時間論理に基づく形式存在論

（研究課題番号：13610002）

平成１３年度～平成１５年度科学研究費補助金
（基盤研究(C)(2)）
研究成果報告書

平成１６年３月

研究代表者　加　地　大　介
（埼玉大学教養学部助教授）

はしがき

本研究の主題と趣旨

本研究は、時間生成を重要な実在的様相のひとつと考える立場から、時間生成にまつわる存在論的推論を適切な形で処理できる時間論理の形式体系を構成すること、そしてその形式体系を前提として、時間生成をその中心的位置に組み込んだ包括的存在論を構築することを目的として行われた。前者に関しては、直線的可能世界モデルに基づく意味論を採用する内包論理と、真理概念の部分性を許容する意味論を採用する部分論理とを融合させた部分時間論理の構成を目指した。そのために、各命題を時制的表現として規定すべきか無時制的表現として規定すべきか、部分論理における妥当性の諸定義の中でどれを採用すべきか、どのような直線的時間論理の体系を採用すべきか、分岐的可能世界モデルに基づく時間論理と比較してその体系がどのような長短をもつのか、といった事柄について考察した。後者に関しては、上のような形式体系に基づいた包括的存在論のもとで、時間はどのような意味で実在するといえるのか、過去と未来の非対称性は何に由来するのか、実体や因果は世界においてどのような位置を占めるのか、タイムトラベルは可能なのか、といった哲学的時間論上の諸問題について考察した。

研究組織

研究代表者　加地 大介　(埼玉大学教養学部教養学科 助教授)

研究経費

平成１３年度	７００千円
平成１４年度	５００千円
平成１５年度	５００千円
計	１７００千円

研究発表

(１) 学会誌等

- 加地大介、「時制と部分論理——始点としての現在」、『哲学雑誌 116-788』、115-130 頁、哲学会、2001.10.20
- Daisuke Kachi, 'Validity in Simple Partial Logic', *The Annals of the Japan Association for Philosophy of Science 10-4*, pp.139-153, The Japan Association for Philosophy of Science, 2002.3.5
- Daisuke Kachi, 'Tensed Ontology based on Simple Partial Logic', *Proceedings of Ninth International Symposium on Temporal Representation and Reasoning: TIME-02*, pp.141-145, IEEE Computer Society, 2002.7.7
- 加地大介、「可能性から必然性への変化としての時間生成」(印刷中)、『数理科学 No.493: 2004 年 7 月号』、サイエンス社、2004.7.1 発行予定。

(2) 口頭発表

- 加地大介、「フォーマル・オントロジーと知識工学」、『ワークショップ：フォーマル・オントロジーの工学と哲学——オントロジー工学の現在とその哲学的源泉』、日本科学哲学会第 34 回大会（専修大学)、2001.11.18

- Daisuke Kachi, 'Tensed Ontology based on Simple Partial Logic', Ninth International Symposium on Temporal Representation and Reasoning: TIME-02 (IEEE Computer Society, Manchester), 2002.7.9
- 加地大介、「カサティとヴァルツィのメレオトポロジー」、『ワークショップ：空間表象の形式理論と存在論』、日本科学哲学会第35回大会（新潟大学）、2002.11.10

(3) 出版物

- 加地大介、『なぜ私たちは過去へ行けないのか——ほんとうの哲学入門』、全200頁、哲学書房、2003.11.20

※その他

- 加地大介、[事典項目解説]「タイムトラベル」、『事典 哲学の木』、684-686頁、講談社、2002.3.11
- 加地大介、[国際会議報告] FOIS(Formal Ontology in Information System)'01、『日本科学哲学会ニューズレター No.21』、3-4頁、2002.5.20
- 加地大介、[書評]『時間論の構築』(中山康雄著)(印刷中)、『科学哲学 37-1』、日本科学哲学会、2004.7. 発行予定

研究成果の概要

2001年度は主に、単純部分命題論理の基礎付けと時間論へのその応用可能性について考察し、それぞれ 'Validity in Simple Partial Logic'「時制と部分論理——始点としての現在」という二つの論文においてその成果を発表した。

前者では、まず古典命題論理を真理付値の部分化によって一般化すると同時に外延的な様相的演算子を付加することによって拡張した、単純部分命題論理の体系SPLを構成した。そのうえで、その意味論的妥当性の定義として考えられるいくつかの候補から二つを正当化して選択し、それに基づいていくつかの意味論的定理を証明した。

後者では、まず四次元的に規定された現在世界と各未来世界を直線的に配列した、多世界的存在論モデルを設定した。そのうえで、その中での強弱の必然性言明として過去時制言明と未来時制言明をそれぞれ捉えることによって、SPLを用いて外延的に時制表現を処理できることを示すと同時に、この方法を用いれば、分岐モデルによって未来時制言明を処理する方法が抱えている問題点を克服することができると主張した。

以上の主要成果の他に、「フォーマル・オントロジーの工学と哲学——オントロジー工学の現在とその哲学的源泉」と題する日本科学哲学会のワークショップにパネルの一人として参加し、哲学的文脈における形式存在論と知識工学との接点について検討した。また、ニューヨーク市立大学のA. オレンシュタインとM. フィッティングのもとで研究のレビューを受け、SPLの量化と時間化への展望を得た。

2002年度はまず、SPLにもとづいて時制主義的な存在論を構築する方法を考案し、7月に英国マンチェスターで開催されたIEEE主催の国際学会 'Ninth International Symposium on Temporal Representation and Reasoning: TIME-02' において 'Tensed Ontology based on Simple Partial Logic' と題する論文を発表した。

この論文の要諦は、古典命題論理を部分化すると同時に外延的な様相的演算子を付加することによって拡張した単純部分論理SPLの体系において、そこで規定される強弱の必然性言明をそれぞれ過去時制と未来時制にある形で対応づけられる言明として捉えることによって、その体系を時間論に応用できることを

示したところにある。この論文の後半では、その方法をウカシェーヴィチの三値論理に基づく方法および分岐的時間論理に基づく方法と比較しながら、外延性・単純性・存在論的妥当性などの利点を提示した。

この後、前年度の考察によって適切なものと認定した、部分論理におけるふたつの妥当性の定義にもとづき、それらを証明するためのタブローによる手続きを構成し、その健全性と完全性を証明した。また、単純部分命題論理を時間化するための論理としては、PTL という呼び名で情報科学において主流となっている時間論理が適切であろうという見通しを得た。

以上の主要成果の他に、「空間表象の形式理論と存在論」と題する日本科学哲学会のワークショップをオーガナイザーとして企画し、形式存在論を空間論へと展開する方法について検討した。また、英国ダーラム大学のＪ．ロウのもとで研究のレビューを受け、実体主義的な存在論と時間論の関係についての洞察を深めた。

2003 年度は、まず（命題）部分ディオドロス時間様相論理 PS4.3 を構成した。（命題）単純部分論理 SPL については、メタ論理的考察も含めて前年までにほぼ必要な研究を完了していたので、当年度は、ディオドロス時間様相論理として知られている S4.3 という体系を利用して、それを時間化した。当初は PTL を用いて時間化する予定であったが、PTL と多くの共通性を持ちながらより単純である S4.3 の方が、当研究には適していると判断した。S4.3 はそれを特徴づけるクリプキ・フレームが稠密順序列となるので、そこにおける可能命題は、稠密直線時間上の現在または未来の少なくとも一つの時点において真であることを主張する命題として解釈することができるのである。そして SPL と S4.3 を組み合わせた体系 PS4.3 の構文論と意味論を規定したうえで、タブローによるその証明論を構成し、健全性・完全性・決定可能性が成立することを示した。さらに、いくつかの公理を追加することにより、PS4.3 に基づいて、実体主義的な時間様相の形式存在論を構成できることを示した。

以上の形式的考察を基礎としながら、タイムトラベルの可能性と時間生成の実在性という、時間に関する二つの具体的な存在論的問題についても考察した。前者については、著書『なぜ私たちは過去へ行けないのか』の第一章において、実体の歴史に即した形で実在する過去と実在しない未来という区別を行い、少なくともパラドクスを引き起し得るような過去へのタイムトラベルは不可能であることを示した。後者については、雑誌『数理科学』2004 年 7 月号の特集「時間の矢」に掲載予定の論文「可能性から必然性への変化としての時間生成」において、できごとの生起自体のなかに可能性から必然性への変化・非実在性から実在性への変化という時間的方向性が含まれていることを示し、そこに時間生成の実在性を見出すべきであることを主張した。

この報告書では、これらの研究成果のうち、'Validity in Simple Partial Logic', 'Tensed Ontology based on Simple Partial Logic',「可能性から必然性への変化としての時間生成」を転載した。さらに、「部分ディオドロス時間様相論理 PS4.3」「時間的実体様相の形式存在論」を書き下ろして付け加えた。報告書作成の時点では、転載した論文とは若干異なる用語法を採用したので、転載論文と書き下ろし論文との間に多少の用語法のズレがあるが、文脈によってその対照関係は明らかだと思われるので、転載論文の修正は行っていない。また、書き下ろし論文は、更なる検討・整理を要する事項や不完全な叙述を含む、覚え書き的な性格を残すものであることをお断りしておく。

目 次

第I部

論理学的考察

第1章 Validity in Simple Partial Logic*

Abstract

Firstly I characterize Simple Partial Logic (SPL) as the generalization and extension of a certain two-valued logic. Based on the characterization I present two definitions of validity in SPL. Finally I show that given my characterization these two definitions are more appropriate than other definitions that have been prevalent, since both have some desirable semantic properties that the others lack.

1.1 Introduction

Partial logic is, broadly speaking, logic that allows the truth-value gap, which means that propositions may possibly be neither true nor false. Because of the gap, there occur, as it were, two conceptions of truth: being true and being not false. I call the former the strong concept of truth and the latter the weak concept of truth.

Accordingly the conceptions of validity also have similar complexity. There are strong and weak concepts of validity of a formula: being true and being not false respectively under all truth-valuations. As for the validity of an argument there can be *at least* four concepts:[1]

(a) The consequence is true whenever all the premises are true.
(b) The consequence is not false whenever all the premises are true.
(c) The consequence is true whenever no premises are false.
(d) The consequence is not false whenever no premises are false.

Logicians have adopted different concepts of validity of arguments in partial logic. Wang, for example, chose (a), which appeared most standard.[2] This concept, however, has defects despite its apparent naturalness; neither (semantic) Deduction Theorem nor Contraposition Theorem holds:

< Deduction Theorem >
$P_1,P_2,\text{-},P_n \models C$ iff $\models (P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow C$.
< Contraposition Theorem >
$P_1,P_2,\text{-},P_n \models C$ iff $\neg C \models \neg (P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n)$.

Improving Wang's concept, Blamey defined validity as follows:

The consequence is true whenever all the premises are true, *and at least one of the premises is false whenever the consequence is false.* [3]

* Reprinted from *The Annals of the Japan Association for Philosophy of Science 10-4*, 139-153, The Japan Association for Philosophy of Science, 2002.

[1] Besides these we can define other concepts of validity by making a conjunction or a disjunction out of them. Blamey's definition shown below is an example of the conjunct definitions. Langholm combined and generalized these definitions into a single figure and showed the way to choose one of them. [Langhholm,T. 1996][Fenstad, J. E. 1997]

[2] [Wang, H. 1961]

[3] [Blamey, S. 1986] p.5f. Here I described his definition in a more generalized way.

Though this modification makes Contraposition Theorem hold, Deduction Theorem still does not hold. Below I attempt to find better conceptions of validity in partial logic. Which definitions of validity are better depends on what the logic concerned is for. So I will characterize partial logic and then present two definitions of validity both of which have their place in my characterization. At the end I prove some semantic theorems and compare my definitions with other definitions.

1.2 Characterization of Simple Partial Logic

In this paper I restrict my arguments to the syntax and semantics of propositional logic. Moreover I confine myself to the simplest type of partial logic which I call 'Simple Partial Logic (SPL)'.

The syntax of SPL is as follows:

(1) Atomic formulae p, q, r, –, p_1, p_2 ,–, p_n,– are well formed formulae (wffs).
(2) If A is a wff, $\neg$ A and TA are wffs.
(3) If A and B are wffs, (A$\wedge$B) is a wff (the outermost parentheses can be omitted).

In addition I introduce the following operators by definitions (I will also add a few more operators by definitions later in this section):

$A \vee B$ =df $\neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A \rightarrow B$ =df $\neg(A \wedge \neg B)$
$A \leftrightarrow B$ =df $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

As for semantics there are two conditions that SPL should satisfy:

1. It is truth-functional.[4]
2. It has another value (in a broader sense described below) than truth and falsity.

However, these conditions are not proper to SPL, because the systems of three-valued logic in general satisfy these conditions. So we have to find the characteristics that make SPL special among the systems of three-valued logic. The crucial point is the character of 'another value' in the third condition above. Strictly speaking, the third value of partial logic is not an independent value but *the lack* of the truth-values. I call the third value of partial logic the 'gap-value', distinguishing it from the 'truth-values' which refer to truth and falsity. Now I attempt at formulating what conditions make the third value not an independent value but the lack of the truth-values.

T. Langhholm enumerates the following properties among those which may be characteristic of partial logic:[5]

< Determinablity >
If all the atomic formulae in a wff have *truth*-values, the wff itself also has a *truth*-value.
< Monotonicity >
If a wff that includes gap-valued (gapped) atomic formulae has a *truth*-value, that truth-value will not be changed by giving a truth-value to a gapped atomic formula.

In the following I modify these two properties to fit in with my characterization of SPL.
First I adopt the following usage of terms:

---

[4] Langholm calls this property 'Compositionality'. [Langhholm,T. 1988] p.17f. Below I take after most of his terminology for partial logic, except for 'Monotonicity', which he calls 'Persistence'.
[5] [Langhholm,T. 1988]pp.3-6.

Total valuation: the valuation which assigns a gap-value to no atomic formulae.

Total logic: the logic which contains no gapped wffs.

Partial valuation and partial logic are their negations.

(1') Reliable Determinability (Reliability)

First of all I characterize SPL as a generalization of a certain total (two-valued) logic. In other words, SPL presupposes a particular total logic. I call the presupposed total logic the 'basic logic' of the SPL concerned and the operators included in the basic logic the 'basic operators'.

By 'generalization' I mean, in the first place, the partialization of valuation, namely the allowance of the truth-value gap in valuation. In total logic every formula must have a truth-value. In contrast a formula in partial logic does not necessarily have a truth-value. The truth-tables of partial logic do not only determine the conditions as to when a formula is true (or false), but also the conditions as to *when the formula has a truth-value.* Secondly the truth-tables that define the meanings of the basic operators in SPL have to coincide with those of its basic logic under total valuation. In other words, the truth-value of the formula that includes only the basic operators have the same truth-value with that of basic logic, if all the atomic formulae included have truth-values. This is a restriction of determinability defined above. I call such property 'Reliable Determinability' or 'Reliability' in short.

(2') Weak Monotonicity

Blamey restricted the operators of partial logic to monotonic operators.[6] I agree with him on the basic operators. The basic operators should have the property of monotonicity as well as reliability. However, I do not think that SPL should exclude all the non-monotonic operators, because there are useful and significant ones for partial logic among them. For example, the following Truth-operator that Woodruff adopted for his System Q, which can be taken as a kind of SPL, is useful for expressing significant concepts which are related to partiality:[7]

A	TA
t	t
-	f
f	f

Using this Truth-operator we can also define the following operators:[8]

FA =df $T\neg A$ (A is false.)

LA =df $TA \vee FA$ (A has a truth-value.)

$A \mapsto B$ =df $LA \rightarrow TB$ (A presupposes B.)

These operators are common in that they always bring about a *truth*-value under partial valuation. In my view, they express a kind of (extensional) modality which results from partial valuation. I call the operators which always bring about a truth-value under partial valuation the 'modal operators' (In the following I call the formulae that do not include modal operators 'basic formulae'). Adding these

[6] [Blamey, S. 1986]p.9.

[7] [Woodruff, P. 1970]

[8] [Woodruff, P. 1970] For '$\neg$', '$\vee$' and '$\rightarrow$' Woodruff adopted the definitions of Kleene's strong three-valued logic shown in §4 below.

operators to the basic operators means that SPL is an extension of some total two-valued logic as well as its generalization.

Though the modal operators destroy the monotonicity of partial logic, I do not think that they make the 'spirit' of partial logic totally lost, for the monotonicity still remains at the basic level and it is no wonder that the propositions which describe the modal facts in terms of partiality itself are non-monotonic. Partiality implies that there are cases where a gapped proposition gets a truth-value by adding some information. Therefore, for example, the proposition '$\neg$ LA' (A has no truth-value, A is gapped), which includes a modal operator, may well have opportunities to change its truth-value from truth to falsity.

Moreover the modal operators keep a weakened monotonicity in the following sense:

If a formula that includes gapped atomic formulae has a *truth*-value, it does not make its truth-value *lost* (namely, be changed to gap-value) by altering the gap-value to a truth-value.

I call such a monotonicity 'weak monotonicity'.

To summarize, SPL is defined as a three-valued logic (in a broader sense) that includes the basic operators and the modal operators; the former are monotonic and coincidental with a certain total two-valued logic under total valuation, while the latter are weakly monotonic and always bring about a truth-value under partial valuation. By this definition, SPL is characterized both as the generalization and extension of a total two-valued logic; SPL is its generalization in the sense that SPL introduces the partiality of truth-valuation and is its extension in the sense that SPL includes modal operators that describe the modality related with partial valuation.

1.3 Definitions of Validity in SPL

To define validity in SPL, I first define two concepts of satisfiability in SPL:

(1) Strong Satisfiability

The set of formulae Σ is strongly satisfiable. =df There is a partial valuation which makes all the formulae in Σ true.

(2) Weak Satisfiability

The set of formulae Σ is weakly satisfiable. =df There is a partial valuation which makes no formulae in Σ false.

Based on these definitions, we can define the following definitions of unsatisfiability (Notice that the order of strength reverses):

(1a) Weak Unsatisfiability

The set of formulae Σ is weakly unsatisfiable. =df There are no partial valuations which make all the formulae in Σ true.

(2a) Strong Unsatisfiability

The set of formulae Σ is strongly satisfiable. =df There are no partial valuations which make no formulae in Σ false.

Finally we can define the following definitions of validity:[9]

[9] Fenstad also used the symbol '$\models$w' and '$\models$s'. However, he meant Wang's validity by the latter. [Fenstad, J. E. 1997]p.670.

(1b) Weak Validity

The argument that has the set of premises Σ and the consequence C is w-valid ($\Sigma \models$w C). =df The set of formulae $\Sigma \cup \{\neg C\}$ is weakly unsatisfiable.

(When Σ is empty, we say that the formula C is w-valid and call C 'Weak tautology'.)

(2b) Strong Validity

The argument that has the set of premises Σ and the consequence C is s-valid($\Sigma \models$s C). =df The set of formulae $\Sigma \cup \{\neg C\}$ is strongly unsatisfiable.

(When Σ is empty, we say that the formula C is s-valid and call C 'Strong tautology'.)

Here we are required to define the truth-condition of the negation operator. If we choose classical logic as the basic logic, there can be only one monotonic negation operator:

A	$\neg$ A
t	f
-	-
f	t

Adopting this truth-table, we can paraphrase the above definitions of validity in the following way:

(1c) $\Sigma \models$w C iff whenever all the formulae in Σ are true, C is true or gapped (*i.e.* C is not false).

(2c) $\Sigma \models$s C iff whenever all the formulae in Σ are true or gapped (*i.e.* whenever no formulae in Σ are false), C is true.

Compared with the naturalness of (1a), (2a) and (1b), (2b), they may seem somewhat arbitrary because of the asymmetry between the premises and the consequence in terms of being gapped. Indeed I believe that it is the reason why these definitions have not attracted much attention from logicians. However, if we take the essential features of partial logic into consideration, I think that these definitions should be accepted.

In the semantics of total (two-valued) logic there is only one axis of valuation: which truth-value a formula has, namely truth or falsity. In the semantics of partial logic, on the other hand, there is another axis of valuation presupposed: whether a formula has a truth-value or not. I give other definitions here:

Weak formula: the formula which does not always have a truth-value under partial valuation

Strong formula: the formula which always has a truth-value under partial valuation

We have to take both of these axes into consideration when we define the concept of validity. For example, we should distinguish between the following concepts of validity of a formula (these are respectively the explanatory meanings of 'C is true or gapped' and 'C is true' in the above definitions (1c) and (2c)):

Weak tautology: the formula which is always true *if it has a truth-value*

Strong tautology : the formula which *always has a truth-value* and is always true

Considering these points, the explanatory meaning of weak and strong validity of arguments are as follows ((b) is logically equivalent to (a)):

< Weak validity >

Whenever all the premises have a truth-value and are true, the consequence is, if it has a truth-value, true.

If all the formulae in the argument have a truth-value, whenever all the premises are true, the consequence is true.

$<$ Strong validity $>$

Whenever all the premises which have a truth-value are true, the consequence has a truth-value and is true.

At least one formula in the argument always has a truth-value. Among the formulae which have a truth- value, whenever all the premises are true, the consequence is true.

Weak validity means that if we assume that all the formulae in Σ and the negation of C have truth-values, they cannot be true at the same time. To say that the negation of C is true, assuming that it has a truth-value, is the same as saying that the negation of C has the value of truth (strong concept of truth). Accordingly 'the negation of C cannot be true' here means that 'the negation of C cannot have the value of truth', namely, 'the negation of C must be gapped or has the value of falsity'. This is equivalent to 'C must be gapped or have the value of truth', namely, 'if it has a truth-value, C must be true (weak concept of truth)'.

To the contrary, strong validity means that even if we do not assume that all the formulae in Σ and the negation of C have truth-values, they cannot be true at the same time. To say that the negation of C is true, without assuming that it has a truth-value, is the same as saying that the negation of C is gapped or has the value of truth (weak concept of truth). Accordingly 'the negation of C cannot be true' here means that 'the negation of C can neither be gapped or have the value of truth', namely, 'the negation of C must have the value of falsity'. This is equivalent to 'C must have the value of truth', namely, 'C has a truth-value and is true (strong concept of truth).

Some readers may still be irritated by the remaining asymmetry in our two definitions. If so, I want to point out that at least these definitions result from two natural notions of unsatisfiability shown above. In my view, the relation of logical consequence or validity in a truth-functional logic cannot but be unsatisfiability.

I am not sure as to whether these two definitions can capture the features of our ordinary inferences better than others. My principal concern is the generalization of total logic. I want to show that *total logic is*, as it were, *a specialized partial logic*. The more these two logics share properties, the better for me. Therefore if the apparent naturalness of other definitions is the only reason to adopt them, I would prefer the definitions described in this paper, as they retain some advantageous semantic properties which the others lack. In the next section I will explore those properties. To say in advance, the holding of semantic deduction theorem is one of them. Thanks to deduction theorem we can also grasp w-valid and s-valid arguments as the arguments which make the corresponding conditional formula a weak and strong tautology respectively.

Before moving to the next section, it should be noticed that the above justification of the two definitions of validity crucially depends on my characterization of partial logic. For my justification presupposes that in SPL there is only one negation operator, which is reliable and monotonic. If we admit another negation operator such as external negation, which is non-monotonic, we can equally justify other definitions of validity.[10]

[10] External negation is the one defined by the table 1.1 in the Appendix of this paper:[Busch, D. 1996]p.58.

1.4 Semantic Theorems

We can easily prove the following semantic theorems:

< Th.1 > $\Sigma \models_s C \Rightarrow \Sigma \models_w C$

[proof] It results from the definitions of validity. ■

< Df >

$\Sigma \models C$ =df The argument which derives C from Σ is valid in the basic logic.

(This implies that the argument includes only the basic formulae.)

< Th.2 > If an argument includes only the basic formulae,

$\Sigma \models_w C \Rightarrow \Sigma \models C$

[proof] It results from reliable determinability. ■

Now I prove Deduction Theorem and Contraposition Theorem. For that we have to choose the basic logic and define the truth-conditions for other basic operators in addition to the negation operator above. Here I adopt classical logic as the basic logic and the truth-tables which Kleene defined for his strong three-valued logic. [11]

A∧B	t	-	f
t	t	-	f
-	-	-	f
f	f	f	f

A∨B	t	-	f
t	t	t	t
-	t	-	-
f	t	-	f

A→B	t	-	f
t	t	-	f
-	t	-	-
f	t	t	t

These operators have another desirable property for partial logic that is called 'strength'; an operator is stronger than another under partial valuation iff the former gives a truth-value to the formula which it bounds whenever the latter gives one to the same formula. Kleene's operators above are the strongest definitions that are both reliable and monotonic relative to classical logic.[12]

< Th.3w > Weak Deduction Theorem (WDT)

$P_1, P_2, \text{-}, P_n \models_w C$ iff $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow C$

< Th.3s > Strong Deduction Theorem(SDT)

$P_1, P_2, \text{-}, P_n \models_s C$ iff $\models_s (P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow C$

< Th.4w > Weak Contrapostition Theorem(WCT)

$P_1, P_2, \text{-}, P_n \models_w C$ iff $\neg C \models_w \neg (P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n)$

< Th.4s > Strong Contrapostition Theorem(SCT)

$P_1, P_2, \text{-}, P_n \models_s C$ iff $\neg C \models_s \neg (P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n)$

[proof]

(1) When n=1, the theorems above are expressed in the following way:

T1 $P \models_w C$ iff $\models_w P \rightarrow C$

T2 $P \models_s C$ iff $\models_s P \rightarrow C$

T3 $P \models_w C$ iff $\neg C \models_w \neg P$

T4 $P \models_s C$ iff $\neg C \models_s \neg P$

We can confirm them by the truth-table below:

[11] [Kleene, S. C. 1952] The truth tables of 'A∨B' and 'A→B' result from their definitions.

[12] [Langhholm, T. 1996]p.11f. Blamey and Wang also adopted Kleene's operators.

P	C	P→C	¬C	¬P
t	t	t	f	f
t	-	-	-	f
t	f	f	t	f
-	t	t	f	-
-	-	-	-	-
-	f	-	t	-
f	t	t	f	t
f	-	t	-	t
f	f	t	t	t

(2) We can prove that when n≧2, both WDT and SDT hold in the following way:

(i) In the case that $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_{n-1})$ is true,
All the premises $P_1,P_2,\text{–},P_n$ are true iff P_n is true. So
$P_1,P_2,\text{–},P_n \models$w C iff $P_n \models$w C.
Moreover the value of '$(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow$C' coincides with that of '$P_n \rightarrow$C'. So
$\models$w $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow$C iff $\models$w $P_n \rightarrow$C
By T1, $P_n \models$w C iff $\models$w $P_n \rightarrow$C.
Therefore, $P_1,P_2,\text{–},P_n \models$w C iff $\models$w $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow$ C.
This is WDT. Similarly for SDT.

(ii) In the case that $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_{n-1})$ is false, $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n)$ is also false. So both '$P_1,P_2,\text{–},P_n \models$w C' and '$\models$w $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow$C' trivially hold. So WDT holds. Similarly for SDT.

(iii) In the case that $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_{n-1})$is gapped, the value of $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n)$ coincides with that of Pn. If Pn is true or false, it is the same as (i) and (ii) respectively. If it is gapped, both of '$P_1,P_2,\text{–},P_n \models$w C' and '$\models$w $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow$C' trivially hold. So WDT holds. As for '$P_1,P_2,\text{–},P_n \models$s C' and '$\models$s $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow$C', both of them hold iff C is true. So SDT holds.

By(i),(ii) and (iii), WDT and SDT hold in any case when n≧2.
By (1) and (2), WDT and SDT hold for any natural number n. ■

We can also prove Contraposition Theorems in the similar way. However I omit the part (2) of their proof for brevity.

Using Deduction Theorems we can prove the following theorems:

< Th.5 > If an argument includes only the basic formulae,
$\Sigma \models C \Rightarrow \Sigma \models$w C
[proof] (by Reductio ad Absurdum)
Assume that $\Sigma=\{P_1,P_2,\text{–},P_n\}$. By WDT, $\Sigma \models$w C iff $\models$w $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow$C. If < Th.5 > does not hold, it means that there are cases where '$\Sigma \models$ C' holds but '$\Sigma \models$w C' does not. Because of reliable determinability it is possible only if there is a valuation which makes '$(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \rightarrow$C' false. But this contradicts the monotonicity of the basic operators, since under total valuation the formula is true. So < Th.5 > holds. ■

By < Th.2 > and < Th.5 > we can conclude that the validity of classical logic coincides with the weak validity of SPL restricted to basic operators. We can say that it is another way to hold classical validity allowing the truth-value gap as well as supervaluational logic.[13]

< Th.6 > There are no s-valid arguments which include only the basic formulae.[14]

[proof] (by Reductio ad Absurdum)

Assume that '$P_1,P_2,\text{–},P_n \models$s C' is such an argument. By SDT, $P_1,P_2,\text{–},P_n \models$s C iff $\models$s $(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \to$C. It implies that there is a partial valuation which makes '$(P_1 \wedge P_2 \text{—} \wedge P_n) \to$C' true, while all the atomic formulae in it are gapped. But no monotonic operators make such a valuation possible. Therefore Th.6 holds. ■

If we adopt the modal operators given in §2 together with Kleene's, the following are among s-valid arguments:

TA $\models$s A (cf. A$\not\models$s A, A$\not\models$s TA)
LA $\models$s A$\vee \neg$ A (cf. $\not\models$s A$\vee \neg$ A)
$\models$s TA $\vee \neg$ TA
(A$\mapsto$B) $\wedge$ LA $\models$s TB

We can take these s-valid arguments as showing the validity which is proper to SPL, in contrast with w-valid arguments.

1.5 Comparison with other Definitions of Validity

Weak, Strong and Wang's validity are three of the four conceptions of validity I enumerated in the introduction. The final one is the following:

(d) The consequence is not false whenever no premises are false.

Blamey's validity is the conjunction of Wang's and (d). Wang's validity and (d) cannot be ordered in terms of strength. Accordingly we can make two order sequences of strength:

Weak validity < Wang's validity < Blamey's validity < Strong validity
Weak validity < (d) < Blamey's validity < Strong validity

Based on these orders, I rename here the intermediate concepts of validity in the following way:

Blamey's validity : Medium validity, being m-valid, $\models$m
Wang's validity: Low1 validity, being l_1-valid, $\models l_1$
(d) : Low2 validity, being l_2-valid, $\models l_2$

Among them Contraposition Theorem holds only in Weak, Medium and Strong validity. Deduction Theorem holds only in Weak and Strong validity.

As for Medium validity, if we adopt Lukasiewicz's conditional instead of Kleene's, Deduction Theorem holds. However, as Lukasiewicz's conditional is non-monotonic, Blamey cannot adopt it, because he

[13] It has merits in that it keeps extensionality and does not include the quantification over valuations in the valuation of a formula.[Woodruff, P. 1984] [Langhholm,T. 1988]p.8.
[14] Strictly speaking, this theorem presupposes that the basic operators do not include the truth-constant operator, which always brings about truth under any partial valuation, though it is also monotonic.

insists that the operators of partial logic should be monotonic.[15]

Blamey gives two theorems which make his definition preferable:

< Df > A==B =df A and B always have the same value under partial valuation.

< Th.m1 > A ==B iff $A \models_m B$ and $B \models_m A$

< Th.m2 > A==(A$\wedge$B) iff B==(A$\vee$B) iff $A \models_m B$

Neither of them holds in Weak nor Strong validity. However, the following theorems which correspond to < Th.m1 > hold in both:

< Th.m1w > $\models_w A \leftrightarrow B$ iff $A \models_w B$ and $B \models_w A$

< Th.m1s > $\models_s A \leftrightarrow B$ iff $A \models_s B$ and $B \models_s A$

In my view, this formulation is more appropriate for partial logic than Blamey's. 'A==B' is the so called three-valued equivalence, which requires the coincidence of gap-values besides truth-values. This implies that the gap-value is treated as an equally qualified value as the truth-values. In fact if we express it by an operator in the object language it has to be non-monotonic, which is against Blamey's characterization of partial logic. That is why he defined the equivalence in the meta-language. On the contrary, our formulation requires only the coincidence of *truth*-values and the equivalence can be expressed by a basic operator in the object language.

As for < Th.m2 >, the following < Th.m2w >, which is modified in the same way with < Th.m1 >, holds, while < Th.m2s > does not:

< Th.m2w > $\models_w A \leftrightarrow (A\wedge B)$ iff $\models_w B \leftrightarrow (A\vee B)$ iff $A \models_w B$

< Th.m2s > $\models_s A \leftrightarrow (A\wedge B)$ iff $\models_s B \leftrightarrow (A\vee B)$ iff $A \models_s B$

However, if we scrutinize the way in which < Th.m2s > fails, we can confirm that it is not against the point of the theorem, which requires the coincidence of the truth-values of A and A$\wedge$B and the truth-values of B and A$\vee$B, iff $A \models_s B$:

The value assignment which makes the theorem fail is the following:

(1)When A is gapped and B is true, $A \leftrightarrow (A\wedge B)$ is gapped.

(2)When A is false and B is gapped, $A \leftrightarrow (A\vee B)$ is gapped.

However, in these cases the following hold:

(1a) When A is gapped, A$\wedge$B is also gapped.

(2a) When B is gapped, A$\vee$B is also gapped

So these cases do not contradict the point of the theorem at all, even if it required the coincidence of the gap-value, too.

1.6 Conclusion

SPL can be characterized as the generalization and extension of a total two-valued logic to deal with partiality of truth-valuation. It consists of basic operators, which are monotonic and reliable in relation

[15] Lukasiewicz's implication is the one defined by the table 1.2 in the Appendix. It differs from Kleene's strong implication only at the underlined value, which make this implication non-monotonic.

If we adopt Schmitt's implication, Deduction Theorem holds for Low1-validity (Wang's validity). Schmitt's implication is the one defined using external negation and Kleene's strong disjunction as follows:

$A \supset B$ =df $\sim A \vee B$

However, this implication is also non-monotonic.[Busch, D. 1996]p.58f.

with its basic logic, and modal operators, which are weakly monotonic and always bring about truth-values under partial valuation.

Given such a characterization, Weak and Strong validity as defined above are more appropriate than other definitions of validity in partial logic. If we adopt Kleene's definitions of basic operators, which have an additional desirable property of strength, (semantic) Deduction Theorem and Contraposition Theorem hold. In this case Weak validity coincides with classical validity if its operators are restricted to the basic operators. So SPL can be viewed as an alternative to supervaluational logic to retain classical validity allowing the truth-value gap. By contrast no valid arguments in classical logic are strongly valid. Strong validity shows the validity of arguments which are proper to SPL.

[References]

[Blamey, S. 1986] Partial Logic, in [Gabbay, D. and Guenthner, F. (Eds.)]pp.1-70.

[Busch, D. 1996] Sequent Formalization of Three-Valued Logic, in [Doherty, P. (Ed.) 1996].pp.45-75.

[Doherty, P. (Ed.) 1996] *Partiality, Modality, and Nonmonotonicty*, CSLI.

[Fenstad, J . E. 1997] Partiality, in [van Benthem, J. and ter Mulen, A. (Ed.) 1997] pp.649-682.

[Gabbay, D. and Guenthner, F. (Eds.) 1986] *Handbook of Philosophical Logic* III, D.Reidel.

[Kleene, S. C. 1952] *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand.

[Langhholm,T. 1988] *Partiality, Truth and Persistence*, CSLI.

[Langhholm,T. 1996] How Different is Partial Logic?, in [Doherty, P. (Ed.) 1996]pp.3-43.

[Lambert, K.(Ed) 1970] *Philosophical Problems in Logic*, D.Reidel.

[van Benthem, J. and ter Mulen, A. (Eds.) 1997] *Handbook of Logic and Language*, Elsevier Science B. V..

[Wang, H. 1961] The calculus of partial predicates and its extension to set theory I, in *Zeitschr. math. Logik Grundl. Math.*, pp.283-288.

[Woodruff, P. 1970] Logic and Truth-Value Gaps, in [Lambert,K.(Ed) 1970]pp.121-142.

[Woodruff, P., 1984] On Supervaluations in Free Logic, in *Journal of Symbolic Logic49*, pp.943-950.

[Appendix]

A	∼A
t	f
-	t
f	t

[table 1.1] External Negation

A⇀B	t	-	f
t	t	-	f
-	t	**t**	-
f	t	t	t

[table 1.2] Lukasiewicz's Implication

第2章　部分ディオドロス時間様相論理PS4.3

この章では、単純（命題）部分論理 SPL をディオドロス時間様相（命題）論理 S4.3 によって時間化した部分ディオドロス時間様相論理 PS4.3 を構成する。

2.1　単純部分論理SPL

2.1.1　導入

単純部分論理 (SPL) とは、大まかに言えば、真理値ギャップを許容する外延的論理学のことである（「単純」が外延性に、「部分」が真理値ギャップに対応する。）ここで示される SPL の体系は、古典命題論理を真理値ギャップの許容によって一般化すると同時に、非古典的な真理関数的論理演算子をいくつか付加する（実質的にはひとつに還元できる）ことによって拡張したものである。

第一節においてその構文論・意味論・タブローによる証明論を提示するが、それらのうち、第一章の中ですでに証明を行ってある意味論的諸定理については証明を省略した。

2.1.2　構文論

SPL のシンタクスは次のとおりである：

(1) 原子文 p, q, r, –, p_1, p_2 ,–, p_n,– は論理式（以下、wff と略記）である。
(2) もしも A が wff ならば, ¬ A と TA も wff である.
(3) もしも A と B が wff ならば, (A∧B) も wff である (最も外側の括弧は省略してよいものとする)。
(4) 以上のみが wff である。

'¬', '∧', 'T' を論理演算子と呼ぶ。これらに加えて、以下の論理演算子を定義によって導入する：

A∨B　=df　¬ (¬ A∧ ¬ B)
A→B　=df　¬ (A∧ ¬ B)
A↔B　=df　(A→B)∧(B→A)
FA　=df　T ¬ A
LA　=df　TA∨FA
MA　=df　¬ LA

'¬', '∧', '∨', '→', '↔' を基本 (basic) 演算子、それ以外の論理演算子を確定 (determinate) 演算子と呼ぶことにする。また、確定演算子を含んでいない式を基本式、含んでいる式を確定式と呼ぶことにする。

2.1.3　意味論

【部分付値 (Partial Valuations)】

任意の部分関数 V: S $\mapsto$ {t,f} を部分付値と呼ぶ。ただし、t と f はそれぞれ真、偽の通常の真理値を表し、S はすべての原子文の集合を表す。V は部分関数なので、S がいずれの値も付置されない場合があるが、そのようなとき、V(S)= - と表すことにする。V(S)= - であるような S がひとつもないとき、V を全体付値 (total valuation) と呼ぶ。

任意の式 A に対して、もしも V(A)=t ならば V のもとで A は真であり、もしも V(A)=f ならば V のもとで A は偽であり、いずれでもなければ A は空 (gappy) である。また、もしも V(A)≠f ならば V のもとで A は潜在的に (potentially) 真であり、もしも V(A)≠t ならば V のもとで A は潜在的に偽である、と呼ぶことにする。さらに、潜在的な真偽との区別を強調するために、通常の真偽をそれぞれ確定的に (determinately) 真・偽、と呼んだり、両者を強弱の真・偽として区別することもある。

＜定義 1 ＞論理演算子を含んだ wff に対する部分付値を次のように定める：

1. $V(\neg A) = t$ iff $V(A)=f$;
2. $V(\neg A) = f$ iff $V(A)=t$;
3. $V(A \wedge B) = t$ iff $V(A)=t$ and $V(B)=t$;
4. $V(A \wedge B) = f$ iff $V(A)=f$ and $V(B)=f$;
5. $V(TA) = t$ iff $V(A)=t$;
6. $V(TA) = f$ iff $V(A) \neq t$;

＜系 1 ＞上の定義のもとでは、他の演算子を含んだ wff について次のような部分付値が帰結する：

1. $V(A \vee B) = t$ iff $V(A)=t$ or $V(B)=t$;
2. $V(A \vee B) = f$ iff $V(A)=f$ and $V(B)=f$;
3. $V(A \rightarrow B) = t$ iff $V(A)=f$ or $V(B)=t$;
4. $V(A \rightarrow B) = f$ iff $V(A)=t$ and $V(B)=f$;
5. $V(A \leftrightarrow B) = t$ iff ($V(A)=t$ and $V(B)=t$) or ($V(A)=f$ and $V(B)=f$) ;
6. $V(A \leftrightarrow B) = f$ iff ($V(A)=t$ and $V(B)=f$) or ($V(A)=t$ and $V(B)=f$) ;
7. $V(FA) = t$ iff $V(A)=f$;
8. $V(FA) = f$ iff $V(A) \neq f$;
9. $V(LA) = t$ iff $V(A)=t$ or $V(A)=f$;
10. $V(LA) = f$ iff $V(A) \neq t$ and $V(A) \neq f$;
11. $V(MA) = t$ iff $V(A) \neq t$ and $V(A) \neq f$;
12. $V(MA) = f$ iff $V(A)=t$ or $V(A)=f$;

以上の定義と系を真理表で表すと以下のとおりである (B の真理値は第一行に示されている)：

[基本演算子]

A	¬A
t	f
-	-
f	t

A∧B	t	-	f
t	t	-	f
-	-	-	f
f	f	f	f

A∨B	t	-	f
t	t	t	t
-	t	-	-
f	t	-	f

A→B	t	-	f
t	t	-	f
-	t	-	-
f	t	t	t

A↔B	t	-	f
t	t	-	f
-	-	-	-
f	f	-	t

基本演算子の意味論はクリーニの強い三値論理の意味論と一致し、次のような意味論的性質をもっている：

＜定理 1 ＞信頼的確定可能性（略して信頼性）(Reliable Determinability, Reliability)

SPL の基本演算子の意味を定義する真理表は、全体付値のもとでは古典論理と一致する。言い換えれば、基本式の真理値は、もしもそのすべての原子式が真理値をもつならば、古典論理の場合の真理値と一致する。

[確定演算子]

A	TA	FA	LA	MA
t	t	f	t	f
-	f	f	f	t
f	f	t	t	f

＜定理２＞単調性 (Monotonicity)

もしも、空である原子式を含んでいる基本式が真理値をもっているならば、その式は、当該の原子式の空値を真理値へと変換することによって、その真理値の変更を被ることはない。

＜定義３＞

演算子１は演算子２よりも強い =df 部分付値のもとで、演算子１は、演算子２がその作用域となる式に対して真理値を与えるとき常に、その同じ作用域に対して真理値を与える。

＜定理４＞最強性 (Strength)

上で規定された各基本演算子は、古典論理にもとづく信頼的かつ単調的演算子のうち、もっとも強い演算子である。

一方、確定演算子は、次のような性質をもっている：

＜定理５＞強い確定可能性 (Strong Determinability)

確定演算子は、部分付値のもとで常に真理値をもたらす。

定理４の系として次が得られる：

＜系１＞弱い単調性 (Weak Monotonicity)

もしも、空である原子式を含んでいる式が真理値をもっているならば、その式は、当該の原子式の空値を真理値へと変換することによって、真理値を失う（すなわち、その値が空値に変わる）ことはない。

強い確定可能性は、確定演算子が真理付値の部分性そのものについて記述するメタ的・自己言及的な機能をもっていることの帰結だと考えられる。その結果、SPL の単調性は失われるが、上に記した意味での弱い単調性は保持される。

【意味論的妥当性 (Semantic Validity)】

強弱二つの意味論的妥当性を次のように定義する：

＜定義 3w ＞弱妥当性（弱妥当的）(Weak Validity, being w-valid)

$\Sigma \models_w C$ =df 集合 $\Sigma \cup \{\neg C\}$ の要素であるすべての式の値を t とするような部分付値は存在しない。

＜定義 3s ＞強妥当性（強妥当的）(Strong Validity, being s-valid)

$\Sigma \models_s C$ =df 集合 $\Sigma \cup \{\neg C\}$ の要素であるすべての式の値を t または - とするような部分付値は存在しない。

※以下において、弱妥当性と強妥当性のいずれにも当てはまる事柄については、$\Sigma \models C$ と表記する。また、部分付値 V が Σ のすべての要素の値を t とする場合、V(Σ)=t、その値を t または - とする場合、$V(\underline{\Sigma})=t$ と表記する。

弱妥当性は、ある集合に属するすべての式の値を t とするような部分付値が存在するという強い充足可能性の不成立を表し、逆に、強妥当性は、ある集合に属するすべての式の値を t または-とするような部分付値が存在するという弱い充足可能性の不成立を表している。その結果、妥当性における強弱の順位は充足可能性における強弱の順位の逆になる。

全体付値のもとでは、「真なる前提から必ず真なる帰結を導く論証」と「真なる前提から決して偽なる帰結を導くことのない論証」が一致するが、部分付値のもとでは、両者が必ずしも一致しない。SPL は、強弱の充足可能性にもとづきながら後者の定義を採用し、「強い真なる前提から決して強い偽なる帰結を導くことのない論証」としての弱妥当性と、「弱い真なる前提から決して弱い偽なる帰結を導くことのない論証」としての強妥当性とを区別していると考えられる。その意味で、SPL は、真理のみに着目しながら真理保存性によって妥当性を定義するのではなく、前提における「真」と帰結における「偽」とを対等に扱いながら妥当性を定義する論理だといえる。これは、「帰結の否定と前提（の連言）との両立不可能性としての妥当性」という、ストア派による妥当性の定義に近い定義でもあり、前提における肯定と帰結における否定とを対等に扱う妥当性の定義だともいえる。

ただし、真理保存性という観点のみを用いてこれら強弱の妥当性について定義を行うことも可能である。その場合、弱妥当性は、「もしも論証中のすべての式が真理値を持っており、かつ、すべての前提が真であるならば、帰結も必ず真である。」という意味となり、強妥当性は、「もしも前提中の真理値を持つ式がすべて真であるならば、帰結も必ず真である。」という意味となる。すなわち、この場合は、真理そのものに強弱の区別を行うのではなく、「保存性」に強弱の区別を行うことになる。この定義に即しても、全体付値のもとでは両者は一致することは明らかであろう。

上の定義を採用すると、次のような意味論的定理が成立する：

＜系 2＞

$\Sigma \models_w C$ if $\Sigma \models_s C$

＜定理 5w＞弱演繹定理 (Weak Deduction Theorem, WDT)

$P_1, P_2, \text{—}, Pn \models_w C$ iff $\models_w (P_1 \wedge P_2 \wedge \text{—} \wedge Pn) \rightarrow C$

＜定理 5s＞強演繹定理 (Strong Deduction Theorem, SDT)

$P_1, P_2, \text{—}, Pn \models_s C$ iff $\models_s (P_1 \wedge P_2 \wedge \text{—} \wedge Pn) \rightarrow C$

＜定理 6w＞弱対偶定理 (Weak Contraposition Theorem, WCT)

$P_1, P_2, \text{—}, Pn \models_w C$ iff $\models_w \neg C \rightarrow \neg (P_1 \wedge P_2 \wedge \text{—} \wedge Pn)$

＜定理 6s＞強対偶定理 (Strong Contraposition Theorem, SCT)

$P_1, P_2, \text{—}, Pn \models_s C$ iff $\models_s \neg C \rightarrow \neg (P_1 \wedge P_2 \wedge \text{—} \wedge Pn)$

＜定義 4＞

$\Sigma \models_c C$ =df Σ から C を導く論証は、古典論理において妥当である。

（これは、当該の論証が基本式のみを含んでいることを含意している。）

＜定理 7＞

$\Sigma \models_w C$ iff $\Sigma \models_c C$

＜定理 8＞

基本演算子のみを含む強妥当的な論証は存在しない。

定義だけに即して考えると、弱妥当性においては推移性が成立せず、強妥当性においては反射性が成立しない。しかし、弱妥当性において推移性が成立することが証明できる：

＜定理 9＞弱妥当性においても次の推移性が成立する：

$\Sigma \models_w C_1, C_1 \models_w C_2$ ならば、$\Sigma \models_w C_2$

[証明]

(a)C_1 が確定式である場合。

C_1 は必ず真理値を持っているので、「$\Sigma \models_w C_1$」により、Σ のすべての式が真であるならば、C_1 は真であるといえる。そしてその場合、「$C_1 \models_w C_2$」により、C_2 は t または - であるので、「$\Sigma \models_w C_2$」が成立する。

(b)C_1 が基本式である場合。

（背理法）

$\Sigma =\{ P_1, P_2,—,Pn \}$ だとする。そして、$\Sigma \models w\ C_1, C_1 \models w\ C_2$ が成立しているとする。すると定理２により、

$\models w\ (P_1 \wedge P_2 \wedge — \wedge Pn) \rightarrow C_1 \ldots$ ①

$\models w\ C_1 \rightarrow C_2 \ldots$ ②

いま、$\Sigma \not\models w\ C_2$ だと仮定する（背理法の仮定)。すると、定理２により

$\not\models w\ (P_1 \wedge P_2 \wedge — \wedge Pn) \rightarrow C_2 \ldots$ ③

ということは、

$V_1(P_1 \wedge P_2 \wedge — \wedge Pn)=$ t、$V_1(C_2)=$ f であるような部分付値 V_1 が存在するということになる。その場合、①②より、$V_1(C_1)$ は空値以外にあり得ない。さて、いま V_1 を拡張すること、つまり、V_1 における空値を真理値に変換することによって得られる、C_1 の値をそれぞれ t、f とするような全体付値 V_2、V_3 が存在すると仮定しよう。V_2 が存在する場合、②より $V_2(C_2)$=t または - 。したがって、③が成立することはあり得ない。よって V_2 は存在しない。V_3 が存在する場合、①より、$V_3(P_1 \wedge P_2 \wedge — \wedge Pn)$=f または - 。したがってこの場合も、③が成立することはあり得ない。よって V_3 も存在しない。しかし、定理１（信頼性定理）により、V_2 または V_3 は存在しなければならない。これは矛盾である。したがって、背理法の仮定 $\Sigma \not\models w\ C_2$ が否定されなければならない。すなわち、$\Sigma \models w\ C_2$ でなければならない。

(a)(b) により、推移律「$\Sigma \models w\ C_1, C_1 \models w\ C_2$ ならば、$\Sigma \models w\ C_2$」が成立する。 ■

＜定理 10＞

(a) TA $\models$s TA (cf. A $\not\models$s A)

(b) TA $\models$s A (cf. A $\not\models$s TA)

強妥当性においては、真理値を持たない場合がある式に関しては反射性が成立しない。しかし実はそれこそが、部分論理の特徴だと言える。部分論理とは、真理値を持つことを保証された命題にのみ反射性を承認するような妥当性の概念も含んでいる論理なのである。これはちょうど、ある存在論的立場では、実在することを保証された対象にのみ自己同一性を承認するのと類比的だと考えられる（もちろん、両者の並行性が厳密にはどこまで成立するのかについては、さらなる検討を要する)。

なお、強妥当性と排中律との関係では、つぎの定理が成立する：

＜定理 11＞

(a) LA $\models$s A∨￢A (cf. $\not\models$s A∨￢A)

(b) $\models$s TA ∨￢TA

(c) $\models$s ￢TA ∨A (cf. $\not\models$s TA∨￢A)

＜定義 5＞三値論理的同値性 (Three-valued Logical Equivalence)

A==B =df すべての部分付値のもとで V(A)=V(B) (V(A)=V(B)= - も含む)

S．ブレイミーによる、部分論理における妥当性の別の定義「$\models_B$」([Blamey, 1986]) においては次が成立するが、強弱いずれの妥当性においても、それは成立しない：

A ==B iff A $\models_B$ B and B $\models_B$ A

しかし、三値的同値性を表す演算子は非単調的演算子であり、部分論理における同値性としてはふさわしくない。それは、空値を真理値と同等視する三値論理においてのみ意味を持つ同値性なのである。そして SPL においては、単調的演算子のみを用いた次の定理が代わりに次が成立する：

＜定理 12w＞ $\models$w A ↔ B iff A $\models$w B and B |=w A

＜定理 12s＞ $\models$s A ↔B iff A $\models$s B and B $\models$s A

また、ブレイミーの定義においては次も成立するが、やはり強弱いずれの妥当性においても、それは成立しない：

A==(A∧B) iff B==(A∨B) iff $A \models_B B$

その代わり、弱妥当性においては次が成立する。

＜定理 13w ＞ ⊨w A ↔ (A∧B) iff ⊨w B ↔ (A∨B) iff A ⊨w B

だが強妥当性においては次は成立しない：

⊨s A ↔ (A∧B) iff ⊨s B ↔ (A∨B) iff A ⊨s B

しかし、この定理が成立しない理由を詳しく見てみると、この不成立は、A ⊨s B iff V(A) =V(A∧B) iff V(B) =V(A∨B) であることを示そうとするこの定理の趣旨に反しないことが分かる。
というのも、この定理を不成立にさせる付値は次の二つの場合であるが、

(1) V(A)= - , V(B)=t のとき、V(A ↔ (A∧B))= - 。
(2) V(A)= f, V(B)= - のとき、V(A ↔ (A∨B))= - 。

これらの場合、それぞれ次が成立している：

(1a) V(A)= - のとき、 V(A∧B)= - 。
(2a) V(B)= - のとき、 V(A∨B)= - 。

したがって、これらの定理が、当該の条件を満たす場合に空値の一致も要求するような定理だったとしても、強妥当性はその要求を満たすことが分かる。

2.1.4 証明論——SPL タブロー

＜定義 1 ＞ A: 素式、 $\underline{A}$: 線式、 A*: 式（素式または線式)、Σ*: 式の集合
＜定義 2 ＞
A*と B*（順不同）は両立不可能 =df (a) A* =C かつ B* = ¬ C または (b) A* = C かつ B* = $\underline{\neg C}$ または (c)A* = $\underline{C}$ かつ B* = ¬ C。
＜定義 3 ＞
タブローが完結している。 =df そのタブローに対して適用できるすべての規則が適用された。
＜定義 4 ＞
枝が閉じている。 =df その枝上の二つの式が両立不可能である（それ以外の場合は「枝が開いている」と言う)。
タブローが閉じている。 =df そのタブローのすべての枝が閉じている（それ以外の場合は「タブローが開いている」と言う)。
＜定義 5 ＞
Σ = $\{P_1,P_2,\ldots,Pn\}$ とする。
Σ ⊢w C =df $\{P_1,P_2,\ldots,Pn, \neg C\}$ が閉じている。
Σ ⊢s C =df $\{\underline{P_1},\underline{P_2},\underline{\ldots},\underline{Pn},\underline{\neg C}\}$ が閉じている。

※以下において、Σ ⊢w C、Σ ⊢s C のいずれにも当てはまる事柄については、Σ ⊢ C と表記する。

＜弱い規則＞

$(\wedge w)$

$\surd\ A \wedge B$
$|$
A
B

$(\neg w)$

A
$\neg A$
$|$
$\times$

(Tw)

$\surd\ TA$
$|$
A

$(\neg\wedge w)$

$\surd\ \neg(A \wedge B)$
$|\quad |$
$\neg A \quad \neg B$

$(\neg\neg w)$

$\surd\ \neg\neg A$
$|$
A

$(\neg Tw)$

$\surd\ \neg TA$
$|$
$\underline{\neg A}$

＜強い規則＞

$(\wedge s)$

$\surd\ \underline{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}}$
$|$
$\underline{A}$
$\underline{B}$

$(\neg s_1)$

$\underline{A}$
$\neg A$
$|$
$\times$

$(\neg s_2)$

A
$\underline{\neg A}$
$|$
$\times$

(Ts)

$\surd\ \underline{TA}$
$|$
A

$(\neg\wedge s)$

$\surd\ \underline{\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})}$
$|\quad |$
$\underline{\neg A} \quad \underline{\neg B}$

$(\neg\neg s)$

$\surd\ \underline{\neg\neg A}$
$|$
$\underline{A}$

$(\neg Ts)$

$\surd\ \underline{\neg TA}$
$|$
$\underline{\neg A}$

---

ex.1w $\models_w \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P}$

$\surd\ \neg(P \vee \neg \mathrm{P})$
$|$
$\neg P$
$\neg\neg P$
$|$
$\times$

ex.1s $\not\models_s \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P}$

$\surd\ \underline{\neg(\mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P})}$
$|$
$\underline{\neg P}$
$\surd\ \underline{\neg\neg \mathrm{P}}$
$|$
$\underline{P}$

ex.2w $TP \models_w \mathrm{P}$

$\surd\ \mathrm{TP}$
$\neg P$
$|$
P
$|$
$\times$

ex.2s $TP \models_s \mathrm{P}$

$\surd\ \underline{\mathrm{TP}}$
$\underline{\neg P}$
$|$
P
$|$
$\times$

ex.3w $P \models_w \mathrm{TP}$

P
$\surd\ \neg \mathrm{TP}$
$|$
$\underline{\neg P}$
$|$
$\times$

ex.3s $P \not\models_s \mathrm{TP}$

$\underline{P}$
$\surd\ \underline{\neg \mathrm{TP}}$
$|$
$\underline{\neg P}$

ex.4w $\not\models$w TP ∨ T ¬ P

$$
\begin{array}{ll}
\surd & \neg(\mathrm{TP} \vee \mathrm{T}\neg \mathrm{P}) \\
 & | \\
\surd & \neg \mathrm{TP} \\
\surd & \neg \mathrm{T} \neg \mathrm{P} \\
 & | \\
 & \underline{\neg P} \\
\surd & \underline{\neg\neg \mathrm{P}} \\
 & | \\
 & \underline{P}
\end{array}
$$

ex.4s $\not\models$s TP ∨ T ¬ P

$$
\begin{array}{ll}
\surd & \underline{\neg(\mathrm{TP} \vee \mathrm{T}\neg \mathrm{P})} \\
 & | \\
\surd & \underline{\neg \mathrm{TP}} \\
\surd & \underline{\neg \mathrm{T} \neg \mathrm{P}} \\
 & | \\
 & \underline{\neg P} \\
\surd & \underline{\neg\neg \mathrm{P}} \\
 & | \\
 & \underline{P}
\end{array}
$$

2.1.5 SPLタブローの健全性・完全性・決定可能性

＜定義１＞Vを任意の部分付値とする。また、bをタブローの任意の枝とする。

Vは枝bにおいて弱充足可能である (w-satisfiable) =df 枝b上のすべての式Aについて V(A)=t または V(A)= - 。

Vは枝bにおいて強充足可能である (s-satisfiable) =df 枝b上のすべての式Aについて V(A)=t。

＜充足可能定理＞

もしもVが枝bにおいて弱充足可能であり、タブロー規則がbに新たに適用されたならば、Vはそれによって生成される枝の少なくとも一つにおいて弱充足可能である。

もしもVが枝bにおいて強充足可能であり、タブロー規則がbに新たに適用されたならば、Vはそれによって生成される枝の少なくとも一つにおいて強充足可能である。

＜定義２＞

V($\underline{A}$)=t =df V(A)=t または V(A)= - 。

V($\underline{A}$)=f =df V(A)=f または V(A)= - 。

＜補助定理１＞

V($\underline{A}$)=f iff V($\underline{\neg A}$)=t

＜定義３＞

Vを任意の部分付値とする。bをタブローの任意の枝とする。

Vは枝bにおいて充足可能である (satisfiable) =df 枝b上のすべての式A*について V(A*)=t。

＜健全性補助定理＞

もしもVが枝bにおいて充足可能であり、タブロー規則がbに新たに適用されたならば、Vはそれによって生成される枝の少なくとも一つにおいて充足可能である。

[証明]

＜強い規則＞

「∧」「¬」に関する規則の場合は、証明は古典論理と同じ。いまVが枝bにおいて充足可能であり、「TA」がb上にあり、規則をその「TA」に適用するとしよう。すると、「A」を付加して得られる一本の枝だけが派生する。Vはbにおいて充足可能なので、V(TA)=tである。したがって、V(A)=t。それゆえ、Vはb上のすべての式の値をtとする。次に、いまVが枝bにおいて充足可能であり、「¬ TA」がb上にあり、規則をその「¬ TA」に適用するとしよう。すると、「$\underline{\neg A}$」を付加して得られる一本の枝だけが派生する。Vはbにおいて充足可能なので、V(¬ TA)=tである。したがって、V(TA)=fである。すなわち、V(A)=fまたはV(A)=-。よって、V($\underline{\neg A}$)=t。それゆえ、Vはb上のすべての式の値をtとする。■

＜弱い規則＞

いま V が枝 b において充足可能であるとする。

($\wedge$w 規則、$\neg\wedge$w 規則)

いま「$\underline{A\wedge B}$」が b 上にあり、それに対して規則を適用するとしよう。すると、「A」と「B」を付加して得られる一本の枝だけが派生する。V は枝 b において充足可能なので、V($\underline{A\wedge B}$)=t。したがって、(V(A), V(B)) は、(t, -) 、(-, -) 、(-, t) 、(t, t) のいずれかである。よって、V($\underline{A}$)=t かつ V($\underline{B}$)=t。それゆえ、V は b 上のすべての式の値を t とする。次に、「$\underline{\neg (A\wedge B)}$」が b 上にあり、それに対して規則を適用するとしよう。すると、「$\neg$ A」を付加して得られる枝（左の枝）と「$\neg$ B」を付加して得られる枝（右の枝）の二本の枝が派生する。V は枝 b において充足可能なので、V($\underline{\neg (A\wedge B)}$)=t。すなわち V(A$\wedge$B)=f。したがって、(V(A), V(B)) は、(f, -) 、(-, -) 、(-, f) 、(f, f) 、(-,t) 、(t, -) のいずれかである。よって、V($\underline{\neg A}$)=t または V($\underline{\neg B}$)=t。それゆえ、前者の場合、V は左の枝上のすべての式の値を t とし、後者の場合、V は右の枝上のすべての式の値を t とする。

($\neg$ w 規則)

いま「$\underline{\neg\neg A}$」が b 上にあり、それに対して規則を適用するとしよう。すると、「$\underline{A}$」を付加して得られる一本の枝だけが派生する。V は b において充足可能なので、V($\underline{\neg\neg A}$)=t。それゆえ V(A)=f。すなわち、V(A)=t。したがって、V は b 上のすべての式の値を t とする。

(Tw 規則、$\neg$ Tw 規則)

いま「$\underline{TA}$」が b 上にあり、それに対して規則を適用するとしよう。すると、「A」を付加して得られる一本の枝だけが派生する。V は b において充足可能なので、V($\underline{TA}$)=t。それゆえ V(A)=t。したがって、V は b 上のすべての式の値を t とする。次に、「$\underline{\neg TA}$」が b 上にあり、それに対して規則を適用するとしよう。すると、「$\underline{\neg A}$」を付加して得られる一本の枝だけが派生する。V は b において充足可能なので、V($\underline{\neg TA}$)=t。それゆえ V($\underline{TA}$)=f。すなわち、V(A)=f または V(A)=-。よって V($\underline{\neg A}$)=t。したがって、V は b 上のすべての式の値を t とする。■

＜健全性定理＞

(a)（弱健全性）式の有限集合 Σ について、もしも Σ $\vdash$w A であるならば、Σ $\models$w A.

(b)（強健全性）式の有限集合 Σ について、もしも Σ $\vdash$s A であるならば、Σ $\models$s A.

[証明]

対偶を証明する。

（弱健全性）

Σ $\nvdash$w A であると仮定しよう。すると、Σ のすべての要素を t とし、A を f とする、つまり、$\neg$ A を t とするような付値 V、すなわち、V($\neg$ A)=t であるような付値 V が存在することになる。さて、Σ から A を導く論証に対する完結したタブローについて考えよう。V は、最初のリストにおいて充足可能である。ある規則をそのリストに対して適用したとき、健全性補助定理により、V が充足可能であるようなその延長枝を少なくとも一本見つけられる。さらにある規則を適用したとき、同様に、そのまた延長枝を少なくとも一本見つけることができる....。このように健全性補助定理を繰り返し適用していくことによって、V がそのすべての始切片において充足可能であるような、完結した枝 b を見つけることができる。さて、もしもその枝 b が閉じているならば、それは両立不可能な式 B*と C*を含んでいなければならない。つまり、次のいずれかが成立していなければならない : (a) B* = D かつ C* = $\neg$ D、(b) B* = D かつ C* = $\underline{\neg D}$、(c)B* = $\underline{D}$ かつ C* = $\neg$ D。しかし V はその枝において充足可能であり、V(B*)= V (C*)= t となるが、(a)(b)(c) いずれにおいてもそのようなことはあり得ない。それゆえ、そのタブローは開いている。すなわち、Σ $\nvdash$w A である。 ■

（強健全性）

Σ $\nvdash$s A であると仮定しよう。すると、Σ のすべての要素を t または-とし、A を f または - とする、つまり、$\neg$ A を t または - とするような付値 V、すなわち、V ($\underline{\neg A}$)=t であるような付値 V が存在することになる。さて、Σ から A を導く論証に対する完結したタブローについて考えよう。V は、最初のリスト

$(\Sigma^*\cup\underline{\neg A})$ において充足可能である。ある規則をそのリストに対して適用したとき、健全性補助定理により、V が充足可能であるようなその延長枝を少なくとも一本見つけられる。さらにある規則を適用したとき、同様に、そのまた延長枝を少なくとも一本見つけることができる...。このように健全性補助定理を繰り返し適用していくことによって、V がそのすべての始切片において充足可能であるような、完結した枝 b を見つけることができる。さて、もしもその枝 b が閉じているならば、それは両立不可能な式 B^*と C^*を含んでいなければならない。つまり、次のいずれかが成立していなければならない：(a) $B^* = D$ かつ $C^* = \neg D$ 、(b) $B^* = D$ かつ $C^* = \underline{\neg D}$ 、(c)$B^* = \underline{D}$ かつ $C^* = \neg D$。しかし V はその枝において充足可能であり、$V(B^*)= V(C^*)= t$ となるが、(a)(b)(c) いずれにおいてもそのようなことはあり得ない。それゆえ、そのタブローは開いている。すなわち、$\Sigma \nvdash s\ A$ である。■

＜定義 4＞

b をあるタブローの開いた枝だとしよう。b によって導かれる付値とは、次のような任意の部分付値である：

すべての原子式 p に対して、もしも p が b 中のある節上にあるならば、$V(p) = t$ であり、$\underline{p}$ が b 中のある節上にあるならば、$V(p) = t$ または $V(p) =-$ である。また、もしも$\neg p$ が b 中のある節上にあるならば、$V(p) = f$ であり、$\underline{\neg p}$ が b 中のある節上にあるならば、$V(p) = f$ または $V(p) =-$ である。

＜完全性補助定理＞

b をあるタブローの開いた枝だとしよう。V を b によって導かれる付値だとしよう。その場合、次が成立する：

(a) もしも A^* が b 上にあるならば、$V(A^*)=t$。

(b) もしも $(\neg A)^*$ が b 上にあるならば、 $V(A^*)=f$。

[証明]

証明は、A^*の複雑さに対する帰納法を用いて行う。もしも A^*が原子式であるならば、それに対する付値の結果は定義によって真である。もしも A が原子式でないならば、それは$\neg B$、$B\wedge C$、TB のいずれかの形をしている。第一の場合、すなわち $(\neg B)^*$ が b 上にある場合について考えよう。その場合、B^*については定理が成立しているので、$V(B^*)= f$ である。したがって、$V((\neg B)^*)=t$ である。もしも $(\neg\neg B)^*$が b 上にあるならば、b は完結しているので、$\neg$規則が適用されているはずである。したがって、B^*も b 上にある。第二の場合、すなわち $(B\wedge C)^*$が b 上にある場合について考えよう。その場合、$\wedge$ 規則によって、B^*も C^*も b 上にある。帰納法の仮定により、$V(B^*)=V(C^*)=t$ である。それゆえ、望むとおり $V((B\wedge C)^*)=t$ である。次に、$(\neg (B\wedge C)^*$が b 上にあるとしよう。すると、$\neg\wedge$ 規則が適用されているはずなので、$(\neg B)^*$ または $(\neg C)^*$が b 上にある。帰納法の仮定により、$V(B^*)=f$ または $V(C^*)=f$ である。いずれの場合も、望むとおり $V((B\wedge C)^*)=f$ である。第三の場合、すなわち $(TA)^*$が b 上にある場合について考えよう。その場合、T 規則の適用によって A が b 上にある。帰納法の仮定により $V(A)=t$ である。次に、$(\neg TA)^*$が b 上にあるとしよう。その場合、$\underline{\neg A}$ が b 上にある。帰納法の仮定により、$V(\underline{\neg A})=t$。それゆえ、$V(\underline{A})=f$ であり、したがって $V((TA)^*)=f$ である。■

＜完全性定理＞

(a)（弱完全性）式の有限集合 Σ について、もしも $\Sigma \models w\ A$ であるならば、 $\Sigma \vdash w\ A$.

(b)（強完全性）式の有限集合 Σ について、もしも $\Sigma \models s\ A$ であるならば、 $\Sigma \vdash s\ A$.

[証明]

対偶を証明する。

（弱完全性）

$\Sigma = \{P_1,P_2,-,Pn\}$ とする。いま、$\Sigma \nvdash w\ A$、すなわち、$\{ P_1,P_2,-,Pn, \neg A\}$ から作られたタブローが開いていると仮定しよう。そしてそのタブローから、ある開いた枝を選ぶ。完全性補助定理により、その枝によって導かれる付値 V は、Σ^* のすべての要素を t とし、A^*を f とする。この場合の Σ^*の要素はすべて元式なので $V(\Sigma)=t$ であり、また、$V(\neg A)=t$ なので $V(A)=f$ である。したがって、$\Sigma \not\models w\ A$ である。■

（強完全性）

$\Sigma = \{P_1, P_2, \cdots, Pn\}$ とする。いま、$\Sigma \not\vdash s$ A、すなわち、{ $\underline{P_1}, \underline{P_2}, \cdots, \underline{Pn}, \underline{\neg A}$} から作られたタブローが開いていると仮定しよう。そしてそのタブローから、ある開いた枝を選ぶ。完全性補助定理により、その枝によって導かれる付値 V は、Σ^* のすべての要素を t とし、A*を f とする。この場合の Σ^*の要素はすべて線式なので $V(\underline{\Sigma})$=t であり、また、$V(\underline{\neg A})$ =t なので V(A)=f または-である。したがって、$\Sigma \not\models s$ A である。■

＜決定可能性定理＞

各論証に対する SPL タブローの規則の適用が有限回の手続きの後に必ず終了することは明らかである。すなわち、PSL タブローは決定可能である。

2.2 ディオドロス時間様相論理 S4.3

2.2.1 導入

ディオドロス様相論理 (Diodorean modal logics) という名で呼ばれる様相論理の体系のひとつである S4.3 は、単線稠密時間 (linear dense time) 上の各時点における現在と未来の時点に基づいて様相を定義する時間様相論理として利用できることが知られている。このような時間様相は、過去も含めたすべての時点に基づいて様相を定義するアリストテレス的時間様相と対比されて、ディオドロス時間様相と呼ばれる。

いくつかの時間様相論理の体系のうち、第二部で述べる存在論的理由により、本研究における部分論理の時間化のための論理としては、この S4.3 を用いることとする。本章においては、通常の古典論理を基本論理とする S4.3 について、その構文論、意味論、タブローによる証明論、およびメタ論理的考察を行う。そのうえで、次節で、第一節で構成した単純部分論理に基づくその部分化を試みる。

2.2.2 構文論

S4.3 のシンタクスは次のとおりである：

(1) 原子文 $p, q, r, \cdots, p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ は論理式（以下、wff と略記）である。

(2) もしも A が wff ならば, ¬ A と □ A も wff である.

(3) もしも A と B が wff ならば, (A∧B) も wff である (最も外側の括弧は省略してよいものとする)。

(4) 以上のみが wff である。

'¬', '∧','□' を論理演算子と呼ぶ。これらに加えて、以下の論理演算子を定義によって導入する：

$A \vee B$ =df $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

$A \rightarrow B$ =df $\neg(A \wedge \neg B)$

$A \leftrightarrow B$ = df $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$\Diamond A$ =df $\neg \Box \neg A$

'¬', '∧', '∨', '→', '↔' を基本 (basic) 演算子、それ以外の論理演算子を様相 (modal) 演算子と呼ぶことにする。また、様相演算子を含んでいない式を基本式、含んでいる式を様相式と呼ぶことにする。

2.2.3 意味論

W を、時点 (moment) を要素とする空でない集合とし、また、R をその上での２項関係としたとき、F=＜ W, R ＞をクリプキ・フレームと呼ぶ。また、V を原子式から時点の集合へのマッピングとしたとき、M=＜ W, R, V ＞をクリプキ・モデルと呼ぶ。

・$M, m \models A$ =df モデル M における時点 m において $V(A)=t$。
・$M, m \models p$ iff $m \in V(p)$
・$M, m \models \neg A$ iff not $m \in V(A)$
・$M, m \models (A \wedge B)$ iff $m \models A$ and $m \models B$
・$M, m \models \Box A$ iff for all $m \in W$, mRn implies $n \models A$

・式 A は、モデル M において妥当である。
$M \models A$ =df モデル M におけるすべての時点において $V(A)=t$。
・式 A は、フレーム F において妥当である。
$< F > \models A$ =df フレーム F にもとづくすべてのモデルにおいて $V(A)=t$ である。

2.2.4 証明論——S4.3 タブロー

通常の古典論理のタブローに、次の規則を追加する：

(N)

$$\begin{array}{c} \Box A \\ | \\ A \end{array}$$

(S4.3)

$$\begin{array}{lcr} & \Box X & \\ \surd & \neg\Box \{A_1, —, A_k\} & \\ | & — & | \\ \neg\Box [Y_1]' & & \neg\Box [Y_k]' \\ \neg A_1 & & \neg A_k \end{array}$$

※ $\Box X = \{ \Box P \mid P \in X \}$
$Y = \{A_1, —, A_k\}$, $[Y_j]' = Y/A_j$

なお、(N)、(S4.3) のいずれの規則を適用しても、それぞれ$\Box$ A、$\Box$ X は消去されないことに注意されたい。

2.2.5 S4.3 タブローの健全性・完全性・決定可能性

＜クラスターの定義＞
まず、R が推移的であるクリプキ・フレーム＜ W, R ＞の W における同値関係「〜」を次のように定義する：

$m \sim n$ iff $m=n$ or (mRn and nRm)

それにもとづく同値クラス $Cm = \{ n : m \sim n \}$ を、m の R クラスターと呼ぶ。クラスターCとは結局のところ、Cの中のすべての異なる時点mと n について mRn と nRm が成立するような最大の W の部分集合である。
＜クラスターの順序関係＞
・$Cm \leqq Cn$ iff mRn （「≦」は、transitive, anti-symmetric）
・$Cm < Cn$ iff $Cm \leqq Cn$ and $Cm \neq Cn$ iff m Rn and not nRm （「＜」は、strict ordering。すなわち transitive, irrefrexive。したがって、asymmetric。）
＜クラスターの分類＞

・クラスターCは頽落的 (degenerate) である。　=df　クラスターCは一つの非反射的時点のみを要素とする。

・クラスターCは非頽落的である。　=df　クラスターCは頽落的でない。

・非頽落的クラスターCは固有的 (proper) である。　=df　非頽落的クラスターCは二つ以上の時点を要素とする。

・非頽落的クラスターCは単純 (simple) である。　=df　非頽落的クラスターCは、一つの反射的時点のみを要素とする。

※非頽落的クラスターにおいては、Rは反射的・推移的・対称的である。

・有限的非頽落的クラスターの、有限的・反射的・推移的な列をS4.3フレームと呼ぶことにする。S4.3フレームの集合をフレームクラスS4.3と呼ぶ。

※ S4.3フレームは、時点の反射的、推移的、反対称的 (antisymmetric)、弱連結的な列となる。

（フレームは弱連結的である。　=df　$\forall m\forall n\forall o((mRn\wedge mRo)\rightarrow(nRo\vee n=o\vee oRn))$

・モデル $< W, R, V >$ はS4.3モデルである。　=df　$< W, R >$ はS4.3フレームである。

・式AはS4.3-妥当である。=df　式AはすべてのS4.3モデルのすべての時点において真である。

・S4.3モデル $< W, R, V >$ は式の有限集合Xに対するS4.3モデルである。=df　$\forall A\in X$, $\omega_0 \models A$ であるような $\omega_0 \in W$ が存在する。

・式の集合XはS4.3-充足可能である。　=df　Xに対するS4.3モデルが存在する。

・フレームクラスS4.3に関してS4.3タブローは健全である。　=df　すべてのS4.3フレームFとすべての式Aについて、$\vdash_{S4.3}$ A ならば、$< F > \models_{S4.3}$ A

・フレームクラスS4.3に関してS4.3タブローは完全である。　=df　すべてのS4.3フレームFとすべての式Aについて、　$< F > \models_{S4.3}$ A ならば、$\vdash_{S4.3}$ A

・S4.3タブローはフレームクラスS4.3によって特徴づけられている　=df　S4.3タブローはフレームクラスS4.3に関して健全かつ完全である。

S4.3タブローについては、上のような意味での健全性・完全性、および決定可能性が成立することが [Gore, 1994] において証明されている。なお、S4.3公理系が有限フレームクラスによって特徴づけられることの証明は、[Bull, 1966][Fine, 1971] において成された。また、クラスターを用いたフレームの定義は、[Goldblatt,1992] において示された。

・Qを有理数の集合、Rを実数の集合、≦を通常の順序関係だとすると、次が成立する：

$< Q, \leqq > \models A$ iff $\vdash_{S4.3} A$　　　　$< R, \leqq > \models A$ iff $\vdash_{S4.3} A$

したがって、S4.3モデルは、任意の二つの時点間に第三の時点が存在する、単線稠密時間をフレームとするモデルとして解釈できる。

2.3 部分ディオドロス時間様相論理PS4.3

2.3.1 導入

この節において、第一節で構成した単純部分論理SPLと第二節で構成したディオドロス時間様相論理S4.3とを融合することにより、部分ディオドロス時間様相論理PS4.3を構成する。

2.3.2 構文論

PS4.3のシンタクスは次のとおりである：

(1) 原子文 $p, q, r, \cdots, p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ は論理式（以下、wffと略記）である。

(2) もしも A が wff ならば, $\neg$ A 、TA、$\Box$ A も wff である.
(3) もしも A と B が wff ならば, (A$\wedge$B) も wff である (最も外側の括弧は省略してよいものとする)。
(4) 以上のみが wff である。

'$\neg$', '$\wedge$', 'T', '$\Box$' を論理演算子と呼ぶ。これらに加えて、以下の論理演算子を定義によって導入する：

$A \vee B$ =df $\neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A \rightarrow B$ =df $\neg(A \wedge \neg B)$
$A \leftrightarrow B$ = df $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
FA =df $T \neg A$
LA =df $TA \vee FA$
MA =df $\neg LA$
$\Diamond A$ =df $\neg \Box \neg A$

'$\neg$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$' を基本 (basic) 演算子、'T', 'F', 'L', 'M', を確定 (determinate) 演算子、'$\Box$', '$\Diamond$' を様相 (modal) 演算子と呼ぶことにする。また、確定演算子や様相演算子を含んでいない式を基本式、確定演算子を含んでいる式を確定式、様相演算子を含んでいる式を様相式、各々の否定によって定義される式を非基本式、非確定式、非様相式と呼ぶことにする。

2.3.3 意味論

部分付値にもとづく原子式から時点の集合へのマッピングを部分マッピングと呼ぶ。時点mにおいて V(p)=t であることを、m$\in$Vt(p)、V(p)=f であることを m$\in$Vf(p) と表す。

W を、時点 (moment) を要素とする空でない集合とし、また、R をその上での２項関係としたとき、F=< W, R >をクリプキ・フレームと呼ぶ。また、V を原子式から時点の集合への部分マッピングとしたとき、M=< W, R, V >を部分クリプキ・モデルと呼ぶ。

・A は時点mにおいて潜在的に真である。(弱い真理)
M, m $\models$w A =df モデル M において、時点 m において V(A)=t または - 。
・A は時点mにおいて潜在的に偽である。(弱い虚偽)
M,m w=| A =df モデル M において、時点 m において V(A)=f または - 。
・A は時点 m において真である。(強い真理)
M, m $\models$s A =df モデル M において、時点 m において V(A)=t。
・A は時点 m において偽である。(強い虚偽)
M, m s=| A =df モデル M において、時点 m において V(A)=f。

なお、以後、強弱の真理・虚偽いずれにもあてはまる場合には、「m =$\models$ A」、強弱の真理いずれにもあてはまる場合には、「m $\models$ A」、強弱の虚偽いずれにもあてはまる場合には、「m =| A」と記すことにする。

・m $\models$w p iff not m $\in$ Vf(p)
・m w=| p iff not m $\in$ Vt(p)
・m $\models$s p iff m $\in$ Vt(p)
・m s=| p iff m $\in$ Vf(p)
・m $\models$w $\neg$ A iff not m $\models$s A
・m w=| $\neg$ A iff not m $\models$s A
・m $\models$s $\neg$ A iff m s=| A
・m s=| $\neg$ A iff m $\models$s A
・m =$\models$ (A$\wedge$B) iff m =$\models$ A and m =$\models$ B

・$m \models TA$ iff $m \models_s A$
・$m =\!| \ TA$ iff not $m \ s{=}|A$
・$m =\!\models \Box A$ iff for all $n \in W$, mRn implies $n =\!\models A$

・式 A は、モデル M において強-妥当である。
$M \models_s A$ =df A の値はすべての時点において t である。
・式 A は、モデル M において弱-妥当である。
$M \models_w A$ =df A の値はすべての時点において t または - である。
・式 A は、フレーム F において強-妥当である。
$< F > \models_s A$ =df A の値は、フレーム F にもとづくすべてのモデルにおいて t である。
・式 A は、フレーム F において弱-妥当である。
$< F > \models_w A$ =df A の値は、フレーム F にもとづくすべてのモデルにおいて t または-である。

2.3.4 証明論——PS4.3 タブロー

SPL タブローの規則と S4.3 タブローの規則を合わせたタブローに次の規則を追加してできるタブローを、PS4.3 タブローとする。

(Ns)

$$\begin{array}{c} \underline{\Box A} \\ | \\ \underline{A} \end{array}$$

(S4.3s)

$$\begin{array}{lccc} & & \Box X^* & \\ \surd & & \underline{\neg\Box \{A_1, \text{—}, A_k\}} & \\ & | & \text{—} & | \\ & \underline{\neg\Box [Y_1]'} & & \underline{\neg\Box [Y_k]'} \\ & \underline{\neg A_1} & & \underline{\neg A_k} \end{array}$$

※ $\Box X^* = \{ \Box P^* \mid P^* \in X \}$
$Y = \{A_1, \text{—}, A_k\}$, $[Y_j]' = Y/A_j$

なお、(Ns)、(S4.3s) のいずれの規則を適用しても、それぞれ $\underline{\Box A}$、$\Box X^*$は消去されないことに注意されたい。また、S4.3 における (N),(S4.3) をそれぞれ PS4.3 においては (Nw),(S4.3w) と呼ぶことにし、(S4.3w) における X を X*へと変更する。

ex.1w $\mathrm{T}\Box\mathrm{A} \models_{\mathrm{w}} \Box\mathrm{TA}$ *ex.1s* $\mathrm{T}\Box\mathrm{A} \models_{\mathrm{s}} \Box\mathrm{TA}$

$$\begin{array}{lc}
\surd & \mathrm{T}\Box\mathrm{A} \\
\surd & \neg\Box\mathrm{TA} \\
 & | \\
 & \Box A \\
 & | \\
\surd & \neg\mathrm{TA} \\
 & | \\
 & A \\
 & | \\
 & \underline{\neg A} \\
 & | \\
 & \times
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lc}
\surd & \underline{\mathrm{T}\Box\mathrm{A}} \\
\surd & \underline{\neg\Box\mathrm{TA}} \\
 & | \\
 & \Box A \\
 & | \\
\surd & \underline{\neg\mathrm{TA}} \\
 & | \\
 & A \\
 & | \\
 & \underline{\neg A} \\
 & | \\
 & \times
\end{array}$$

ex.2w $\Box\mathrm{TA} \models_{\mathrm{w}} \mathrm{T}\Box\mathrm{A}$ *ex.2s* $\Box\mathrm{TA} \models_{\mathrm{s}} \mathrm{T}\Box\mathrm{A}$

$$\begin{array}{lc}
 & \Box TA \\
\surd & \neg\mathrm{T}\Box\mathrm{A} \\
 & | \\
\surd & \underline{\neg\Box\mathrm{A}} \\
 & | \\
 & \underline{\neg A} \\
 & | \\
 & TA \\
 & | \\
 & A \\
 & | \\
 & \times
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lc}
 & \underline{\Box TA} \\
\surd & \underline{\neg\mathrm{T}\Box\mathrm{A}} \\
 & | \\
\surd & \underline{\neg\Box\mathrm{A}} \\
 & | \\
 & \underline{\neg A} \\
 & | \\
 & \underline{TA} \\
 & | \\
 & A \\
 & | \\
 & \times
\end{array}$$

2.3.5 PS4.3タブローの健全性・完全性・決定可能性

PS4.3タブローにおいては、S4.3タブローにおける追加規則が＜弱い規則＞、PS4.3における追加規則が＜強い規則＞と考えられるが、S4.3タブローの健全性・完全性・決定可能性の証明における真理概念をそれぞれ弱い真理、強い真理として解釈すれば、PS4.3タブローにおける強弱いずれの規則に関しても健全性・完全性・決定可能性が証明されたことになる（規則(S4.3)における変更は、規則の適用による変形を被らない部分に関する変更であり、必然性演算子は変更後も保持されているので、これらの証明に影響を与えることはない)。

【参考文献】

[Blamey, S. 1986] Partial Logic, in [Gabbay, D. and Guenthner, F. (Eds.)]pp.1-70.

[Bull, R. A. 1966]That All Normal Extensions of S4.3 Have the Finite Model Property, *Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 12*, pp.341-344.

[Doherty, P. (Ed.) 1996] *Partiality, Modality, and Nonmonotonicty*, CSLI.

[Fine, K. 1971]The Logics Containing S4.3, *Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 17*, pp.371-376.

[Gabbay, D. and Guenthner, F. (Eds.) 1986] *Handbook of Philosophical Logic* III, D.Reidel.

[Goldblatt, R.]*Logics of Time and Computation 2nd ed.*, CSLI.

[Gore, R. 1994]Cut-free Sequent and Tableau System for Propositional Diodorean Modal Logics, *Studia Logica 53*, pp.433-457.

[Kleene, S. C. 1952] *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand.

[Langhholm,T. 1988] *Partiality, Truth and Persistence*, CSLI.

[Langhholm,T. 1996] How Different is Partial Logic?, in [Doherty, P. (Ed.) 1996]pp.3-43.

[Lambert, K.(Ed) 1970] *Philosophical Problems in Logic*, D.Reidel.

[Priest, G. 2001] *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press.

[van Benthem, J. and ter Mulen, A. (Eds.) 1997] *Handbook of Logic and Language*, Elsevier Science B. V..

[Woodruff, P. 1970] Logic and Truth-Value Gaps, in [Lambert,K.(Ed) 1970]pp.121-142.

第II部

存在論的考察

第3章 Tensed Ontology based on Simple Partial Logic*

abstract

Simple partial logic (SPL) is, broadly speaking, an extensional logic which allows for the truth-value gap. First I give a system of propositional SPL by partializing classical logic, as well as extending it with several non-classical truth-functional operators. Second I show a way based on SPL to construct a system of tensed ontology, by representing tensed statements as two kinds of necessary statements in a linear model that consists of the present and future worlds. Finally I compare that way with other two ways based on Łukasiewicz's three-valued logic and branching temporal logic.

3.1 Simple Partial Logic

SPL is a system of truth-functional logic that generalizes (propositional) classical logic (CL) by allowing for the truth-value gap. At the same time the SPL given in this paper is an extension of CL by adding several non-classical truth-functional operators which are reducible to one. Here I restrict my arguments to its syntax and semantics, omitting its proof theory.

There are two kinds of logical operators in SPL: the basic operators, which are also included in the syntax of CL, and the modal operators, which are not included. I show the operators and their semantics in the following tables:

表 3.1: **Basic operators**

A	∼A
t	f
-	-
f	t

A&B	t	-	f
t	t	-	f
-	-	-	f
f	f	f	f

A∨B	t	-	f
t	t	t	t
-	t	-	-
f	t	-	f

A→B	t	-	f
t	t	-	f
-	t	-	-
f	t	t	t

A↔B	t	-	f
t	t	-	f
-	-	-	-
f	f	-	t

表 3.2: **Modal operators**

A	TA	FA	LA	MA
t	t	f	t	f
-	f	f	f	t
f	f	t	t	f

A↦B	t	-	f
t	t	f	f
-	t	t	t
f	t	f	f

They are reducible, for example, to '&', '∼', 'T' in the following way:

$A \lor B =_{df} \sim(\sim A \& \sim B)$

* Reprinted from *Proceedings of Ninth International Symposium on Temporal Representation and Reasoning: TIME-02*, pp.141-145, IEEE Computer Society, 2002.

$A \rightarrow B =_{df} \sim(A \& \sim B)$
$A \leftrightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$
$FA =_{df} T{\sim}A$
$LA =_{df} TA \vee FA$ ('A' has a truth-value.)
$MA =_{df} \sim LA$
$A \mapsto B =_{df} LA \rightarrow TB$ ('A' presupposes 'B'.)

I call the intermediate value 'gap-value', distinguishing it from 'truth-values', which refer only to truth and falsity. The formula that does not include modal operators are called 'basic formula'.

The definitions of the basic operators coincide with those of Kleene's strong three-valued logic and have the following semantic properties:[1]

(1)Reliable Determinability (Reliability)

The truth-tables that define the meaning of the base-operators in SPL coincide with those of CL under total valuation.[2] In other words, a basic formula has the same truth-value with that of CL, if all the atomic formulae included have *truth*-values.

(2)Monotonicity

If the basic formula that includes gap-valued (gapped) atomic formulae has a truth-value, it does not make its truth-value change by altering the gap-value to a truth-value.

[Definition]

One operator is stronger than another under partial valuation. $=_{df}$ The former gives a truth-value to the formula which it bounds, whenever the latter gives one to the same formula.

(3)Strength

The above basic operators are the strongest ones that are reliable and monotonic among those based on CL.

Modal operators have the following properties:[3]

(1) Strong Determinability

Modal operators always bring about a truth-value under partial valuation.

(2)Weak Monotonicty

If a basic formula has a truth-value, it does not make its truth-value *lost* (namely, be changed to the gap-value) by altering the gap-value to a truth-value (this is a corollary of strong determinability).

We can understand the strong determinability as resulting from a kind of self-referring function of the modal operators, which describe the partiality of truth-valuation itself. Accordingly it destroys the monotonicty of SPL but it keeps the weakened monotonicity given above.

Now I define two conceptions of validity in SPL:[4]

(1)Weak Validity (being w-valid)

$\Sigma \models_w C$ iff there are no partial valuations which make all the formulae in the set $\Sigma \cup \{\sim C\}$ true.

(2) Strong Validity (being s-valid)

[1] In this paper I adopted most of Langholm's terminology for partial logic, except for 'monotonicity', which he calls 'persistence'. [Langhholm,T. 1988][Langhholm, T. 1996]

[2] I call the truth-valuation where every atomic formula is assigned a truth-value 'total valuation'. The valuation which is not total is 'partial valuation'.

[3] Most of the modal operators coincide with the operators which Woodruff adopted for his three-valued logic 'System Q'. [Woodruff, P. 1970]

[4] I have given the justification of these definitions and the proofs of the following semantic theorems in my paper: [Kachi, D. 2002]

$\Sigma \models_s C$ iff there are no partial valuations which make all the formulae in the set $\Sigma \cup \{\sim C\}$ non-false (true or gapped).

Adopting these definitions of validity, the following semantic theorems hold:

[Th1]
$\Sigma \models_w C$ if $\Sigma \models_s C$
[Th2w] Weak Deduction Theorem (WDT)
$P_1, P_2, —, P_n \models_w C$ iff $\models_w (P_1 \& P_2 \& — \& P_n) \rightarrow C$
[Th2s] Strong Deduction Theorem (SDT)
$P_1, P_2, —, P_n \models_s C$ iff $\models_s (P_1 \& P_2 \& — \& P_n) \rightarrow C$
[Th3w] Weak Contraposition Theorem (WCT)
$P_1, P_2, —, P_n \models_w C$ iff $\models_w \sim C \rightarrow \sim (P_1 \& P_2 \& — \& P_n)$
[Th3s] Strong Contraposition Theorem (SCT)
$P_1, P_2, —, P_n \models_s C$ iff $\models_s \sim C \rightarrow \sim (P_1 \& P_2 \& — \& P_n)$
[Definition]
$\Sigma \models_c C =_{df}$ The argument which derives C from Σ is valid in CL.
(This implies that the argument includes only the basic formulae.)
[Th4]
$\Sigma \models_w C$ iff $\Sigma \models_c C$
[Th5]
There are no s-valid arguments that include only the basic formulae.

The holding of both the deduction theorem and the contraposition theorem is one of the reasons why I adopt these definitions of validity. Other possible definitions lack this property.[5] [Th4] establishes that SPL is an alternative way to the supervaluational logic to keep classical validity allowing for the truth-value gap. It is preferable at least in keeping truth-functionality. In contrast [Th5] shows that strong validity is proper to SPL. The following are among the s-valid arguments:

$TA \models_s A$ (cf. $A \not\models_s A$, $A \not\models_s TA$)
$LA \models_s A \vee \sim A$ (cf. $\not\models_s A \vee \sim A$)
$\models_s TA \vee \sim TA$ (cf. $\not\models_s TA \vee T \sim A$)
$(A \mapsto B)$ & $LA \models_s TB$

3.2 Application of SPL to the Ontology of Time

One of the fields of the application of SPL is the theory of presupposition (indeed one of the meta-operators '$A \mapsto B$' is to be read as 'A presupposes B'). We can interpret 'TA' as a statement with the presupposition of having a truth-value; it insists that (it is presupposed that) 'A' has a truth-value and it is the case that A. In fact the following theorem holds:

$\models_s TA \leftrightarrow (LA \& A)$

In contrast, we should take 'A' as a statement which lacks such a presupposition, and so it is valued as 'truth-valueless' or 'gapped' when the presupposition fails. Or we can also understand 'A' as a conditional statement, 'If 'A' has a truth-value it is the case that A.' However, it should be noted here

[5] As for the examples of other definitions, see the following: [Blamey, S. 1986] [Busch, D. 1996] [Fenstad, J. E. 1997]

that we must not take this conditional as a two-valued material conditional. If we did, 'A' would become true whenever it lacks a truth-value, which appears contradictory. Rather it means that the statement 'A' has effects only if it has a truth-value and that it will be cancelled when it does not.

Let's call 'TA' and 'A' respectively 'a strong statement' and 'a weak statement'. For example, we can interpret a historical statement 'Caesar crossed the Rubicon' as a strong statement, while a fictional statement 'Alice went into Wonderland' as a weak statement. Usually we use the former statement presupposing that it actually has a truth-value, while it depends upon the context or the convention whether the latter has a truth-value and so we take it to be sometimes truth-valueless.

Moreover we can use the above two kinds of statements to distinguish strong necessity and weak necessity in the theory of modality. A strong necessary statement '$\Box$TA' insists on the holding of a fact in every possible world unrestrictedly. On the other hand a weak necessarily statement '$\Box$A' does it restrictedly to the possible worlds where the statement has a truth-value. Usually the distinction depends on whether the referents in the statement exist in every possible world. For example, 'It is necessary that 2+2=4' and 'It is necessary that God is almighty' usually insist on strong necessity, while 'It is necessary that water is H_2O' and 'It is necessary that Socrates is mortal' assert weak necessity.

Finally there is a way to apply SPL to the ontology of time, which we can take as a special case of the above modal application. Firstly let's assume that the possible worlds concerned here are the present and future worlds. However, the worlds considered here are not the presentistic ones as in the semantics of tense logic, but rather four-dimensionalistic ones. Put concretely, this means that the atomic formulae supposed here are not the present-tensed ones such as 'It is cloudy in Saitama now', but tenseless ones with dates, such as 'It [is] cloudy in Saitama at noon on the 14th February 2002('[is]' signifies that it is tenseless).' At the same time tenseless statements with earlier or later dates are also included among the atomic formulae which describe the same world.

Next let's adopt the model $\langle W, R, V \rangle$ which I call 'the future model', where W is a set whose elements are the present and future worlds, and R is a binary relation between the worlds, and V is a partial valuation in the worlds. The future model is prescribed according to the following rules:

(1)All the worlds are lineally ordered according to their dates that are uniquely indexed to each world.

(2)There is a world that has the earliest date among the worlds, namely the present world.

(3)If an atomic formula has a truth-value in a world , it has the same truth-value in all the worlds that are later than the world.

(4)Every atomic formula has a truth-value at least in one world.

Assuming this model, let's introduce the distinction between strong necessity and weak necessity. If we adopt the operator 'G' as meaning 'in every present and future world', we can define the truth-condition of 'GTA' and 'GA' in the following way:

[Definition]

'GA' is true in the future model. $=_{df}$ 'A' is true in every world where 'A' has a truth-value in the future model.

Then we can say that 'GTA' is true in the future model iff 'A' is true in every world in the future model, since TA always has a truth-value.

The monotonicity of the atomic formulae given by (3) and the monotonicity of the basic operators, together with (4), make the following theorems hold for the future model:

[M1]

If 'A' is a basic formula, a strong necessary statement 'GTA' is true in the future model iff 'A' is true in the present world.

[M2]

If 'A' is a basic formula, a weak necessary statement 'GA' is true in the future model iff there is a world that satisfies two conditions:

(a) 'A' is true in that world.

(b) 'A' is gapped in all the worlds (if there are) that are earlier than that world.

By [M2], if 'A' is a basic formula, we can take a weak necessary statement 'GA' in this model as a future-tensed statement within the framework of dynamic ontology according to which it lacks a truth-value until the moment when the stated event is determined to occur or not. In contrast, a strong necessary statement 'GTA' whose 'A' is a basic formula corresponds to a past- or present-tensed statement. If we can characterize our ordinary tensed statements in such a way, it turns out that all of our ordinary tensed statements are (weak or strong) necessary statements in the sense defined for the future model.

So if we confine ourselves within our ordinary tensed statements, namely 'GTA' and 'GA' whose 'A's are only basic formulae, we can dispense with the intensional operator 'G', since we can take it as always accompanying the tensed statements implicitly. Moreover, by the combination of [M1] and [M2], we can reduce the difference between the statements 'GTA' and 'GA' to the difference as to whether they insist that the present world is the earliest world in which 'A' is true or it is not necessarily so, although both insist that 'A' is eternally true from some world on. That is to say, we can reduce the difference between the statements about many worlds into the difference between their description about one world, namely the present world.

3.3 Comparison with Łukasiewicz's Three-valued Logic and Branching Temporal Logic

As is well known, Łukasiewicz's three-valued logic, which I call the system $Ł_3$, was intended to deal with the future contingency. He tried to construct a truth-functional modal logic which does not result in determinism when its necessity is construed as the determination of events. However, he abandoned it in his later years for the reason that it does not make contradiction ('A&∼A') necessarily false, while it makes identity ('A→A') necessarily true, though he positively accepted the failure of excluded middle ('A∨∼A') as the denial of determinism.

The truth-table for the operator 'T' in SPL is the same as that for the necessity operator 'L' in the system $Ł_3$. In fact under the interpretation given above, they play the same role, though I would rather interpret the lack of truth-value of a statement not as the result of causal indetermination of the stated events, but as the result of the lack of its truth-maker.

The truth-tables of the basic operators of SPL only differ from those of the system $Ł_3$ in terms of the value of the conditional (and biconditional) when both of its subformulae are gapped. The former makes it gapped, while the latter makes it true. Accordingly SPL does not make identity necessarily true either. In fact it is the corollary of [Th5] in the first section that no classical tautology is a strong tautology, which means that it is always true under partial valuation. Łukasiewicz's conditional is non-monotonic and we can define it as '(MA&MB)∨(A→B)' using Kleene's monotonic conditional. And so we should rather understand it as a derivative operator.

On the other hand, the laws of excluded middle, identity and contradiction are all preserved in SPL as weak tautologies, which is the corollary of [Th4]. We can understand a weak tautology as a formula which is always true whenever it has a truth-value (as I have stated above, we must not take this conditional as a two-valued material conditional). In other words, SPL takes the failure of the classical tautologies not as the destruction of the laws of CL but only as the result of the lack of a truth-maker, which is not a logical but an ontological matter. In that sense SPL is not an alternative of CL but just its generalization by allowing for the truth-value gap.

Another way of dealing with the future contingency is to adopt a branching model in which the future worlds are partially ordered by dates. There are two views on the way to represent a future-tensed statement in the branching model. One is 'Peirce's view', which takes a future statement as a kind of necessary statement which insists on the occurrence of a future event in every branch. The other is 'Ockham's view', which takes a future-tensed statement as a contingent statement which insists on the occurrence of a future event in one of the branches that is called a '*prima facie* future branch'.

However, both have defects. Firstly they do not reflect correctly our ordinary usage of the future-tensed statements. Peirce's future-tensed statement seems too strong, because usually we do not insist on the present determination of the occurrence of a future event, when we make a future-tensed statement. If we did, it would be nothing but a present-tensed statement. On the other hand, Ockham's future-tensed statement appears too weak, because there is no formal distinction between the *prima facie* branch and the other branches, and so the statement is not different from the statement which only insists on the possibility of the occurrence of the future event.

Secondly, I think that the branching model is ontologically improper as a model that represents the dynamic change of the world itself–the so called 'temporal flux'. In my view the future contingency should be interpreted not as the result of the present causal indeterminacy of future events but as the result of the present lack of its truth-maker. Therefore SPL, which deals with the truth-value gap, seems more relevant with the dynamic ontology which takes account of the passage of time.

And finally, from a formal point of view, a linear model of the future worlds is simpler than a branching model. So it is at least worth investigating how far we can represent the complexity of our tensed statements within the framework of a linear model. Indeed we saw at the end of the last section that we can dispense with intensional operators and can truth-functionally represent our ordinary tensed statements in a linear model of the future worlds. In that sense I believe that Łukasiewicz was right in his motive for constructing his system L_3 to deal with the problem of future contingency extensionally.

As for the first problem of the branching model, I believe that my interpretation of the future-tensed statements as a weak necessary statement is free from both the defects of Peirce's view and Ockham's view. My view goes midway between Peirce's and Ockham's. On the one hand it is closer to the former, because it takes a future-tensed statement as a kind of necessary statement. But it is different in that it takes a future-tensed statement not as the description of the determination in the present world but as the description of all the present and future worlds. On the other hand, my interpretation is similar to Ockham's view, in that my view also seems to imply that insisting on the occurrence of a future event is compatible with admitting its contingency. However, my view does not appear to threaten a future-tensed statement to degenerate into just a possibility statement.

REFERENCES

1. Blamey, S. (1986), Partial Logic, in [Gabbay, D. and Guenthner, F. (Eds.) 1986] pp.1-70.

2. Busch, D. (1996), Sequent Formalization of Three-Valued Logic, in [Doherty, P. (Ed.) 1996] pp.45-75.
3. P. Doherty. (Ed.) (1996), *Partiality, Modality, and Nonmonotonicity.*, CSLI.
4. Fenstad, J. E. (1997), Partiality, in [Van Benthem, J. and Ter Mulen, A. (Ed.) 1997] pp.649-682.
5. Gabbay, D. and Guenthner, F. (Eds.) (1986), *Handbook of Philosophical Logic 3*, D.Reidel.
6. Kachi, D. (2002), Validity in Simple Partial Logic, to appear in *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science 10-5.*
7. Langhholm, T. (1988), *Partiality, Truth and Persistence*, CSLI.
8. Langhholm, T. (1996), How Different is Partial Logic?, in [Doherty, P. (Ed.) 1996] pp.3-43.
9. Lambert, K. (Ed.) (1970), *Philosophical Problems in Logic*, D.Reidel.
10. Van Benthem, J. and Ter Mulen, A. (Eds.) (1997), *Handbook of Logic and Language*, Elsevier Science B. V.
11. Woodruff, P. (1970), Logic and Truth-Value Gaps, in [Lambert, K. (Ed.) 1970] pp.121-142.

第4章　時間的実体様相の形式存在論

4.1　部分性と様相

部分論理は二重の意味で様相に関与している。ひとつは、確定演算子自身がもつ様相的性格であり、もうひとつは、部分性の許容という意味論の全体的性格によってもたらされる様相への関与である。

まず第一に、SPL における確定演算子「T」は、真理値そのものの意味の解釈においてこそ違いがあれ、ウカシェーヴィチの三値論理における必然性演算子「L」と同じ真理表によって定義されるものである。また、彼が三値論理の適用領域として想定していた様相的文脈も、本研究と同じ、未来の偶然性という時間的な様相が関わる文脈であった。さらに、三値論理や部分論理を様相論理に翻訳する論文が何人かの研究者によって提示されている[1] 。

このように、歴史的に見ても確定演算子の様相的性格は明らかであるが、よりその意味論的性質に即して考えてみれば、確定演算子とは、それが適用されることによって命題が「必ず真理値を持つ」ことを保証する演算子だと考えられる。つまり、部分論理においては、「必ず真である」「必ず偽である」という形での真偽の必然性以外に、「必ず真理値をもつ」という形での必然性への関与が生ずるのである。

さらに言えば、特に弱い真理概念のもとでは、確定演算子を伴わない基本式は、「真」「偽」という評価がなされる以外に、そのいずれにも評価されない場合があるような式であるので、それを主張することは、「真理値を持つとすれば...である」という一種の条件的な主張となるとも考えられる。だとすれば、それ自体が一種の可能的主張だといえるだろう。すなわち、部分論理の枠組みのもとでは、基本式であれ、確定式であれ、すべての命題が様相的規定を内在させている命題だと考えられるのである。

なお、ひとつ注目すべきは、このような様相概念は真理関数によって外延的に規定されるということである。振り返れば、本来ウカシェーヴィチが彼の三値論理によって行おうとしたことは、外延的様相論理を構築することであった。その点においても、単純部分論理は、ウカシェーヴィチによる三値論理の精神を継承していると考えられる。

第二のタイプの様相への関与について言えば、真理付値の部分性を許容するということは、真でも偽でもない命題つまり真理値を持たない命題を許容するということである。しかしそうだとすると、命題でないがゆえに真理値を持たない場合と命題であるのに真理値を持たない場合とを区別するための基準を求められることになる。つまり、そもそも命題であるということはどういうことであるのかを顕在化する必要が生ずるのである。これに対し、真理付値の全体性が成立している場合は、真理値を持つことと命題であることとが同値であるので、真理値を持つことをもって命題であることの基準とできるため、このような区別の必要性は生じない。

私は、命題であるための基準を暫定的に次のように規定したい:「命題であるとは、少なくとも一つの可能世界（あるいは可能的状況）において真理値を持つことである。」[2] すると、部分性の許容は、同時に可能世界への関与、言い換えれば、（可能世界への）真理概念の相対化を含むことになる。だとすれば、その場合の「可能世界」とはどのような意味での可能世界なのかを明示する必要が生ずることになるだろう。

その意味では、単純部分論理の時間化・様相化は、部分論理に不可欠な作業だったともいえる。本研究は、部分性を許容する様々な文脈のうち、ディオドロス時間様相論理 S4.3 によって性格づけられるような

[1] [Lukasiewicz, J. 1930][Woodruff, P. W. 1974][Van Benthem, J. 1986][Barba, J. 1993]

[2] ただし、特にいわゆる「嘘つき文」などにこの基準を適用できるかどうかははなはだ疑わしい。この基準は、あくまでも本研究に直接的に関係する範囲内での暫定的なものでしかない。

可能世界に真理概念が相対化された場合を剔出し、そこで働く部分性の論理を示したと考えられるだろう。

4.2 実体の歴史と部分論理

通常はある時点で発生し、いくつかの変化を経た後にある時点で消滅する、「もの（物・者）」と呼ばれる持続的個体を、哲学の慣例に従って「実体 (substance)」と呼ぶことにしよう。[3] 当の実体に生起する変化としての現実的・現在的なできごとを伴いつつ存在している（以後、「現実的である (actual)」と呼ぶことにする）期間中の各時点におけるその実体の存在形式というものを考えたとき、発生時と消滅時という境界点を除けば、それは常に、発生時からその時点までの間にその実体にすでに起きてしまいもはや如何ともし難い、確定的・必然的・実在的なできごとの系列と、その時点からその消滅時までに起きることになるがまだ起きていないため、未確定的・可能的・非実在的なできごとの系列との二つの部分を伴いつつ存在していると考えられる。この非対称性を、各実体の歴史においては、当の実体が現実的である間は、それについて語る命題が必ず真理値を持つ実在的部分とそうでない非実在的部分から成っているという、部分性によって表現することができる。したがって、実体の時間的な存在様式というものに着目しながらそこに働く動的論理を捉えようとしたとき、部分論理の枠組みは非常に自然なものと考えられるであろう。

さらに、時間的要因を度外視したとしても、もともと実体主義的な存在論と部分論理とは親和性が高い。なぜなら、実体主義のもとでは、命題は、それに含まれる語が指示する実体の存在を前提したうえで、その実体がある属性または関係を有しているか欠いているかによって、真偽の値をそれぞれ持つと考えることが自然だからである。そして、それが指示する実体が存在しない場合は、その命題は真でも偽でもないことになる（cf. フレーゲ、ストローソン）。未来命題は真理値を持たないことがあるというのも、その命題に含まれる実体の未来における存在が必ずしも保証されていないことの帰結だと考えられるだろう。簡単に言えば、たとえば自分が３０歳になるためには２０歳になることを必要条件とするが４０歳になることは必ずしも必要でないという、当たり前の相違が、実体における過去と未来の様相的非対称性の源泉となっているのである。

4.3 実体の変化とディオドロス時間様相論理

ディオドロス時間様相論理 S4.3 の特徴は、直線的な時系列のもとで、現在と未来の時点のみにもとづいて様相概念を規定するところにある。

実体の存在様式における一つの特徴は、一方向的な非分岐性・直線性にある。すなわち、ある実体が発生した後にその実体と通時的同一性を保ちつつ同時的に存在している実体は、常に一つしかない。[4] また、それが現実的である間は、常に新たな時点を経過している、言い換えれば、常に年齢を加えている（無生物にも適用できるような拡張された意味で）という、「純粋生成 (pure becoming)」と呼ばれる変化を被っている。ディオドロス時間様相論理 S4.3 によって示される可能性の論理は、まさしくこのような未来志向的直線性に即したものだと考えられる。

さらに、実体は、諸属性の基体であると同時に、諸変化の基体であるところにその特性を持っている（ただし、この場合の「基体」は必ずしもいわゆる「裸の特殊者 (bare particular)」を意味しない）。前者に関わる様相がその本質と偶有性などに関連する種的様相であり、後者に関連するのが時間様相である。種的様相に即して各実体の形而上学的可能性が規定されるのと同様に、時間様相に即して各実体の変化の可能性が規定される。そして実体にとって可能な変化とは、それが現在する時点よりも後の時点におけるできごとのみに関わるものである。その点で、S4.3 におけるように、未来の時点のみに基づいて可能性を定義

[3] この場合の持続性 (endurance) は、できごとの時間的延長性 (perdurance) とは別の概念である
[4] いわゆる「テセウスの船」などの問題は、ここでは無視する。

することは、実体主義的な文脈のもとでの時間様相を捉えるうえで理に適っている。

4.4 時制と確定演算子

いま、原子式を p:「実体 a が消滅する」、q:「実体 b が時点 t3 において実体 c を持ち上げる」などの、特定の実体における特定のできごとについて語る命題を表す式だとしよう。そのうえで、A が基本式である場合、A は日常語の未来時制文に対応し、TA は過去時制文に対応すると考えよう。すなわち、「実体 a が消滅した」、「実体 b が時点 t3 において実体 c を持ち上げた」がそれぞれ Tp, Tq として形式化されると考えるのである。このように考えると、未来時制文は、その文が真理値を持たない場合もあることになり、その意味で、一種の可能的主張を行う文であることになる。これに対し、過去時制文は、その文が真理値を持たないことはあり得ないという意味で一種の必然的主張を行う文であることになる。これらの様相は、真理関数的であるという外延性と、真理値の有無にのみ関わるので真・偽のいずれであるかという点は問題にならないという両面性とに、その特徴をもっている。

なお、このように時制を規定すると、一見直観に反するように思われるいくつかの帰結が生ずる。たとえば、昨日のできごとについて「昨日雨が降る」と過去形を用いないで主張したり、逆に明日のできごとについて「明日雨が降った」と過去形を用いて主張したりすることも原理的には可能であることになる。つまり、時間的前後関係と時制とは原理的には連動しないということを認めなければならなくなる。これはいかにも異様に思えるが、たとえば 1 日前に旅行したタイムトラベラーであれば、出発前に「昨日雨が降る」と主張し、1 日前に到着したときに「明日雨が降った」と主張するということは考えられる。ただこの場合も、タイムトラベラーという実体の歴史に即して言えば、「昨日」が出発「後」であり、「明日」が到着「前」であることに変わりはない。したがって、時制表現によってもたらされる実体に即した前後関係と、それ以外の別の基準によって規定される前後関係との齟齬が生ずる場合があるのだ、と考えるべきであろう。

また、「$<$ PS4.3 $>\models TA \rightarrow$A」が成立するので「昨日雨が降った」が成立するならば「昨日雨が降る」も成立することになる。つまり、過去命題が成立するときは未来命題も同時に成立することになってしまう（その逆は言えない）。しかしこれは、もし「昨日雨が降る」が真という真理値を必ず持っている（つまり、「昨日雨が降った」が真である）ならば、「『昨日雨が降る』は、真理値を持つ場合は真である」ということも当然言える、ということを表しているにすぎない。したがって、「昨日雨が降る」というように、本来過去形で主張すべきことをあえて未来形で主張することは、少なくとも真理条件に即して考える限りでは、ある種の不適切さはそこに見出されるかもしれないが、必ずしもそれを間違いであるとは言えないだろう。

過去と未来の排他性も基本的には、直線的時間のもとでの前後関係に由来すると考えるべきであろう。実体の歴史に即して考えれば、真理値を持たない場合があるという不確定性は当該のできごとの生起が主張よりも後であって初めて生ずるものなので、「雨が降る」と主張することは、関連する実体の歴史に即してみたときのその主張より後の時点での降雨の主張となり、「雨が降った」と主張することはそれ以前の主張となる。この段階で過去と未来の排他性が発生するのであって、部分性そのものにはそれはないと考えるのが妥当であろう。実際、部分性は、時間的文脈のみならず、真理概念が関わる広い領域に適用可能な普遍性を持っていることを鑑みれば、それも尤もだといえよう。

4.5 時間的単調性・確定性と様相演算子

特定の実体に生起する特定のできごとに関していったん成立したことは、それ以降ずっと保持されると考えられる。すなわち、次が成立するということである（これを「時間的単調性公理」と呼ぶことにする）:

$< \mathrm{PS4.3} > \models (A \rightarrow \Box A) \wedge (TA \rightarrow \Box TA)$ （A は基本式） $\ldots$(tm)

このような時間的単調性を前提すると、A が基本式である場合は、A、TA という式はそれぞれ□ A、□ TA と論理的に同値となる。部分ディオドロス時間様相論理 PS4.3 においては様相演算子が現在と未来の時点に即してのみ定義されるので、このような単調性を必然性演算子によって表現することができるのである。そしてこれら二つの必然性は、無条件にすべての可能世界において A が真であることを主張する強い必然性と、A が真理値を持つ世界においてのみ真であることを主張する弱い必然性に対応する。さらに、単調性によって、弱い必然性言明は、（少なくとも一つの時点で真理値をもつとすれば）ある時点まではずっと真理値を持たないがその時点以降は常に真であるということを主張することになる。

この必然性を、先ほど示した、確定演算子による時制表現の解釈と合わせると、過去言明は、基本式によって表される命題が現在以後のすべての時点において真であることを主張する、強い必然性言明であるのに対し、未来言明は、それが真理値を持ち始める時点以降のすべての時点についてのみ真であることを主張する弱い必然性言明として解釈できることになる。つまり、ディオドロス的な時間様相概念のもとでは、実体についての言明は、過去言明も未来言明も一種の必然性言明となるのである。

なお、公理 (tm) を前提した場合、それによって帰結する次の規則をメタ規則として導入することにする：

(tm1)	(tm2)	
√ A*	√ TA*	（いずれにおいても、A は基本式）
|	|	
□A*	□TA*	

また、実体が消滅する時点においては、その実体が関与するできごとについて語るすべての文が真理値を持つことになると考えられる。これは、実体について語る任意の文 A について次が成立するということである：

$< \mathrm{PS4.3} > \models \Diamond LA$、すなわち、$< \mathrm{PS4.3} > \models \Diamond (TA \vee T \neg A)$ $\ldots$(mf)

S4.3 における可能性演算子は、日常語における「いずれは (eventually)」に対応するということを、このような形で利用できるわけである。なお、この公理 (mf) は、命題であるためには少なくとも一つの可能世界で真理値を持たなければならないという有意味性の基準を表す式でもある。S4.3 は、この場合の可能世界がどのような意味での可能世界であるかを示していると考えられる。そこで公理 (mf) を、「有意味性公理」と呼ぶことにする。時間的単調性公理とこの有意味性公理を合わせたとき、実体の歴史において、その部分性が常に減少していくという過程を経て最終的に全体性が成立するという意味での確定性が帰結することになる。このことを、実体における「時間的確定性」と呼ぶことにする。

さて、部分論理の枠組みのもとでは、基本式のみから成り立つ矛盾命題は必ずしも偽とならない。すなわち、次が成立する場合がある：

$M, m \models_{w} A \wedge \neg A$ （A は基本式） $\ldots$①

しかし、PS4.3 のもとでは、先ほどの時間的単調性公理と有意味性公理を付け加えることによって時間的確定性を前提すると、そのような場合はあり得ないことが証明できる。つまり、次が成立する：

$< \mathrm{PS4.3} >$ (tm) , (mf) $\models_{s} \neg (A \wedge \neg A)$ （A は基本式）

PS4.3 タブローによるその（構文論的）証明は次のとおりである：

$$
\begin{array}{c}
\surd\ \underline{A\wedge\neg A} \\
\surd\ \underline{\neg\Box\neg(TA\vee T\neg A)} \\
| \\
\underline{\Box(A\wedge\neg A)} \\
| \\
\surd\ \underline{\neg\neg(TA\vee T\neg A)} \\
| \\
\surd\ \underline{A\wedge\neg A} \\
| \\
\underline{A} \\
\underline{\neg A} \\
| \\
\surd\ \underline{TA\vee T\neg A}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
| & | \\
\surd\ \underline{TA} & \surd\ \underline{T\neg A} \\
| & | \\
A & \neg A \\
| & | \\
\times & \times
\end{array}
$$

すなわち、これによって、確定演算子を伴わない未来言明に関しても、真理値ギャップを許容しない二値性が結果的に確保されることになる。

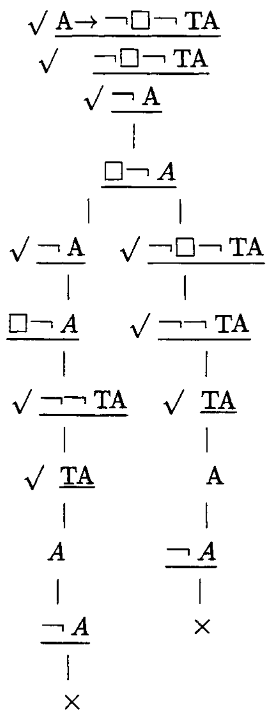
あるいは、次の公理を加えてみよう：

< PS4.3 > $\models$ A $\rightarrow \Diamond$ TA　　(A は基本式)　...(ac)

これは、強弱を問わず（したがって特に、弱い意味でも）特定のできごとについての言明が真であるためには、現在または未来のある時点でその言明が強い意味で真であることを必要条件とする、ということを表している。これを「主張条件公理」と名付けることにしよう。この公理を付け加えることによって次が成立する：

< PS4.3 > (tm), (ac), $\Diamond$ TA $\models$s A　　(A は基本式)

そのタブローによる証明は次のとおりである：



すなわち、これによって、確定演算子を伴う主張としての過去言明、それを伴わない主張としての未来言明、現在より後のある時点における確定性の主張としての可能的確定言明が、いずれも実質的に同等の主張を行うことになるのである。

以上のように、PS4.3 を基礎とすることによって、実体主義的枠組みのもとでどのような様相的条件を付加すれば、本来は真理値ギャップを伴う未来言明が結果として真理値ギャップを伴わない二値性を確保したり、様相的言明が非様相的言明に頽落したりすることになるのかを、示すことができる。

4.6 課題と展望

本研究においては、命題論理の範囲で部分化と時間化（様相化）を行った。これに量化表現を加えることによって述語論理へと拡張することが、次なる課題となる。これは、もうひとつの実体様相である種的様相の論理の探究となるであろう。また、本研究ではもっぱら時間論的文脈の中で部分論理および部分様相論理の研究を行ったが、この手法がそれ以外の文脈にも応用可能なのか、可能であるとすればどのような変更を必要とするのか、といったことを追究してみたい。応用領域の候補としては、真理論、曖昧性の理論、プログラミング基礎理論、情報オントロジー、指示論、前提理論などが考えられるであろう。

【参考文献】

[Borkowski, L.(ed.) 1970]*Jan Lukasiewicz Selected Works*, North-Holland.

[Lukasiewicz, J. 1930]Philosophical Remarks on Many-Valued Systems of Propositional Logic, in [Borkowski, L. (ed.) 1970], pp.153-178.

[Woodruff, P. W. 1974]A Modal Interpretaion of Three-Valued Logic, *Journal of Philosophical Logic 3*, pp.433-439.

[Van Benthem, J. 1986]Partiality and Nonmonotonicity in Classical Logic, *Logique et Analyse 114*, pp.225-247.

[Barba, J. 1993]A Modal Reduction for Partial Logic, *Journal of Philosophical Logic 22*, pp.429-435.

第5章　可能性から必然性への変化としての時間生成*

筆者が昨年末に上梓した『なぜ私たちは過去へ行けないのか――ほんとうの哲学入門』（哲学書房）の中で、「過去と未来の最も根本的な相違は何か？」という問いに対する次のような学生の回答を紹介した：

A君「まだ起きていないこととちう起こってしまったという違い。過去はもう起きたことなので存在するが、未来はまだ起きていないので現時点では存在しない。」

B君「すべてのものは常に現在に存在している。過去へ向かうことは現在に逆らうことであり、未来へ向かうことは現在に従うことである。」

この二人の回答は、時間に関する私たちの素朴な直観を、哲学的には必ずしも明瞭と言えない形で表現したものでしかない。だが私の考えるところでは、そこには時間の一方向性・不可逆性という問題についての本質的な洞察が含まれており、その洞察は、科学的探究の現場にも通底している実在の根源的性格を捉えている。この小論では、そのことをいくつかの角度から示したい。

5.1　「起きること」としての時間生成

私たちは、例えば「関ヶ原の合戦というできごとが起きる」というような表現をする。しかしこの表現を、例えば「徳川家康という人物が怒る」と同様の主張として捉えることは、いくつかの哲学的危険を伴う。というのも、後者の場合は、「徳川家康」という持続的な個体が存在し、その持続的個体において「怒る」という変化がある時点に起きるということを語っている。これと同様に考えてしまうと、前者は、「関ヶ原の合戦」という持続的な個体が存在し、その持続的個体に「起きる」という変化がある時点に起きるということを語っている、ということになる。つまり、「起きるということが起きる」という妙なことが成立していることになってしまう。しかし、だとすれば、今度はまた、「起きるということが起きるということが起きる」という変化を認めなければならなくなり、以下、無限に続いてしまう。

問題のひとつは、徳川家康という人物がまず存在し、ある時点においてその人物が怒るという変化がたまたま生ずるのとまったく同様に、「起きる」ということと独立に「関ヶ原の合戦というできごと」が先だって存在し、ある時点においてそのできごとが起きるという変化がたまたま生ずるかのように考えてしまったことにある。そうではなく、起きてこそ「できごと」といえるのであって、「出来する事」としての「出来事」とは、まさに「起きること」そのものである。そして通常、そのような「起きること」としての「できごと」は、ある種の存在論的依存性を伴う対象だと考えられている。そこには常に、そのできごとの支えともいうべき何らかの持続的個体が関与しており、その個体に何らかの変化が生ずることをもって私たちは、「できごとが起きる」と言うからである。できごととは、何かに対して起こる (happen to) ハプニングであり、たまたま起こるアクシデント (accident) なのである。関ヶ原の合戦というできごとにしても、先ほどの表現には明示的に現れていないにせよ、関ヶ原・美濃・本州などの場所、数多くの武士たち、彼らが身にまとっていた武具、彼らが呼吸していた空気、彼らが流した血、その血で汚れた草々など、無数

* サイエンス社発行『数理科学 No.493: 2004年7月号』（印刷中）より転載。

の持続的個体がそこには含まれている。(こうした持続的個体を哲学の世界では「実体 (substance)」と呼ぶことが多いので、以下ではそう表現することにする。) 繰り返すが、重要なのは、「起きる」という変化と「できごと」はいわば一体なのであって、決して「できごと」という何ものかにたまたま「起きる」という変化が生ずるのではないということである。

問題のふたつめは、「起きる」ということを「怒る」などの通常の動詞で語られる変化と同等視してしまったことである。「起きる」ということは、「怒る」などの実体に起きる変化を表す表現ではなく、むしろ、そのような変化の前提となるような別次元の変化を表している。それは哲学の世界では「生成 (becoming)」とか「時間生成 (temporal becoming)」と呼ばれてきた変化であり、まさに時間を時間たらしめる変化ともいうべきものである。それについて、前世紀初めのイギリスの哲学者 C.D. ブロードは、次のように見事に要約している (彼自身は、「絶対的生成 (absolute becoming)」という用語を用いている):

「質的変化と運動は、質的または実体的な持続を必要とし、またそれらはいずれも時間生成を前提とする。」

「現在になる (become present)」ということは、実は、絶対的意味において、単に「なる (become)」ということである。すなわち、聖書風の言葉遣いでいえば「来たる (come to pass)」ということであり、もっとも単純には「起きる (happen)」ということなのである。「この水は熱くなった。」とか「この雑音が大きくなった。」のような文は質的変化を記述している。「このできごとは現在になった。」のような文は絶対的生成という事実を記述している。そして、質的変化が絶対的生成を含んでいることは明らかであり、また、質的変化を伴わない単なる持続にも絶対的生成が含まれていることも、私には同様に明らかだと思われる。したがって、絶対的生成があたかも質的変化の一つの事例であるかのように取り扱えると考えることは、まったく的はずれなのである。」(いずれも C. D. Broad, *An Examination of McTaggart's Philosophy Vol* II (1938),Part I 1.22 より引用)。

要するに、「できごとが起きる」とか「できごとが存在する」と言うことは、「起きること」としての時間生成という、根源的変化の存在を主張することなのである。

5.2 可能性から必然性への変化としての「起きること」

さて、冒頭で紹介したA君の回答は、まさしく「起きる」ということに注目して過去と未来の相違を捉えていた。今述べたことも踏まえつつ、彼の回答の哲学的含意を剔出してみよう。

私たちは過去と未来の相違というと、「現在より以前か以後かの相違」という形で、どうしても時間的前後関係に即して考えがちである。しかしA君は、それをどちらかというとできごとの完了、未完了などを表すアスペクトに重点をおいて考えたようである。そうすると、ある時点tにおける<過去のできごと>とは、時点tにおいて「すでに起きた」「もう終わった」と言えるできごとであり、<未来のできごと>とは、「まだ起きていない」「まだ始まっていない」と言えるできごとだと考えられる。未来のできごとは「まだ起きていない」以上、ひょっとしたら起きないかもしれない。つまり、少なくとも時点tでの可能性として「起きない」ということを含んでいる。これに対して、時点tで「すでに起きた」といえるできごとにはもはや「起きない」可能性はない。なぜなら、「起きた」といえるためには少なくともどこかの時点において「起きている」と言えなければならないからである。起きてもいないできごとが終わるということはあり得ないだろう。

そして、時点tにおける現在のできごとが、時点tにおいて「起きている」「もう始まったがまだ終わっていない」と言えるできごとだとするならば、少なくとも過去のできごとは、それが「起きている」どこかの時点が存在する、と時点tにおいて言えるという点で、時点tにおける現在のできごとと共通している。そして過去のできごとの場合は、それだけでなく「すでに起きた」「もう終わった」と言える時点も存

在するが、現在のできごとについては、それが存在するかどうかはまだわからない。ひょっとしたら永遠に終わらないかもしれないからである。

これらの違いを次のようにも言い表せるだろう。未来のできごとは、まだ始まっておらず、起きないことを可能性として含んでいる以上、それはあくまでも現時点ではまだ単なる可能性にとどまっている「可能的なできごと」だといえる。これに対して過去のできごとは、終わってしまっている以上、それが起きないことは現時点ではもはやあり得ないという意味で、現時点では「必然的なできごと」だと言えるだろう。そして現在のできごとを、可能的なできごとから必然的なできごとへと変化する最中にあるできごととして考えるならば、それはそうした変化という一種の動き、働きを伴ったできごとだという点で「アクチュアル (actual) なできごと」だと言えるだろう。「アクチュアル」とは、「働く、作用する」という意味の 'act' から派生した言葉だからである（日本語では通常「現実的な」と訳される）。

あるいは、いま述べた過程を、可能的なできごとが「実現する (realize, come true)」あるいは「現れる (appear)」過程だとも言い表せるだろう。したがって、実現したできごと、つまり過去のできごとは「実在する (be real)」けれども、また実現していない未来のできごとは、可能的に存在するだけであって実在するとはいえないということになるだろう。

ただ、ここで注意すべきは、先ほども述べたとおり、「できごと」という持続的な個体が存在して、そこにおいて可能性から必然性への変化が起きると考えてはいけないということである（もちろん、通常のできごとは時間的幅を持つという点で「持続する」ともいえるが、できごとの時間的延長性と実体の持続性とは別の概念である。哲学では、前者を「延続 (perdurance)」と呼んで後者の「持続 (endurance)」と区別することがある）。持続しているのは、あくまでも当該のできごとの支えとなっている何らかの実体である。その実体に対してある時点において生起する時間生成としての「できごと」がまずあり、それと実体の持続性との関係の中で、その生起以前にその実体が持っていた可能性と、その生起後にその実体が持つことになる必然性、という両概念が生ずるのである。未来のできごとが「可能的」である理由は、それを支える何らかの実体の未来における存在が必ずしも保証されていないという点で可能的だからであり、その点こそが、その存在が必然的に保証されている過去の「必然的できごと」との相違なのである。簡単に言うならば、たとえば誰か３０歳になるためには２０歳になることがその必要条件であるが、４０歳になることは必ずしも必要でないということである。

したがって、「できごとが可能性から必然性へと変化する」というのは、そのできごとの支えとなる諸々の実体を一つ一つ列挙したり、そのうちのいくつかを特定したりすることの困難さや煩わしさを回避するための、一種の省略用法と考えていただきたい。

5.3　過去は実在する。だから行けない。

A 君はおおよそ上のような意味で「過去は実在するが未来は実在しない」ということを語っていたと考えられるが、過去と未来の相違についてこのように考えたとき、少なくともパラドクスを引き起こすような過去へのタイムトラベルは不可能であることを立証できる。この場合のパラドクスとは、過去へタイムトラベルして自分の祖先や若き日の自分を殺害することによってもたらされる「親殺しのパラドクス」とか、逆に、過去へタイムトラベルして出会った自分の祖先との間に子を設けることによって生ずる「一人親子のパラドクス」などである。

その立証のために「過去は実在するが未来は実在しない」という発想を次のように定式化してみよう。

任意の実体連鎖 x、任意のできごと e,f について、x が e を経験した後に f を経験したならば、x が e を経験した時点においては f は実在しないが、x が f を経験した時点においては e は実在する。...前提 A

この場合の「実体連鎖」とは、例えば、「明治天皇-大正天皇-昭和天皇」などのように、親子関係によって連なっている実体の系列を表す（無生物にも、拡張した意味での「経験」や「親子関係」を適用できる

と考える)。もちろん、この場合の実体連鎖には、実際には連鎖を成さない単独の実体の場合も含まれる。また、この定義における「後に」という言葉で示される順序関係は、その実体連鎖上の順序関係、いわゆるその実体連鎖の「固有時間」上の順序関係である。

もしも前提Aが成立するならば、ある人物が、若き日の自分またはその祖先が存在する過去の時点へとタイムトラベルし、その若き日の自分または祖先と何らかの接触を行うことは不可能であることになる。たとえば、1960年に発生し、少なくとも2000年までは持続していた人物aが、2000年の時点でタイムトラベルによって1980年に行って20歳の自分と出会うことは不可能である。なぜならばその場合、前提Aによって、未来の自分との遭遇というできごとが起きた1980年の時点で、2000年における過去へのaの旅立ちというできごとが実在すると同時に実在しない、という矛盾が生じてしまうからである。なぜ実在するかと言えば、人物aは2000年から1980年へとタイムトラベルしているので、1980年の時点で、2000年におけるaの旅立ちというできごとが実在するということになるからである。逆になぜ実在しないかと言えば、人物aはタイムトラベルする2000年より以前の1980年に、40歳の自分との遭遇というできごとを経験しているので、その時点では2000年における過去への旅立ちというできごとは実在しないということになるからである(55頁、図1)。

このように、前提Aさえ認めれば、謎を引き起こし得るような過去、すなわち、過去の自分または祖先と接触し得るような過去へのタイムトラベルは少なくとも不可能であることが、意外にあっさりと証明できてしまうわけだが、問題は、果たして前提Aを認められるかどうか、また認めた場合、それによって証明される過去へのタイムトラベルの不可能性とはいかなる意味の不可能性なのか、ということになる。

先ほど述べたとおり、前提Aは、「過去は実在するが未来は実在しない」ということをその発想の基本としている。前提Aにおいては、まず何らかの実体連鎖を前提したうえで、その固有時間上のある時点よりも以前の部分でのできごとが過去のできごとであり、その時点より以後の部分でのできごとが未来のできごとであると考えたわけである。したがってまず問われるべきは、「過去は実在するが未来は実在しない」という発想そのものが妥当であるか、そしてその場合、実在性に関する過去と未来のそのような非対称性を、実体(連鎖)に即して捉えることが妥当であるか、ということになるだろう。

私としては、まずこれまで述べてきた議論をもって「過去は実在するが未来は実在しない」ということの正当化としたいと考える。それは一言で言えば、時制というものを、単なる時間的前後関係の規定としてではなく、時間的な意味での可能性や必然性などを表す一種の「様相(modality)」として捉えるべきだ、という主張である。そして、そのような必然性・実在性としての過去、可能性・非実在性としての未来という発想の根源にあるのは、一つの個体として持続的に存在する自分自身の歴史というものを考えてみたとき、それは、誕生時と死亡時という境界点を除けば、誕生時から現在に至る確定的で実在的な部分とそれ以後の不確定で可能的な部分との二つの部分によって常に構成されている、という実感であろうと私は考える。それが、前提Aのように実体に即した形で過去と未来を規定した理由である。

ここで強調したいのは、まず第一に、その実感とは決して主観的なものでもなければ、また単に意識現象にのみ関わるようなものでもない、ということである。その実感とは、それが精神的な側面を含んでいようがいまいが、まさにひとつの個体として持続的に存在するものであればどんなものであれ、いま述べたような過去と未来の非対称性がそこでは成立しているはずだという実感であり、その意味で、その実感にもとづいた主張は、客観的レベル、具体的対象全般にかかわる存在論的レベルでの主張だといえる。したがって、時制表現によって表される必然性や可能性などの様相も、客観的・存在論的な様相である。「過去へは行けない」という場合の不可能性も、そうした存在論的な様相に由来する不可能性であることになる。過去は実在するが未来は実在しないということが、過去へ行けないことの理由となる。逆説的だが、過去は実在しないから過去へ行けないのではなく、まさに実在するがゆえにこそ行けないのである。

もうひとつ重要なことは、上の前提Aの中で言及された「時点」は、特殊相対性理論でいうところの「観測系」などに相対的であっても何ら構わないということである。そこにおいてどのような同時性の基準が採用されていようとも、問題になっているのは、実体連鎖の経験の系列上にある二つのできごとだけであ

り、それぞれのできごとと同時に起きている別のできごとは何ら関与していない。そして両者の間には実体連鎖の経験の系列に沿った因果的順序関係が成立しているはずなので、観測系によって時点を相対化したとしても因果順序の変更はもたらされないことを考えれば、議論に影響はないのである（結果的に因果ループが生ずることによる問題は、また別の事柄である)。ついでにいえば、先ほど引用した箇所でブロードが用いていた「絶対的生成」という概念における「絶対性」も、できごとが「起きること」である以上免れ得ない、という意味での絶対性なので、時点の相対性如何の問題とは無関係に成立するものである。

5.4 「未来に行く」こととしての現在性

以上の理由で、少なくともパラドクスを引き起こしうるような過去へは行けない事の証明が成立すると私は考えるのだが、その証明は、実在的・必然的な過去と非実在的・可能的な未来という存在論的非対称性を根拠としていた。後述するように、このような存在論的非対称性は、科学的探究の諸場面にも通用する普遍性をもつと私自身は考えている。しかし特に現代では、科学者のみならず哲学者のなかにも、存在論的様相などの「非科学的」概念はできるだけ消去したいと考える人たちがいる。

そこで、前提Aに少なくとも直接的には依存しないような他の証明はないかどうか改めて考えてみたい。そのために、冒頭に紹介したB君の回答を参照してみよう。それは次のような回答であった：

「すべてのものは常に現在に存在している。過去へ向かうことは現在に逆らうことであり、未来へ向かうことは現在に従うことである。」

この回答の前半は、現在だけが実在すると考える「現在主義」と呼ばれる立場を表明している。これも私たちに根強い実感であり、「起きること」としての時間生成という観点からの実在の生成的側面を的確に捉えている。ただ私自身は、様相的観点に基づき、世界の実在性の中に必然性をも含めてより広く捉えたうえで、過去をも含む実在世界のなかの特異的な部分として、つまりその場で可能性から必然性への変化が起きているアクチュアルな部分として、「現在」を捉えることによって、その実感をくみ取りたいと考える。ただ、こちらの方にはあまり踏み込まず、ここでは特にこの回答の後半部分「過去へ向かうことは現在に逆らうことであり、未来へ向かうことは現在に従うことである。」について検討する。

この回答の中の「現在に逆らう」「現在に従う」という表現は、具体的な意味がわかりにくい、どことなく詩的な表現だが、「過去へ行く」ということの特殊性を直観的に捉えているように思われる。その直観の意味をもう少し具体的な形で確認するために、先ほどの図1をもう一度思い出してみよう。

図1を見てわかるように、なぜ過去へのタイムトラベルが謎を引き起こすかといえば、ある実体（連鎖）が二度経過する1980年のような時点が生じてしまうからである。さきほどの証明は、そのようなことが起きるとしたら矛盾するということを前提Aから導くことによって過去への旅の不可能性を示したと考えられる。そしてこのことをもう少し一般化して考えてみると、そうした矛盾が生ずるのは、実体の固有時間を表す線（「実体線」と呼ぶことにする）がどこか少なくとも一カ所で屈折している場合だと考えられる。すると、どのような方向であれ、それが一回でも屈折したら矛盾が生ずるのに対し、逆に屈折が生じない限り、仮にその方向が客観的時間の方向に逆行していたとしても、少なくともその実体線上では矛盾は生じないということになる（55頁、図2)。

「過去へ向かうことは現在に逆らうこと」という表現は、このような意味での実体線の「屈折」「逆行」こそが問題を引き起こすのだということを表したかったのではないだろうか。そして「未来に向かうことは現在に従うことである」という表現は、通常の私たちはある意味で常に「未来に向かっている」のだということを表しているように思われる。つまり、ある「時点」に存在するということは、時間的な方向性を持って存在するということなのだ。とすれば、「未来へ行く」には、通常の私たちの時間的方向性を持ったあり方を表す意味と、他人よりも早く未来を経験するという意味との二つの場合があることになる。

そして前者の場合では、「過去の世界」と「未来の世界」があって、たまたまタイムトラベルの行き先が前者であるか後者であるかの違いが「過去への旅」か「未来への旅」かの違いだ、というわけではなく、通常の私たちのあり方そのものが実は「未来へ行く」というあり方であるのに対し、それに逆行してしまうことが「過去へ行く」ということの意味なのだ、といえる。実際、先ほどの図1を見てみると、逆行した後の実体線の部分が「過去へ行く」ということを表しているのだとしたら、タイムトラベルする以前の通常の実体線の部分は、タイムトラベルをしていないにもかかわらず「未来へ行く」ということを表していると考えられるだろう。

だとすれば、次の前提さえ認めれば、過去へのタイムトラベルは不可能であることが示せるのではないだろうか：

任意の実体連鎖xと任意の時点tについて、実体連鎖xが時点tを二度以上経過することはない。
...前提B

これは言い換えれば、いかなる実体連鎖といえども、それがその時々に経過している時点は、常にその実体連鎖にとって未経験の新たな時点であるという点で、それまではその実体連鎖にとってはあくまでも「可能的な」時点だったということである。あるいは、一度経験してしまった以上、その時点はもはや二度と経験できないという意味で、まさしく「取り返しのつかない」時点だという意味での一種の「必然性」をそこに読みとることもできよう。そして私たちの人生がそうした取り返しのつかない一回限りの時点の経験の連続によって成り立っているということ、これこそがいわゆる「流れ去っていく時間」「時の流れ」という、時間に動的性格を見いだす私たちの直観の根源にあると考えられるのではないだろうか。また、実体は何の質的変化を被らなくとも日々刻々歳を取っている（これも無生物にも適用できる拡張された意味で）という意味での「純粋生成 (pure becoming)」という概念も、同じ発想に基づくものだろう。

しかしこれに対して、第一に、次のような反論があるかもしれない：

「前提Bとは、まさしく私たちが過去へ行けないということそのものを別の表現で言い表しているだけではないか。その意味で、まったく証明になっていない単なる論点先取ではないか。」

私はそれに対して、実体線が客観的時間における過去に向かっていたとしてもただちにパラドクスを引き起こすわけではなく、その方向如何を問わない実体線の屈折にこそパラドクスの本質的原因があることを指摘している点で、こちらの方がより一般性の高い定式となっているということは主張したいが、基本的にその反論に同意する。そのうえで、もしもこれ以外に証明方法がないのだとしたら、もはや時間に関してそれ以上根拠を与えられないような最も根源的なレベルに私たちは到達しているのだと考える。つまり、なぜ私たちは過去へ行けないのか、という問いは、そもそも過去へ行けないとはどういうことであるか、ということの確認こそが答えとなり、そしてそれ以外の答えはあり得ないような問いだったのである。ひとつの対象として持続的に存在する個体としての「実体」と、実体（連鎖）が二度経過することが不可能な何ものかとしての「時点」という、少なくとも二種類の対象の存在を承認するということ、そのこと自体が、私たちが過去へは行けないということそのものを意味していたのである。

第二に、前提Bは、前提Aと異なり、「時点」に即して定式化されているので、時点の相対性如何の問題が直接的に関わってくるのではないか、という疑問が予想される。そして確かに、実体連鎖が経験する何らかの局所的な意味での「時点」については前提Bを満たしつつも、同時性の基準の取り方や時空の歪みなどによって、局所的に異なる二つの時点の間にグローバルな「同時性」が成立してしまうというようなケースは考え得る。しかし、仮にそうだとしても、ここで問題になっていることが、パラドクスを引き起こしうるような過去、すなわち、過去の自分やその祖先と何らかの接触を行い得るような過去へ行くことの可能性であるとすれば、この場合の時点とは、局所的な意味での時点であって何ら構わないことになる。そしてそのような意味での過去でない限り、過去へタイムトラベルしたとしても、少なくとも私たち

にとって実質的な意味で「過去の世界の中で生きる」ということにはならないだろう。その場合の「過去」とは、もはや経験的実質を剥奪されて、何らかの科学理論の中で何らかの理由によって擬似的に「過去」と呼ばれている「過去もどき」にすぎないと思われる。

5.5 単独の「できごと」「時点」に潜む時間的方向性

以上、学生の回答に即して二つの側面から時間の方向性について考えてきたわけだが、いずれの見方にも共通しているのは、持続的個体としての「実体」を基礎的存在者として位置づける実体主義的な存在論である。そして実体を基礎として「起きること」としての「できごと」を捉えたとき、実体にとって可能的なできごとから必然的できごとへの変化としてのできごとの生起という、単独のできごと自体に潜む時間的方向性が浮かび上がる。さらに、実体がある「時点」に存在するということが、常に新たな時点を経験しつつ存在することとしての純粋生成を含意しているという意味で、単独の「時点」自体に潜む方向性も明らかになる。まとめて言えば、実体の存在形式における時間的な意味での様相的非対称性が、最も根源的な時間的方向性をもたらしているのである。

このような様相的非対称性に由来する時間的方向性は、もちろん科学的探究の対象となるような事柄ではない。その意味で、それは「非科学的」だと言える。しかしそれは決して「反科学的」なのではなく、むしろ「前科学的」というべき何かである（「時代遅れの」という意味ではなく、「前提されている」という意味で）。それは、当該の自然科学の研究領域がミクロであれマクロであれ、その理論的対象や観察・実験対象、観察・実験装置や観察者・実験者など、何らかの実体がひとつでもそこに関与している以上、いかなる科学理論といえども免れ得ない時間的方向性なのである。

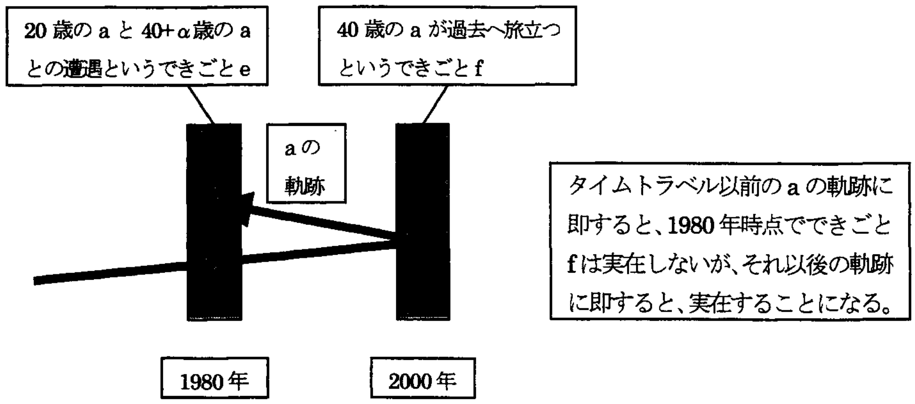


図1　過去へのタイムトラベルがもたらす矛盾

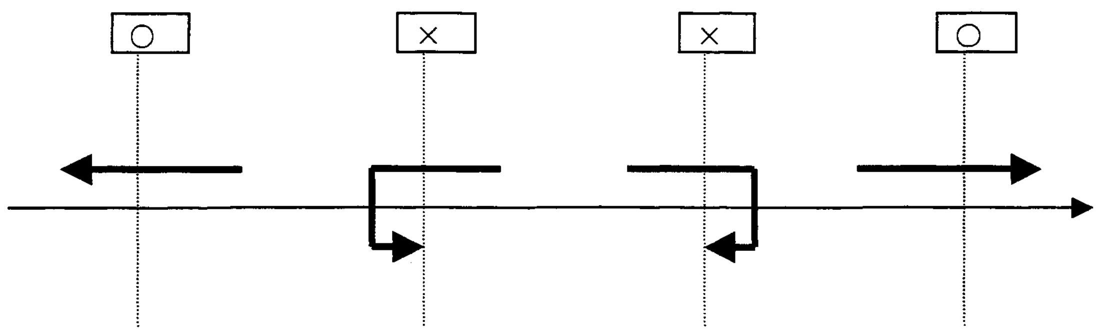


図2　実体線の屈折