群同変性分岐理論を用いた幾何学的変分問題の安定性解析

Stability analysis of geometric variational problems
using the equivariant bifurcation theory

長澤 壮之　（理学部・教授）
Takeyuki Nagasawa (Faculty of Science, Professor)

1．研究の概要

従来、超曲面や曲線に対する様々な幾何学的変分問題が研究されてきた。石鹸膜の形状は、膜の表面張力より決まるエネルギーが最小になるものとして決定される。膜に対してエネルギーという実数が対応する。このような対応を 汎関数 という。幾何学的変分問題とは、ある汎関数を極小化する図形はどのようなものになるのかを研究する。これは、微分幾何学的な興味にとどまらず、自然界に現れるものの形状を決める原理ともいえ、現象論としても興味深い。

代表者の長澤は、長年、赤血球の形状を決める変分問題に取り組んできた。これは、ウィルモア汎関数に対する制限付極値問題として定式化される。与える制限は、赤血球膜を表す曲面の面積と、それが囲む領域の体積の指定である。この制限付極値問題は、ヘルフリッヒ等 ([1, 2]) が提唱したもので、ヘルフリッヒ変分問題 と呼ばれる。これをラグランジュの未定乗数法を用いて微分方程式として書き下すと、

$$\Delta_\Sigma H + 2H(H^2 - K) + 2c_0 K - 2\left(c_0^2 + \lambda_1\right) H - \lambda_2 = 0$$

となる。ここで Δ_Σ は、未知曲面 Σ の Laplace-Beltrami 作用素、H は平均曲率、K は Gauss 曲率、c_0 は赤血球膜の特性を表す自発性曲率、λ_1, λ_2 は Lagrange の未定乗数である。H や K は、未知曲面を表す関数の 2 階までの導関数を用いて表され、Laplace-Beltrami 作用素は、未知曲面の形状より定まる 2 階楕円型偏微分作用素である。従って、上の方程式は複雑な 4 階の非線形楕円型偏微分方程式となり、数学的な厳密な解析は非常に困難である。球面はヘルフリッヒ変分問題の解である。これまでに、球面を摂動した軸対称な解の族を無限個構成し、その安定性の解析に成功した。これらは、偏微分方程式の解であるが、変分問題の解としては、その安定性解析が重要である。不安定な解は、現実には観測されないと考えられるからである。また、軸対称性を持たない解の存在については未解明な部分が多い。

変分問題の解として安定なものは、その形状に何らかの対称性を持っていることが予想される。数学的に言えば、ある群の作用に関する同変性を持っていると考えられるのである。上に挙げた軸対称解は軸の周りの回転という群に関する同変性を有する。群同変性分岐理論を用いると、球面のような非常に対称性の高い解から分岐する、少し対称性の低い解の族を捕らえられると期待される。解に群同変性を仮定する事で、解析を行う関数空間を絞れ、偏微分方程式が多少とも簡略化されるからである。

本研究では、ヘルフリッヒ変分問題の軸対称性を必ずしも持たない解を発見した。また、対応する勾配流の研究を行った。

２．研究組織

本研究は、本学の３名の教員により、以下のような役割分担によって遂行された。

長澤壯之	（理学部・教授）	研究の総括及び幾何学変分問題の総合的研究（[3, 6]）
小池茂昭	（理学部・教授）	粘性解の研究（[4, 5]）
太田雅人	（理学部・助教授）	非線形発展方程式論の研究（[7, 8]）

また、これ以外に

高坂良史	（室蘭工業大学・講師）	ヘルフリッヒ流の研究（[3]）

に研究協力者として加わって頂いた。

３．研究成果

研究代表者によるものについて述べる。本研究以前に、軸対称分岐解の存在とその安定性について結果を既に得ていた（[6]）。非軸対称分岐解の存在の有無を調べるための既約分岐方程式を導いた。更に、その標準形を決定し、モードが 2 または 4 の場合の既約分岐方程式の解をすべて決定した。これらを摂動することで分岐方程式の解が構成できる。その結果、モード 2 の解は、従来知られていた軸対称性を持つ解のみである事が分かった。モード 4 の解には、軸対称性（$SO(2)\oplus\mathbb{Z}_2^c$-不変性）を持つものと、正八面体群 $\mathbb{O}\oplus\mathbb{Z}_2^c$ に関して不変なものの２種が存在する事を示し、かつ、この２種のみである事も示された。非軸対称解の安定性については、未解明である。

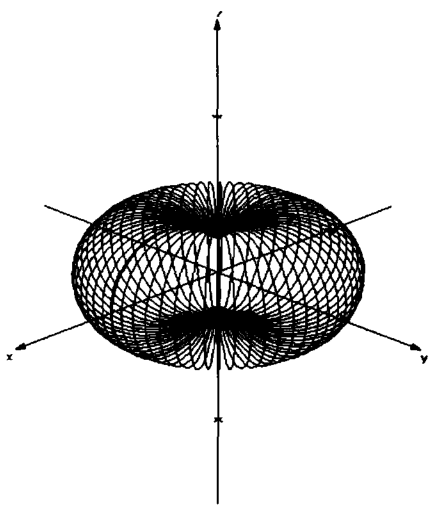

図 1: モード 2 の軸対称解

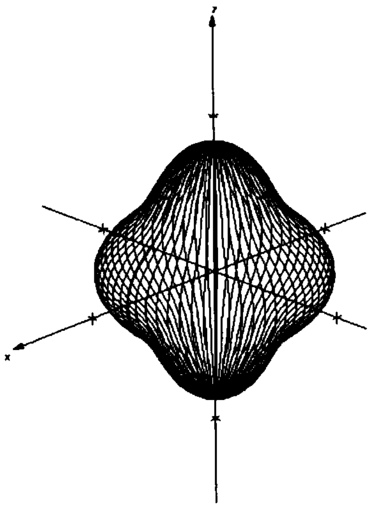

図 2: モード 4 の軸対称解

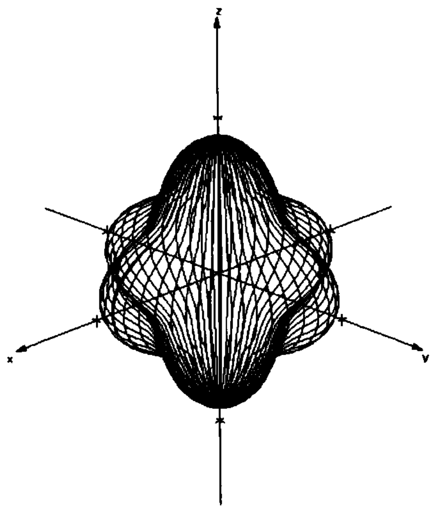

図 3: モード 4 の非軸対称解

また、変分問題の解を解析する手段として、勾配流の方法がある。研究協力者の高坂と共同で、ヘルフリッヒ変分問題に対する勾配流を研究し、(1) 時間局所解の一意存在、(2) 球面近傍での大域解の存在、(3) 球面近傍での中心多様体の存在 を示した ([3])。

4．研究集会の企画

研究代表者は、「曲面と曲線の非線型解析」という研究集会を企画し、その運営に本研究費の一部を使用した。研究集会では、本研究やそれに関連した最新の成果に関する 10 の講演があった。それらに基づき、討論、研究連絡が行われ、本研究に大きく寄与する事となった。開催場所・日時・講演等は、以下の通りである。

日時 2004 年 12 月 16～18 日

場所 埼玉大学大宮ソニックシティカレッジ

講演	川久保 哲（福岡大理）	３次元空間形内の Kirchhoff 弾性棒
	剱持 勝衛（東北大理）	平均曲率を保つ周期的回転超曲面の変形について
	阪本 邦夫（埼玉大理）	法曲率テンソルに関する変分問題について
	岡部 真也（東北大理）	囲む面積が一定な平面弾性閉曲線の運動
	渡辺 宏太郎（防衛大）	弾性エネルギーの変分問題とラプラシアンの固有値問の関連について
	村井 実（龍谷大理工）	回転数一定の場合の最小曲率エネルギー曲線方程式の大域的解構造
	高坂 良史（室蘭工大）	Linearized stability analisys of three phase boundary motion by surface diffusion
	長澤 壯之（埼玉大理）	Helfrich 変分問題の非軸対称解
	立川 篤（東京理科大理工）	Harmonoc maps into Finsler manifolds
	坂元 国望（広島大理）	Curvature flows and reaction-diffusion systems on manifold

参考文献

[1] E. A. Evans, *Bending resistance and chemically induced moments in membrane bilayers*, Biophys. J. **14** (1974), 923–931.

[2] W. Helfrich, *Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible experiments*, Z. Naturforsch **28c** (1973), 693–703.

[3] Kohsaka, Y. & T. Nagasawa, *On the existence of solutions of the Helfrich flow and its center manifold near spheres*, to appear in Differential Integral Equations.

[4] 小池茂昭, 儀我美一, 「粘性解による値関数の特徴づけ」, システム/制御/情報 (システム制御情報学会) **49** (1) (2005), 2–7.

[5] Koike, S. & A. Swięch, *Maximum principle and existence of L_p-viscosity solutions for fully nonlinear, uniformly elliptic equations with measurable and quadratic terms*, Nonlinear Differential Equations and Applications **11** (4) (2004), 491–509.

[6] Nagasawa, T. & I. Takagi, *Bifurcating critical points of bending energy with constraints related to the shape of red blood cells*, Calc. Var. Partial Differential Equations **16** (1) (2003), 63–111.

[7] Kubo, H. & M. Ohta, *On systems of semilinear wave equations with unequal propagation speeds in three space dimensions*, Funkcial. Ekvac. **48** (2) (2005), 65–98.

[8] Ohta, M. & G. Todorova, *Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations*, Discrete and Contin. Dyn. Syst. **12** (2) (2005), 315–322.