

# 有限群の表現論とコホモロジーに関する研究

## Representation theory and cohomology of finite groups

プロジェクト代表者：飛田明彦 (教育学部・准教授)  
Akihiko Hida (Faculty of Education, Associate Professor)

### 1. 研究の背景と概略

有限群の正標数の体上での表現、モジュラー表現が研究対象である。群多元環上の加群の圏やその導来圏、安定圏の構造について研究を行った。加群の圏の導来圏の構造については、部分群の加群の圏の導来圏との関係に関する重要な予想があり、主にその観点から研究を行った。

一方、加群の構造や各種の圏を調べる際に、加群の拡大の群 cohomology 群は重要な役割を果たしている。ある加群の自分自身との拡大の群は全ての次数についての直和を考えることにより次数つき環となっている。特に群多元環の場合、基礎体への自明な作用を考えた自明な加群については、この拡大の群から作られる次数つき環は cohomology 環と呼ばれ重要な対象となっている。この cohomology 環に関しても部分群の cohomology 環との関係について研究を行った。

### 2. 有限群のブロックと導来圏同値

$G$  を有限群、 $k$  を正標数  $p$  の体とする。群多元環  $kG$  はブロックと呼ばれる多元環にイデアルとして分解される。

$$kG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_t$$

$kG$  のブロック  $B$  には不足群と呼ばれる  $G$  の  $p$ -部分群が付随している。 $B$  の不足群を  $D$ 、 $G$  における  $D$  の正規化群を  $N_G(D)$  とすると、 $B$  に対してその Brauer 対応と呼ばれる  $kN_G(D)$  のブロック  $B'$  でやはり同じ不足群を持つものが対応している。不足群が正規部分群である場合はわかりやすい状況であり特に  $B'$  の構造については一般のブロック  $B$  より情報が良く分かるものとされている。よって  $B$  と  $B'$  の関係特に  $B'$  の情報から  $B$  の情報を得ることが必要となる。

現在最も活発に研究されている場合として、不足群  $D$  が可換群の場合に  $B$  の導来圏と  $B'$  の導来圏は同値になるのではないかと、という予想がある。加群の圏の導来圏については有限群のブロックということをはなれて一般の多元環の表現の見地からも興味を持たれ、現在盛んに研究がなされている。最近対称群というクラスに対して、この予想が正しいことが証明された。本研究では、一般線形群というクラスの群に対して研究を行い、対称群の場合も含めてそこで用いられた手法に関する総合報告を行った ([2])。

### 3. 群の cohomology と部分群, Mackey 関手

有限群  $G$  の  $k$  係数の cohomology 環

$$H^*(G, k) = \bigoplus H^n(G, k)$$

と  $G$  やその部分群の構造、表現論との関係について研究を行った。 $G$  の cohomology は  $G$  の分類空間の cohomology として位相幾何学の立場からも定義され研究されている。Mislin (1990) は

位相幾何学の手法を用いて,  $G$  の  $p$ -部分群の融合の構造が  $H^*(G, k)$  によって決まる, ということを示した.  $p$ -部分群の融合の状況により cohomology が決定されることは古く 1950 年代より知られていることであり利用されてきたが, Mislin の定理はその逆も成立するという画期的なものであった. この結果については, 代数的な群の表現論の立場からのアプローチが 10 年以上に渡り望まれていたが, 本研究により表現論を用いた証明を与えることができた.

cohomology と  $p$ -部分群の構造を結ぶ道具として Mackey 関手が用いられる. これは  $G$  の各部分群  $H$  に  $k$ -ベクトル空間を対応させるある種の関手であり, 制限写像, 共役写像, 移送写像が定義されているものである. 群の cohomology は代表的な例である. 本研究では cohomology の Mackey 関手としての構造について主に表現論の立場から研究を行い, その組成因子や直既約因子に関する結果を得た ([1]).

## 報告書

[1] Akihiko Hida, Mackey functor and cohomology of finite groups, Proceedings of the 39th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (2007), 124-127.

[2] Akihiko Hida, 対称群のブルエ予想, 研究集会「環論とその周辺」報告集 (2007), 137-150.