非線形場に現われる孤立波の安定性解析

Stability Analysis for Solitary Waves arising in Nonlinear Fields

プロジェクト代表者：太田 雅人（理学部・助教授）

Masahito Ohta (Faculty of Science, Associate Professor)

1　非線形クライン・ゴルドン方程式の定在波解の不安定性

べき乗型非線形クライン・ゴルドン方程式

$$\partial_t^2 u - \Delta u + u = |u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \tag{KG}$$

の定在波解の不安定性に関して, アメリカ合衆国テネシー大学の Grozdena Todorova 教授と共同研究を行なった. ここで, t は時間変数, x は空間変数で, 空間次元 N と非線形べき p に関しては, $N \geq 2$, $1 < p < 1 + 4/(N-2)$ を仮定する. また, $u = u(t,x)$ は複素数値の未知関数で, 定在波解とは, $u(t,x) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ という変数分離形の (KG) の特殊解である. ただし, i は虚数単位を表し, ω は $-1 < \omega < 1$ をみたす定数で, $\varphi(x)$ は定常問題

$$-\Delta\varphi + (1-\omega^2)\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{SP}$$

のエネルギー有限かつ非自明な解である.

定在波解の安定性に関する既知の結果の多くは, 基底状態 (エネルギー最小定常解) に対するものであり, 励起状態に対する結果はあまり知られていない. (KG) の基底状態 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の安定性については次が知られていた.

- $\omega = 0$ のとき, 強不安定 (Berestycki-Cazenave 1981)
- $p < 1 + 4/N$, $\omega_c < |\omega| < 1$ のとき, 軌道安定 (Shatah 1983)
- $p < 1 + 4/N$, $|\omega| < \omega_c$ または $p \geq 1 + 4/N$, $|\omega| < 1$ のとき, 軌道不安定 (Shatah-Strauss 1985)

ここで

$$\omega_c = \sqrt{\frac{p-1}{4-(N-1)(p-1)}}$$

である. また, 定義から, 強不安定ならば軌道不安定であることに注意する.

本研究では, 次の 2 つの問題について考察した.

- 臨界振動数の場合 $|\omega| = \omega_c$, $p < 1 + 4/N$ はどうか?
- $\omega \neq 0$ のとき, 軌道不安定性だけでなく, 強不安定性も成り立つか?

この問題に関して, G. Todorova 氏との共同研究 (論文 [1], [2]) で次の結果を得た.

定理 1　$p < 1 + 4/N$, $|\omega| = \omega_c$ とし, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ を (SP) の球対称解とする. このとき, (KG) の定在波解 $e^{i\omega t}\varphi(x)$ は強不安定である.

定理 2　$p < 1 + 4/N$, $|\omega| < \omega_c$ または $p \geq 1 + 4/N$, $|\omega| < 1$ のとき, (KG) の基底状態 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は強不安定である.

定理 2 は, 基底状態の軌道不安定性が示されていたすべてのパラメータ (p, ω) に対して, 基底状態は強不安定であることを示している. また, 基底状態は球対称だから, 定理 1 から, 臨界振動数をもつ基底状態は強不安定であることが分かる. 臨界振動数の場合は, 安定性はこれまで不明であったことに注意する. また, $N \geq 2$ のとき, 基底状態以外にも無限個の球対称な定常解が存在することに注意する.

定理 1, 2 の証明では, 球対称な関数 $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対する減衰評価

$$\|w\|_{L^\infty(|x| \geq m)} \leq C m^{-(N-1)/2} \|w\|_{H^1}$$

を本質的に使っている. 球対称性及び $N \geq 2$ という仮定はここで必要となる. これらの仮定を取り除くことができるかどうかは今後の課題である.

2　クライン・ゴルドン・ザハロフ方程式系への応用

前節で考察した単独の非線形クライン・ゴルドン方程式に対する手法を, プラズマ物理に現れるクライン・ゴルドン・ザハロフ方程式系

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + u + nu = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\ \partial_t^2 n - c_0^2 \Delta(n + |u|^2) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \end{cases}$$

に応用できるか考えた. ここで, 空間次元 N は 2 または 3 で, c_0 は正定数, u は複素数値関数, n は実数値関数である. $\omega \in (-1,1)$ に対し, $\phi_\omega \in H^1(\mathbb{R}^N)$ を (SP) で $p=3$ とした方程式の基底状態とすると

$$(u_\omega(t,x), n_\omega(t,x)) = (e^{i\omega t}\phi_\omega(x), -|\phi_\omega(x)|^2)$$

はクライン・ゴルドン・ザハロフ方程式系の定在波解となる. このとき, 定理 2 と類似の方法により, 次を示すことができた (論文 [2]).

定理 3　$N=2,\ 3,\ |\omega|<1$ のとき, クライン・ゴルドン・ザハロフ方程式系の定在波解 $(u_\omega(t,x), n_\omega(t,x))$ は強不安定である.

3　レーザーとプラズマの相互作用を記述するザハロフ方程式系

フランス, ボルドー大学の Mathieu Colin 教授と Thierry Colin 教授が, 平成１７年１月１１日から１月１６日まで埼玉大学を訪問し, レーザーとプラズマの相互作用を記述するザハロフ型の連立方程式系

$$\begin{cases} (i\partial_t + \alpha_0\Delta + 2\beta_0 i\partial_1 - \gamma_0)u_0 = \delta_0 n u_0 - \gamma\nabla(u_1\overline{u_2}) \\ (i\partial_t + \alpha_1\Delta + 2\beta_1 i\partial_1 - \gamma_1)u_1 = \delta_1 n u_1 + \gamma u_2\nabla\cdot u_0 \\ (i\partial_t + \alpha_2\Delta + 2\beta_2 i\partial_1 - \gamma_2)u_2 = \delta_2 n u_2 + \gamma u_1\nabla\cdot\overline{u_0} \\ (\partial_t^2 - \alpha\beta\Delta)n = \alpha\Delta(\delta_0|u_0|^2 + \delta_1|u_1|^2 + \delta_2|u_2|^2) \end{cases}$$

について共同研究を行なった. 空間１次元の場合に, 単独の非線形シュレディンガー方程式の孤立波解から生成される半自明な孤立波解の安定性に関する部分的な結果を得た. なお, この研究は現在も継続中のため, 詳細については省略する.

4　その他の関連する研究

福泉麗佳氏との共著論文 [3] では, 非一様な非線形項をもつ非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u = \Delta u + V(x)|u|^{p-1}u$$

の定在波解の不安定性について考察した.

久保英夫氏との共著論文 [4] では, 異なる伝播速度をもつ非線形波動方程式系の小さいデータに対する時間大域存在と爆発について研究し, 空間３次

元の場合にほぼ完全な分類に成功した. また, 久保氏との共著 [5] は, この分野におけるこれまでの研究の概要と最近の進展についてまとめたものである.

5　論文・著書リスト

[1] M. Ohta and G. Todorova, Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems 12 no.2 (2005), 315-322.

[2] M. Ohta and G. Todorova, Instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equation and related system, in "Nonlinear Dispersive Equations", edited by T. Ozawa and Y. Tsutsumi, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications (印刷中).

[3] R. Fukuizumi and M. Ohta, Instability of standing waves for nonlinear Schrodinger equations with inhomogeneous nonlinearities, J. Math. Kyoto Univ. 45 no.1 (2005), 145-158.

[4] H. Kubo and M. Ohta, On systems of semilinear wave equations with unequal propagation speeds in three space dimensions, Funkcialaj Ekvacioj 48 no.1 (2005), 65-98.

[5] H. Kubo and M. Ohta, On the global behavior of classical solutions to coupled systems of semilinear wave equations, in "New Trends in the Theory of Hyperbolic Equations", edited by M. Reissig and B.-W. Schulze, Operator Theory: Advances and Applications Vol. 159, Birkhäuser Verlag (2005), 113–211.