月.
4. 菅野 円隆, 内田 淳史, "光結合された半導体レーザにおけるコンシステンシーとリアプノフスペクトラム解析", 電子情報通信学会 非線形問題研究会 技術研究報告, Vol. 110, No. 388, pp. 173-178 (2011), 北海道大学, 2011 年 1 月.
5. 菅野 円隆, 内田 淳史, "戻り光を有する半導体レーザにおける局所的リアプノフ指数の評価", 電子情報通信学会 非線形問題研究会 技術研究報告, Vol. 111, No. 276, pp. 97-102 (2011), 沖縄, 2011 年 11 月.
6. 菅野 円隆, 内田 淳史, "結合半導体レーザにおけるコンシステンシーと複雑性解析", 2012 年春季 第 59 回 応用物理学関係連合講演会, 16p-E8-19, 早稲田大学, 2012 年 3 月.
7. 菅野 円隆, 内田 淳史, "時間遅延ダイナミカルシステムの有限時間リアプノフ指数の解析", 電子情報通信学会 2012 年ソサイエティ大会, A-2-3, 富山大学, 2012 年 8 月.
8. 菅野 円隆, 内田 淳史, "時間遅延ダイナミカルシステムにおける有限時間リアプノフ指数の算出", 電子情報通信学会 非線形問題研究会 技術研究報告, Vol. 112, No. 389, pp. 73-78 (2012), 北海道大学, 2013 年 1 月.
9. 菅野 円隆, 内田 淳史, "光注入された半導体レーザーにおけるカオスの複雑性と周波数帯域", レーザー学会 第 442 回研究会 レーザーのカオス・

- ノイズ ダイナミクスとその応用, 岡山県立大学, 2013 年 2 月.
10. 菅野 円隆, 内田 淳史, "戻り光を有する半導体レーザーにおける一般化同期を用いたリアプノフ指数の算出", 電子情報通信学会 非線形問題研究会 技術研究報告, Vol. 113, No. 116, pp. 105-110 (2013), 沖縄, 2013 年 7 月.
 11. 菅野 円隆, 内田 淳史, "低周波不規則振動で同期した半導体レーザーカオスにおける Leader-Laggard 関係の定常解解析", 電子情報通信学会 非線形問題研究会 技術研究報告, Vol. 113, No. 383, pp. 93-98, 北海道, 2014 年 1 月.
 12. 三上 拓也, 青山 幸太, 菅野 円隆, 内田 淳史, "半導体レーザーカオスを用いた物理乱数生成におけるノイズ増幅効果", 電子情報通信学会 2010 年 ソサイエティ大会, A-2-19, 大阪府立大学, 2010 年 9 月.
 13. 三上 拓也, 青山 幸太, 菅野 円隆, 内田 淳史, "量子ノイズを含むレーザーカオスを用いた物理乱数生成器におけるエントロピー生成", レーザー学会学術講演会第 31 回年次大会, H109pV04, 電気通信大学, 2011 年 1 月.
 14. 樋田 拓也, 菅野 円隆, 内田 淳史, "相互結合された半導体レーザーにおける遅延カオス同期の Leader-Laggard 関係の自発的スイッチング", 2012 年秋季 第 73 回 応用物理学関係連合講演会, 13A-B-1, 愛媛大学, 2011 年 3 月.
 15. 高橋 純一, 菅野 円隆, 内田 淳史, "半導体レーザーのコンシステンシーを用いた符号化と復号におけるパラメータ偏差の影響", 電子情報通信学会 2013 年総合大会, A-2-7, 岐阜大学, 岐阜, 2013 年 3 月.
 16. 樋田 拓也, 菅野 円隆, 内田 淳史, "双方向に光結合された半導体レーザーの遅延カオス同期における Leader-Laggard 関係の自発的スイッチング", 電子情報通信学会 非線形問題研究会 技術研究報告, Vol. 113, No. 116, pp. 99-104 (2013), 沖縄, 2013 年 7 月.
 17. 岩川 健人, 菅野 円隆, 櫻庭 良佑, 秋澤 康裕, 内田 淳史, "半導体レーザーカオスを用いた物理乱数の相関の統計的評価", 電子情報通信学会 2013 年 ソサイエティ大会, A-2-19, 福岡工業大学, 2013 年 9 月.
 18. 櫻庭 良佑, 菅野 円隆, 岩川 健人, 内田 淳史, "一方向結合された 3 つの半導体レーザーを用いたカオス周波数帯域拡大実験", 電子情報通信学会 2013 年 ソサイエティ大会, A-2-20, 福岡工業大学, 2013 年 9 月.
 19. 櫻庭 良佑, 菅野 円隆, 岩川 健人, 内田 淳史, "一方向結合された三つの半導体レーザーによる帯域拡大カオスを用いた高速物理乱数生成実験", Optics & Photonics Japan 2013, 日本光学会年次学術講演会, 13pE5, 奈

良県新公会堂, 奈良, 2013 年 11 月.

参考文献

- [1] R. Lang and K. Kobayashi, “External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 16, pp. 347 (1980).
- [2] J. Ohtsubo, “Semiconductor Lasers: Stability, Instability and Chaos, 3rd Edn,” Springer Series in Optical Sciences, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (2013).
- [3] A. Uchida, “Optical Communication with Chaotic Lasers: Applications of Nonlinear Dynamics and Synchronization,” Wiley-VCH, Weinheim (2012).
- [4] M. C. Soriano, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, and I. Fischer, “Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers,” *Reviews of Modern Physics*, Vol. 85, pp. 421–470 (2013).
- [5] A. Uchida, K. Amano, M. Inoue, K. Hirano, S. Naito, H. Someya, I. Oowada, T. Kurashige, M. Shiki, S. Yoshimori, K. Yoshimura, and P. Davis, “Fast physical random bit generation with chaotic semiconductor lasers,” *Nature Photonics*, Vol. 2, pp. 728–732 (2008).
- [6] K. Hirano, K. Amano, A. Uchida, S. Naito, M. Inoue, S. Yoshimori, K. Yoshimura, and P. Davis, “Characteristics of fast physical random bit generation using chaotic semiconductor lasers,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 45, No. 11, pp. 1367–1379 (2009).
- [7] T. E. Murphy and R. Roy, “Chaotic lasers: The world’s fastest dice,” *Nat Photon*, Vol. 2, No. 12, pp. 714–715 (2008).
- [8] I. Reidler, Y. Aviad, M. Rosenbluh, and I. Kanter, “Ultrahigh-speed random number generation based on a chaotic semiconductor laser,” *Physical Review Letters*, Vol. 103, pp. 024102 (2009).

- [9] I. Kanter, Y. Aviad, I. Reidler, E. Cohen, and M. Rosenbluh, “An optical ultrafast random bit generator,” *Nature Photonics*, Vol. 4, No. 1, pp. 58–61 (2010).
- [10] P. Li, Y.-C. Wang, and J.-Z. Zhang, “All-optical fast random number generator,” *Optics Express*, Vol. 18, No. 19, pp. 20360–20369 (2010).
- [11] S. Satoshi, H. Takahisa, A. Kenichi, Y. Kazuyuki, D. Peter, T. Ken, and U. Atsushi, “Chaos laser chips with delayed optical feedback using a passive ring waveguide,” *Optics Express*, Vol. 19, No. 7, pp. 5713–5724 (2011).
- [12] D. Brunner, M. C. Soriano, C. R. Mirasso, and I. Fischer, “Parallel photonic information processing at gigabyte per second data rates using transient states,” *Nature Communications*, Vol. 4, pp. 1364 (2013).
- [13] K. Hicke, M. Escalona-Moran, D. Brunner, M. Soriano, I. Fischer, and C. Mirasso, “Information processing using transient dynamics of semiconductor lasers subject to delayed feedback,” *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 19, No. 4, pp. 1501610 (2013).
- [14] W. Maass, T. Natschlger, and H. Markram, “Real-time computing without stable states: A new framework for neural computation based on perturbations,” *Neural Computation*, Vol. 14, No. 11, pp. 2531–2560 (2002).
- [15] H. Jaeger and H. Haas, “Harnessing nonlinearity: Predicting chaotic systems and saving energy in wireless communication,” *Science*, Vol. 304, No. 5667, pp. 78–80 (2004).
- [16] K. Vandoorne, W. Dierckx, B. Schrauwen, D. Verstraeten, R. Baets, P. Bienstman, and J. V. Campenhout, “Toward optical signal processing using photonic reservoir computing,” *Optics Express*, Vol. 16, No. 15, pp. 11182–11192 (2008).
- [17] L. Appeltant, M. C. Soriano, G. V. der Sande, J. Danckaert, S. Massar, J. Dambre, B. Schrauwen, C. R. Mirasso, and I. Fischer, “Information processing using a single dynamical node as a complex system,” *Nature Communications*, Vol. 2, pp. 468 (2011).
- [18] K. Vandoorne, J. Dambre, D. Verstraeten, B. Schrauwen, and P. Bienstman, “Parallel reservoir computing using optical amplifiers,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 22, No. 9, pp. 1469–1481 (2011).

- [19] F. Duport, B. Schneider, A. Smerieri, M. Haelterman, and S. Massar, “All-optical reservoir computing,” *Optics Express*, Vol. 20, No. 20, pp. 22783–22795 (2012).
- [20] L. Larger, M. Soriano, D. Brunner, L. Appeltant, J. Gutierrez, L. Pesquera, C. Mirasso, and I. Fischer, “Photonic information processing beyond turing: an optoelectronic implementation of reservoir computing,” *Optics Express*, Vol. 20, pp. 3241–3249 (2012).
- [21] R. Martinenghi, S. Rybalko, M. Jacquot, Y. K. Chembo, and L. Larger, “Photonic nonlinear transient computing with multiple-delay wavelength dynamics,” *Physical Review Letters*, Vol. 108, pp. 244101 (2012).
- [22] Y. Paquot, F. Duport, A. Smerieri, J. Dambre, B. Schrauwen, M. Haelterman, and S. Massar, “Optoelectronic reservoir computing,” *Scientific Reports*, Vol. 2, pp. 287 (2012).
- [23] M. C. Soriano, S. Ortín, D. Brunner, L. Larger, C. R. Mirasso, I. Fischer, and L. Pesquera, “Optoelectronic reservoir computing: tackling noise-induced performance degradation,” *Optics Express*, Vol. 21, No. 1, pp. 12–20 (2013).
- [24] A. Uchida, R. McAllister, and R. Roy, “Consistency of nonlinear system response to complex drive signals,” *Physical Review Letters*, Vol. 93, pp. 244102 (2004).
- [25] A. Uchida, K. Yoshimura, P. Davis, S. Yoshimori, and R. Roy, “Local conditional lyapunov exponent characterization of consistency of dynamical response of the driven lorenz system,” *Physical Review E*, Vol. 78, pp. 036203 (2008).
- [26] K. Kanno and A. Uchida, “Consistency and complexity in coupled semiconductor lasers with time-delayed optical feedback,” *Physical Review E*, Vol. 86, pp. 066202 (2012).
- [27] R. Pappu, B. Recht, J. Taylor, and N. Gershenfeld, “Physical one-way functions,” *Science*, Vol. 297, No. 5589, pp. 2026–2030 (2002).
- [28] K. Kursawe, A. Sadeghi, D. Schellekens, B. Skoric, and P. Tuyls. “Reconfigurable physical unclonable functions - enabling technology for tamper-resistant storage,” . In *IEEE International Workshop on Hardware-Oriented Security and Trust 2009*, pp. 22–29 (2009).

- [29] T. Mikami, K. Kanno, K. Aoyama, A. Uchida, T. Ikeguchi, T. Harayama, S. Sunada, K.-i. Arai, K. Yoshimura, and P. Davis, “Estimation of entropy rate in a fast physical random-bit generator using a chaotic semiconductor laser with intrinsic noise,” *Physical Review E*, Vol. 85, pp. 016211 (2012).
- [30] J. P. Eckmann and D. Ruelle, “Ergodic theory of chaos and strange attractors,” *Reviews of Modern Physics*, Vol. 57, pp. 617–656 (1985).
- [31] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, and M. B. Kennel, “Variation of lyapunov exponents on a strange attractor,” *Journal of Nonlinear Science*, Vol. 1, No. 2, pp. 175–199 (1991).
- [32] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, and M. Kennel, “Local lyapunov exponents computed from observed data,” *Journal of Nonlinear Science*, Vol. 2, No. 3, pp. 343–365 (1992).
- [33] B. Eckhardt and D. Yao, “Local lyapunov exponents in chaotic systems,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 65, No. 1-2, pp. 100–108 (1993).
- [34] A. Prasad and R. Ramaswamy, “Characteristic distributions of finite-time lyapunov exponents,” *Physical Review E*, Vol. 60, pp. 2761–2766 (1999).
- [35] T. Okushima, “New method for computing finite-time lyapunov exponents,” *Physical Review Letters*, Vol. 91, pp. 254101 (2003).
- [36] J. D. Farmer, “Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 4, pp. 366–393 (1982).
- [37] H. F. von Bremen, F. E. Udvardi, and W. Proskurowski, “An efficient qr based method for the computation of lyapunov exponents,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 101, No. 1–2, pp. 1–16 (1997).
- [38] K. Geist, U. Parlitz, and W. Lauterborn, “Comparison of different methods for computing lyapunov exponents,” *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 83, No. 5, pp. 875 (1990).
- [39] S. Habib and R. D. Ryne, “Symplectic calculation of lyapunov exponents,” *Physical Review Letters*, Vol. 74, pp. 70–73 (1995).
- [40] G. Rangarajan, S. Habib, and R. D. Ryne, “Lyapunov exponents without rescaling and reorthogonalization,” *Physical Review Letters*, Vol. 80, pp. 3747–3750 (1998).

- [41] C. Skokos, “The lyapunov characteristic exponents and their computation,” *Lecture Notes in Physics*, Vol. 790, pp. 63–135 (2010).
- [42] T. Stachowiak and M. Szydlowski, “A differential algorithm for the lyapunov spectrum,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 240, No. 16, pp. 1221–1227 (2011).
- [43] F. Grond, H. H. Diebner, S. Sahle, A. Mathias, S. Fischer, and O. E. Rossler, “A robust, locally interpretable algorithm for lyapunov exponents,” *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 16, No. 5, pp. 841–852 (2003).
- [44] G. Benettin, L. Galgani, and J.-M. Strelcyn, “Kolmogorov entropy and numerical experiments,” *Physical Review A*, Vol. 14, pp. 2338–2345 (1976).
- [45] K. Ramasubramanian and M. S. Sriram, “Alternative algorithm for the computation of lyapunov spectra of dynamical systems,” *Physical Review E*, Vol. 60, pp. R1126–R1129 (1999).
- [46] K. Ramasubramanian and M. Sriram, “A comparative study of computation of lyapunov spectra with different algorithms,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 139, No. 1–2, pp. 72–86 (2000).
- [47] M. Sano and Y. Sawada, “Measurement of the lyapunov spectrum from a chaotic time series,” *Physical Review Letters*, Vol. 55, pp. 1082–1085 (1985).
- [48] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, “Determining lyapunov exponents from a time series,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 16, No. 3, pp. 285–317 (1985).
- [49] P. Bryant, R. Brown, and H. D. I. Abarbanel, “Lyapunov exponents from observed time series,” *Physical Review Letters*, Vol. 65, pp. 1523–1526 (1990).
- [50] X. Zeng, R. Eykholt, and R. A. Pielke, “Estimating the lyapunov-exponent spectrum from short time series of low precision,” *Physical Review Letters*, Vol. 66, pp. 3229–3232 (1991).
- [51] H.-F. Liu, Z.-H. Dai, W.-F. Li, X. Gong, and Z.-H. Yu, “Noise robust estimates of the largest lyapunov exponent,” *Physics Letters A*, Vol. 341, No. 1–4, pp. 119–127 (2005).

- [52] C. Yang and C. Wu, “A robust method on estimation of lyapunov exponents from noisy time series,” *Nonlinear Dynamics*, Vol. 64, No. 3, pp. 279–292 (2011).
- [53] R. Brown, P. Bryant, and H. D. I. Abarbanel, “Computing the lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series,” *Physical Review A*, Vol. 43, pp. 2787–2806 (1991).
- [54] J. B. Dingwell and J. P. Cusumano, “Nonlinear time series analysis of normal and pathological human walking,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, Vol. 10, No. 4, pp. 848–863 (2000).
- [55] L. Zunino, O. Rosso, and M. Soriano, “Characterizing the hyperchaotic dynamics of a semiconductor laser subject to optical feedback via permutation entropy,” *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 17, No. 5, pp. 1250–1257 (2011).
- [56] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel, “Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems,” *Physical Review E*, Vol. 51, pp. 980–994 (1995).
- [57] H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, and M. M. Sushchik, “Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach,” *Physical Review E*, Vol. 53, pp. 4528–4535 (1996).
- [58] L. Kocarev and U. Parlitz, “Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems,” *Physical Review Letters*, Vol. 76, pp. 1816–1819 (1996).
- [59] T. U. Singh, A. Nandi, and R. Ramaswamy, “Scenarios for generalized synchronization with chaotic driving,” *Physical Review E*, Vol. 78, pp. 025205 (2008).
- [60] K. Kanno and A. Uchida, “Generalized synchronization and complexity in unidirectionally coupled dynamical systems,” *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, Vol. 3, No. 2, pp. 143–154 (2012).
- [61] T. Pérez and A. Uchida, “Reliability and synchronization in a delay-coupled neuronal network with synaptic plasticity,” *Physical Review E*, Vol. 83, pp. 061915 (2011).

- [62] G. Giacomelli, S. Barland, M. Giudici, and A. Politi, “Characterizing the response of chaotic systems,” *Physical Review Letters*, Vol. 104, pp. 194101 (2010).
- [63] M. Lukoševičius and H. Jaeger, “Reservoir computing approaches to recurrent neural network training,” *Computer Science Review*, Vol. 3, No. 3, pp. 127–149 (2009).
- [64] H. Jaeger. “The “echo state” approach to analysing and training recurrent neural networks - with an erratum note,” . Technical report, German National Research Center for Information Technology (2001).
- [65] J. Steil. “Backpropagation-decorrelation: online recurrent learning with $\mathcal{O}(n)$ complexity,” . In *IEEE International Joint Conference on Neural Networks 2004*, volume 2, pp. 843–848 vol.2 (2004).
- [66] D. Verstraeten, B. Schrauwen, D. Stroobandt, and J. V. Campenhout, “Isolated word recognition with the liquid state machine: a case study,” *Information Processing Letters*, Vol. 95, No. 6, pp. 521–528 (2005).
- [67] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, H. M. Gibbs, D. L. Kaplan, and M. H. Rose, “Conjecture on the dimensions of chaotic attractors of delayed-feedback dynamical systems,” *Physical Review A*, Vol. 35, pp. 4020–4022 (1987).
- [68] K. Petermann, “Laser Diode Modulation and Noise,” Kluwer Academic Dordrecht, Dordrecht (1988).
- [69] T. Sano, “Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherence collapse of semiconductor lasers with optical feedback,” *Physical Review A*, Vol. 50, pp. 2719–2726 (1994).
- [70] I. Fischer, G. H. M. van Tartwijk, A. M. Levine, W. Elsässer, E. Göbel, and D. Lenstra, “Fast pulsing and chaotic itinerancy with a drift in the coherence collapse of semiconductor lasers,” *Physical Review Letters*, Vol. 76, pp. 220–223 (1996).
- [71] J. Mark, B. Tromborg, and J. Mark, “Chaos in semiconductor lasers with optical feedback: Theory and experiment,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 28, No. 1, pp. 93–108 (1992).

- [72] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera, and K. A. Shore, “Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links,” *Nature*, Vol. 438, No. 7066, pp. 343–346 (2005).
- [73] W. Ray, W.-S. Lam, P. N. Guzdar, and R. Roy, “Observation of chaotic itinerancy in the light and carrier dynamics of a semiconductor laser with optical feedback,” *Physical Review E*, Vol. 73, pp. 026219 (2006).
- [74] E. A. Viktorov and P. Mandel, “Low frequency fluctuations in a multimode semiconductor laser with optical feedback,” *Physical Review Letters*, Vol. 85, pp. 3157–3160 (2000).
- [75] J. M. Buldú, T. Heil, I. Fischer, M. C. Torrent, and J. García-Ojalvo, “Episodic synchronization via dynamic injection,” *Physical Review Letters*, Vol. 96, pp. 024102 (2006).
- [76] N. Rubido, J. Tiana-Alsina, M. C. Torrent, J. Garcia-Ojalvo, and C. Masoller, “Language organization and temporal correlations in the spiking activity of an excitable laser: Experiments and model comparison,” *Physical Review E*, Vol. 84, pp. 026202 (2011).
- [77] T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer, J. Mulet, and C. R. Mirasso, “Chaos synchronization and spontaneous symmetry-breaking in symmetrically delay-coupled semiconductor lasers,” *Physical Review Letters*, Vol. 86, pp. 795–798 (2001).
- [78] K. Kuniyoshi and T. Ichiro, “Chaotic itinerancy,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, Vol. 13, No. 3, pp. 926–936 (2003).
- [79] K. Tsumoto, T. Yoshinaga, and H. Kawakami, “Bifurcations of synchronized responses in synaptically coupled bonhöffer-van der pol neurons,” *Physical Review E*, Vol. 65, pp. 036230 (2002).
- [80] Y. Miyasaka, K. Otsuka, T. Maniwa, and J.-Y. Ko, “Dynamical characterization of chaotic itinerancy in a three-mode laser subjected to frequency-shifted optical feedback,” *Physical Review E*, Vol. 70, pp. 046208 (2004).
- [81] K. Engelborghs, T. Luzyanina, and D. Roose, “Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using dde-biftool,” *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 28, pp. 1–21 (2002).

- [82] D. Pieroux, T. Erneux, B. Haegeman, K. Engelborghs, and D. Roose, “Bridges of periodic solutions and tori in semiconductor lasers subject to delay,” *Physical Review Letters*, Vol. 87, pp. 193901 (2001).
- [83] K. Green and B. Krauskopf, “Global bifurcations and bistability at the locking boundaries of a semiconductor laser with phase-conjugate feedback,” *Physical Review E*, Vol. 66, pp. 016220 (2002).
- [84] T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer, B. Krauskopf, K. Green, and A. Gavrielides, “Delay dynamics of semiconductor lasers with short external cavities: Bifurcation scenarios and mechanisms,” *Physical Review E*, Vol. 67, pp. 066214 (2003).
- [85] A. Tabaka, K. Panajotov, I. Veretennicoff, and M. Sciamanna, “Bifurcation study of regular pulse packages in laser diodes subject to optical feedback,” *Physical Review E*, Vol. 70, pp. 036211 (2004).
- [86] M. Sciamanna, P. Mégret, and M. Blondel, “Hopf bifurcation cascade in small- α laser diodes subject to optical feedback,” *Physical Review E*, Vol. 69, pp. 046209 (2004).
- [87] K. Green and B. Krauskopf, “Bifurcation analysis of frequency locking in a semiconductor laser with phase-conjugate feedback,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 13, No. 09, pp. 2589–2601 (2003).
- [88] R. Vicente, J. Dauden, P. Colet, and R. Toral, “Analysis and characterization of the hyperchaos generated by a semiconductor laser subject to a delayed feedback loop,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 41, No. 4, pp. 541–548 (2005).
- [89] P. Frederickson, J. L. Kaplan, E. D. Yorke, and J. A. Yorke, “The liapunov dimension of strange attractors,” *Journal of Differential Equations*, Vol. 49, No. 2, pp. 185–207 (1983).
- [90] K. Tanaka, A. Okamoto, and I. Saito, “Public-key system using {DNA} as a one-way function for key distribution,” *Biosystems*, Vol. 81, No. 1, pp. 25–29 (2005).
- [91] M. C. Mackey and L. Glass, “Oscillation and chaos in physiological control systems,” *Science*, Vol. 197, No. 4300, pp. 287–289 (1977).

- [92] N. Shibasaki, A. Uchida, S. Yoshimori, and P. Davis, “Characteristics of chaos synchronization in semiconductor lasers subject to polarization-rotated optical feedback,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 42, No. 3, pp. 342–350 (2006).
- [93] M. A. Sepúlveda, R. Badii, and E. Pollak, “Spectral analysis of conservative dynamical systems,” *Physical Review Letters*, Vol. 63, pp. 1226–1229 (1989).
- [94] E. Aurell, G. Boffetta, A. Crisanti, G. Paladin, and A. Vulpiani, “Growth of noninfinitesimal perturbations in turbulence,” *Physical Review Letters*, Vol. 77, pp. 1262–1265 (1996).
- [95] I. Goldhirsch, P.-L. Sulem, and S. A. Orszag, “Stability and lyapunov stability of dynamical systems: A differential approach and a numerical method,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 27, No. 3, pp. 311–337 (1987).
- [96] A. Prasad, V. Mehra, and R. Ramaswamy, “Intermittency route to strange nonchaotic attractors,” *Physical Review Letters*, Vol. 79, pp. 4127–4130 (1997).
- [97] A. B. Cohen, B. Ravoori, T. E. Murphy, and R. Roy, “Using synchronization for prediction of high-dimensional chaotic dynamics,” *Physical Review Letters*, Vol. 101, pp. 154102 (2008).
- [98] T. E. Murphy, A. B. Cohen, B. Ravoori, K. R. B. Schmitt, A. V. Setty, F. Sorrentino, C. R. S. Williams, E. Ott, and R. Roy, “Complex dynamics and synchronization of delayed-feedback nonlinear oscillators,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol. 368, pp. 343 (2010).
- [99] R. Hegger, M. J. Bünner, H. Kantz, and A. Giaquinta, “Identifying and modeling delay feedback systems,” *Physical Review Letters*, Vol. 81, pp. 558–561 (1998).
- [100] K. Pyragas, “Synchronization of coupled time-delay systems: analytical estimations,” *Physical Review E*, Vol. 58, pp. 3067–3071 (1998).
- [101] R. Hegger, “Estimating the lyapunov spectrum of time delay feedback systems from scalar time series,” *Physical Review E*, Vol. 60, pp. 1563–1566 (1999).
- [102] S. Heiligenthal, T. Dahms, S. Yanchuk, T. Jüngling, V. Flunkert, I. Kanter, E. Schöll, and W. Kinzel, “Strong and weak chaos in nonlinear networks

- with time-delayed couplings,” *Physical Review Letters*, Vol. 107, pp. 234102 (2011).
- [103] A. Murakami and J. Ohtsubo, “Synchronization of feedback-induced chaos in semiconductor lasers by optical injection,” *Physical Review A*, Vol. 65, pp. 033826 (2002).
 - [104] Y. Liu, Y. Takiguchi, P. Davis, T. Aida, S. Saito, and J. M. Liu, “Experimental observation of complete chaos synchronization in semiconductor lasers,” *Applied Physics Letters*, Vol. 80, No. 23, pp. 4306–4308 (2002).
 - [105] S. Sivaprakasam, E. M. Shahverdiev, P. S. Spencer, and K. A. Shore, “Experimental demonstration of anticipating synchronization in chaotic semiconductor lasers with optical feedback,” *Physical Review Letters*, Vol. 87, pp. 154101 (2001).
 - [106] I. Fischer, Y. Liu, and P. Davis, “Synchronization of chaotic semiconductor laser dynamics on subnanosecond time scales and its potential for chaos communication,” *Physical Review A*, Vol. 62, pp. 011801 (2000).
 - [107] J. Ohtsubo, “Chaos synchronization and chaotic signal masking in semiconductor lasers with optical feedback,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 38, No. 9, pp. 1141–1154 (2002).
 - [108] Y. Takiguchi, K. Ohyagi, and J. Ohtsubo, “Bandwidth-enhanced chaos synchronization in strongly injection-locked semiconductor lasers with optical feedback,” *Optics Letters*, Vol. 28, No. 5, pp. 319–321 (2003).
 - [109] H. Someya, I. Oowada, H. Okumura, T. Kida, and A. Uchida, “Synchronization of bandwidth-enhanced chaos in semiconductor lasers with optical feedback and injection,” *Optics Express*, Vol. 17, No. 22, pp. 19536–19543 (2009).
 - [110] K. Hirano, T. Yamazaki, S. Morikatsu, H. Okumura, H. Aida, A. Uchida, S. Yoshimori, K. Yoshimura, T. Harayama, and P. Davis, “Fast random bit generation with bandwidth-enhanced chaos in semiconductor lasers,” *Optics Express*, Vol. 18, No. 6, pp. 5512–5524 (2010).
 - [111] S. Y. Xiang, W. Pan, N. Q. Li, B. Luo, L. S. Yan, X. H. Zou, L. Zhang, and P. Mu, “Randomness-enhanced chaotic source with dual-path injection from

- a single master laser,” *Photonics Technology Letters, IEEE*, Vol. 24, No. 19, pp. 1753–1756 (2012).
- [112] Y. Akizawa, T. Yamazaki, A. Uchida, T. Harayama, S. Sunada, K. Arai, K. Yoshimura, and P. Davis, “Fast random number generation with bandwidth-enhanced chaotic semiconductor lasers at 8×50 gb/s,” *Photonics Technology Letters, IEEE*, Vol. 24, No. 12, pp. 1042–1044 (2012).
 - [113] D. Rontani, A. Locquet, M. Sciamanna, and D. S. Citrin, “Loss of time-delay signature in the chaotic output of a semiconductor laser with optical feedback,” *Optics Letters*, Vol. 32, No. 20, pp. 2960–2962 (2007).
 - [114] J.-G. Wu, G.-Q. Xia, and Z.-M. Wu, “Suppression of time delay signatures of chaotic output in a semiconductor laser with double optical feedback,” *Optics Express*, Vol. 17, No. 22, pp. 20124–20133 (2009).
 - [115] J.-G. Wu, G.-Q. Xia, X. Tang, X.-D. Lin, T. Deng, L. Fan, and Z.-M. Wu, “Time delay signature concealment of optical feedback induced chaos in an external cavity semiconductor laser,” *Optics Express*, Vol. 18, No. 7, pp. 6661–6666 (2010).
 - [116] R. M. Nguimdo, G. Verschaffelt, J. Danckaert, and G. V. der Sande, “Loss of time-delay signature in chaotic semiconductor ring lasers,” *Optics Letters*, Vol. 37, No. 13, pp. 2541–2543 (2012).
 - [117] J.-G. Wu, Z.-M. Wu, G.-Q. Xia, and G.-Y. Feng, “Evolution of time delay signature of chaos generated in a mutually delay-coupled semiconductor lasers system,” *Optics Express*, Vol. 20, No. 2, pp. 1741–1753 (2012).
 - [118] M. J. Büchner, A. Kittel, J. Parisi, I. Fischer, and W. Elsässer, “Estimation of delay times from a delayed optical feedback laser experiment,” *Europhysics Letters*, Vol. 42, No. 4, pp. 353 (1998).
 - [119] D. Rontani, A. Locquet, M. Sciamanna, D. Citrin, and S. Ortin, “Time-delay identification in a chaotic semiconductor laser with optical feedback: A dynamical point of view,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 45, No. 7, pp. 879–1891 (2009).
 - [120] M. Soriano, L. Zunino, O. Rosso, I. Fischer, and C. Mirasso, “Time scales of a chaotic semiconductor laser with optical feedback under the lens of a

- permutation information analysis,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 47, No. 2, pp. 252–261 (2011).
- [121] L. Zunino, M. C. Soriano, I. Fischer, O. A. Rosso, and C. R. Mirasso, “Permutation-information-theory approach to unveil delay dynamics from time-series analysis,” *Physical Review E*, Vol. 82, pp. 046212 (2010).
 - [122] C. Bandt and B. Pompe, “Permutation entropy: A natural complexity measure for time series,” *Physical Review Letters*, Vol. 88, pp. 174102 (2002).
 - [123] P. Lamberti, M. Martin, A. Plastino, and O. Rosso, “Intensive entropic non-triviality measure,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 334, No. 1–2, pp. 119–131 (2004).
 - [124] R. López-Ruiz, H. Mancini, and X. Calbet, “A statistical measure of complexity,” *Physics Letters A*, Vol. 209, No. 5–6, pp. 321–326 (1995).
 - [125] M. Martin, A. Plastino, and O. Rosso, “Statistical complexity and disequilibrium,” *Physics Letters A*, Vol. 311, No. 2–3, pp. 126–132 (2003).
 - [126] M. Martin, A. Plastino, and O. Rosso, “Generalized statistical complexity measures: Geometrical and analytical properties,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 369, No. 2, pp. 439–462 (2006).
 - [127] F. Y. Lin and J. M. Liu, “Nonlinear dynamical characteristics of an optically injected semiconductor laser subject to optoelectronic feedback,” *Optics Communications*, Vol. 221, No. 1–3, pp. 173–180 (2003).
 - [128] F.-Y. Lin, S.-Y. Tu, C.-C. Huang, and S.-M. Chang, “Nonlinear dynamics of semiconductor lasers under repetitive optical pulse injection,” *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 15, No. 3, pp. 604–611 (2009).
 - [129] F.-Y. Lin, Y.-K. Chao, and T.-C. Wu, “Effective bandwidths of broadband chaotic signals,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 48, No. 8, pp. 1010–1014 (2012).
 - [130] T. Harayama, S. Sunada, K. Yoshimura, J. Muramatsu, K.-i. Arai, A. Uchida, and P. Davis, “Theory of fast nondeterministic physical random-bit generation with chaotic lasers,” *Physical Review E*, Vol. 85, pp. 046215 (2012).

- [131] S. Wieczorek, B. Krauskopf, and D. Lenstra, “A unifying view of bifurcations in a semiconductor laser subject to optical injection,” *Optics Communications*, Vol. 172, No. 1–6, pp. 279–295 (1999).
- [132] R. Vicente, T. Perez, and C. Mirasso, “Open-versus closed-loop performance of synchronized chaotic external-cavity semiconductor lasers,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 38, No. 9, pp. 1197–1204 (2002).
- [133] H. Aida, M. Arahata, H. Okumura, H. Koizumi, A. Uchida, K. Yoshimura, J. Muramatsu, , and P. Davis, “Experiment on synchronization of semiconductor lasers by common injection of constant-amplitude random-phase light,” *Optics Express*, Vol. 20, pp. 11813–11829 (2012).
- [134] A.-B. Wang, Y.-C. Wang, and J.-F. Wang, “Route to broadband chaos in a chaotic laser diode subject to optical injection,” *Optics Letters*, Vol. 34, No. 8, pp. 1144–1146 (2009).