プロジェクト名：波動方程式の解の性質

プロジェクト代表者：町原　秀二　（教育学部・准教授）

１　時間依存係数つき半線形シュレディンガー方程式の研究

本研究は早稲田大学の小澤徹氏、埼玉大学教育学部院生権田拓弥氏との共同研究である。

量子力学の基礎方程式のシュレディンガー方程式およびそこへ非線形項を付随した非線形シュレディンガー方程式は広く研究されている。今回はその中でも時間依存した関数を係数にもつシュレディンガー方程式にｐ乗べきの非線形項をつけた非線形シュレディンガー方程式を、空間次元一般の場合において考察した。初期値を与え、時間経過に対する解の存在を考える初期値問題の適切性について調査を行った。

同問題に対して先行結果として Fanelli の 2009 年の論文があり、そこでは次の結果定理 F1～F3 が得られていた：

定理 F1

非線形項の係数を実数とする。べきの指数を（二乗可積分関数全体の空間の意味の）劣臨界な範囲でとる。初期値を二乗可積分関数全体の空間からとる。このとき時刻無限まで二乗可積分関数全体の空間に解は存在する。またその解は連続でありその空間ととある指数の関係を満たす時間ローレンツ、空間ローレンツの空間に含まれる関数の意味で一意である。

またさらにべきの指数を（二乗可積分関数全体の空間の意味の）臨界な値でとっても初期値を十分小さくとれば同様の結果が得られる。

定理 F2

非線形項の係数を実数とする。べきの指数を（一回微分関数の二乗可積分全体の空間の意味の）劣臨界な範囲でとる。初期値を一回微分関数が二乗可積分全体の空間からとる。このときある有限時刻まで一回微分関数が二乗可積分全体の空間に解は存在する。またその解は連続でありその空間ととある指数の関係を満たす時間ローレンツ、空間ローレンツの空間に含まれる関数の意味で一意である。

またさらにべきの指数を（一回微分関数の二乗可積分全体の空間の意味で）臨界な値でとっても初期値を十分小さくとれば同様の結果が得られる。

定理 F3

非線形項の係数を実数としその正負に対してべきの指数を劣臨界かつ適当な条件を満たすとする。初期値を一回微分関数が二乗可積分全体の空間からとる。このとき時刻無限まで一回微分関数が二乗可積分全体の空間に解は存在する。またその解は連続でありその空間ととある指数の関係を満たす時間ローレンツ、空間ローレンツの空間に含まれる関数の意味で一意である。

これら Fanelli の結果の定理 F1～F3 において非線形項の係数を実数にとっているのは先行評価（アプリオリ評価）を構成するときに用いている。これらの定理に対してわれわれの結果は以下のように述べること

ができる：

① 二乗可積分関数全体の空間の意味の劣臨界なべきに対して時間、空間ともにルベーグ空間で解の一意性を示すことができた。

② 非線形項の係数を複素数とし、二乗可積分関数全体の空間の意味の臨界なべき、そして十分小さい初期値に対してアプリオリ評価を用いずに時刻無限までの解の存在を示すことができた。また時間ローレンツ、空間ルベーグの空間で一意性を示すことができた。

③ 二乗可積分関数全体の空間の意味の臨界なべきに対して初期値の大きさを制限することなく有限時刻までの解の存在を示すことができた。また時間ローレンツ、空間ルベーグの空間で一意性を示すことができた。

④ 一回微分関数が二乗可積分全体の空間の意味の劣臨界なべきに対して時間、空間ともにルベーグ空間で解の一意性を示すことができた。

⑤ 一回微分関数が二乗可積分全体の空間の意味の臨界なべきに対して初期値の大きさを制限することなく有限時刻までの解の存在を示すことができた。また時間ローレンツ、空間ルベーグの空間で一意性を示すことができた。

⑥ 非線形項の係数を複素数とし、一回微分が二乗可積分全体の空間の意味の臨界なべき、そして十分小さい初期値に対してアプリオリ評価を用いずに時刻無限までの解の存在を示すことができた。一回微分関数が二乗可積分全体の空間で連続という意味での一意性を示すことができた。