

コンパクト化の次元に関する研究

On Dimensions of Compactifications

プロジェクト代表者：木村孝（教育学部・教授）
Takashi Kimura (Faculty of Education, Professor)

1. 研究の経過

有限次元でない空間を無限次元空間というが、無限次元空間にもいろいろな種類があり、有名なものとして、weakly infinite-dimensional、C-space、countable-dimensional 等がある。これらは、有限次元空間の特徴付け等を少し変形したものであり、無限時限の中でも有限次元に近い、次元が弱いものとして知られている。

weakly infinite-dimensional に関しては、1985年に Borst が特殊な基底をもつことで、weakly infinite-dimensional なコンパクト化をもつ可分距離空間を特徴づけた。すなわち、彼は、small weakly infinite-dimensional という概念を作り、可分距離空間が距離化可能な weakly infinite-dimensional なコンパクト化を持つための必要十分条件は、その空間が small weakly infinite-dimensional であることであることを証明した。

この Borst の結果を契機として、2004年に、かつて私が院生として指導した菰田氏（現在、順天堂大学・講師）とC-space となる距離可能なコンパクト化をもつ可分距離空間を特徴づける研究を行い、その成果を学術雑誌 Topology and its Applications に発表した。その論文では Borst の結果と似た形で small C-space という概念を提出し、可分距離空間が距離化可能な C-space となるコンパクト化を持つための必要十分条件は、その空間が small C-space であることであることを証明した。

私は、菰田氏と協力しあって、これらの研究をさらに進め、weakly infinite-dimensional に関しては、基底を用いた特徴付けだけでなく、特殊な距離をもつことで特徴づけた。

すなわち、S-weakly infinite-dimensional の距離空間版のような概念 μ -S-weakly infinite-dimensional という概念を定義し、可分距離空間が距離化可能な weakly infinite-dimensional なコンパクト化を持つための必要十分条件は、その空間が μ -S-weakly infinite-dimensional であることであることを証明した。

μ -S-weakly infinite-dimensional は weakly infinite-dimensional の定義の一部を、距離を用いて自然に変更したもので、不自然さがないものである。具体的には、交わらない2つの閉集合の対を考える代わりに、距離が離れている2つの閉集合の対を考えるとよいものである。これらの概念はコンパクト空間では一致することが容易にわかる。

たとえば、S-weakly infinite-dimensional 空間というものがあるが、これは weakly infinite-dimensional なコンパクト化を持つための十分条件であることはよく知られているが、残念ながら、必要条件でないことも知られている。

われわれの研究から、 S -weakly infinite-dimensional 空間は、 μ - S -weakly infinite-dimensional になることは明らかであるが、この事実は、われわれの定理を用いるまでもなく、定義から明らかにわかるほど、 μ - S -weakly infinite-dimensional は自然な定義である。

有限次元空間の可算和で表すことができる空間を countable-dimensional 空間というが、countable-dimensional に関しても、特殊な基底をもつことと、特殊な距離をもつことの2種類の方法で、距離化可能なcountable-dimensional なコンパクト化を持つ可分距離空間を特徴づけることに成功した。

countable-dimensional 空間も、 S -weakly infinite-dimensional 空間と同様に、互いに交わらない閉集合の対に対してある条件を満たす分離集合をもつことで特徴づけられることがわかっているが、われわれは、この性質を C -space を特著づける場合に用いた方法と同じ方法で拡張した概念を考え、それを用いて、countable-dimensional なコンパクト化を持つ可分距離空間を特徴づけることにも成功した。

この結果は現在投稿中である。

2. 成果の概要（発表論文リスト）

Takashi Kimura and Chieko Komoda, Weakly infinite-dimensional compactifications and countable-dimensional compactifications, preprint