

プロジェクト名： 非線形波動方程式の解は見つけれられるか？

解の存在定理証明のための新技術

プロジェクト代表者： 町原秀二（教育学部・准教授）

1 研究の目的

偏微分方程式の中で波の運動を記述する波動方程式を扱う。そこに様々な物理的意味を包含する非線形項を付けた所謂、非線形波動方程式に対して解の存在定理を数学的に与えることが本プロジェクトの研究目的であった。非線形の微分方程式は多くの場合に解をズバリ求めることが不可能なために、解の存在定理を与えることは偏微分方程式の研究の根本をなしている。

特に今回のプロジェクトで相対論的量子力学に現れる非線形波動方程式の非線形ディラック方程式およびディラック・クライン・ゴルドン方程式を取り扱った。

2 研究の進め方

- ① p 乗冪とポテンシャルをたたみ込みにより結合した所謂非有界非線形項をもつ非線形ディラック方程式の空間高次元における解の存在定理の解決のために、非線形波動方程式のための時空間統一評価（Strichartz型評価式）を利用して縮小写像の原理に持ち込んだ。非線形項の取り扱いにおいては標準的なHölderの不等式およびYoungの不等式を用いて評価した。
- ② ①の方程式に対して空間2次元において解の存在定理の解決を試みた。高次元で有効であった時空間統一評価（Strichartz型評価式）が低次元ではうまく機能しないため工夫が必要であった。関数の滑らかさを譲ることの引き換えにStrichartz評価式の指数の許容範囲を広げ、本問題に適用した。非線形項に対してはHölderの不等式およびYoungの不等式を用いた。
- ③ ディラック・クライン・ゴルドン方程式系の空間1次元における解の存在定理の解決を試みた。線形項と非線形項に対しそれぞれ別々の関数空間を用意し評価する。線形項は具体的な解表示があるので、かなり精密な計算ができる。また非線形項は解全体より具合の良い関数空間に属することが示せる。

3 研究の成果

- ① p 乗冪とポテンシャルをたたみ込みにより結合した非有界非線形項をもつ非線形ディラック方程式の空間高次元における解の存在定理を得た。専門雑誌への掲載が決定した。

- ② ①の方程式に対して空間2次元において解の存在定理を得た。専門雑誌への掲載が決定した。
- ③ ディラック-クライン・ゴールドン方程式系の空間1次元における解の存在定理を得た。この時点で既存の結果を「ソボレフ空間指数の減少化」の意味で改良したことになる。現在専門雑誌へ投稿中である。

専門雑誌への掲載決定論文

Shuji Machihara and Kimitoshi Tsutaya, Scattering Theory for the Dirac Equation with a Nonlocal Term, to appear in Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A.

Shuji Machihara and Kimitoshi Tsutaya, Scattering Theory for the Dirac Equation of Hartree Type in Two Dimensions, to appear in Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications.