平成 18 年度総合研究機構研究プロジェクト研究成果報告書

代数曲線の有理関数と双有理幾何の研究

(Rational functions of algebraic curves and birational geometry)

所属・職名　大学院理工学研究科・教授

(Graduate School of Science and Engineering/Professor)

代表者　酒井文雄

(Fumio SAKAI)

研究成果

次数 d の既約平面曲線の C 上の有理関数 φ は C の非特異モデル $\tilde{C}$ からの正則写像 $\varphi : \tilde{C} \to \mathbf{P}^1$ を誘導する．C のゴナリティ G は，このような写像の最小の写像度として，定義される．双有理不変量 G はどのようにして計算されるのであろうか．定義により，$G=2$ となるのは C が超楕円曲線か楕円曲線の場合に限る．さて，C の特異点の最大重複度を ν とするとき，C は (d,ν) 型であるということにする．このとき，不等式 $G \leq d-\nu$ が成立することは簡単にわかる．論文 1 において，等式 $G = d-\nu$ が成立するための十分条件を二種類証明した．本研究により，$G < d-\nu$ の場合に，G の下からの評価式を二種類証明した．以下に，これらの結果を述べる．

2 次関数

$$Q(x) = x(x-d) + d + \delta - \nu,$$

を定義する．ここで，δ は C の種数 g が $g = (d-1)(d-2)/2 - \delta$ と表される不変量である．

定理 1 (d,ν) 型既約平面曲線 C に対して（$d/\nu \geq 2$），$q = Q([d/\nu]), q^* = Q([d/\nu]+1)$ とおく．このとき，

(i) $q \leq 0$ の場合，等式 $G = d-\nu$ が成立する．
(ii) $q \geq 1$ の場合，下からの評価式 $G \geq d - \nu - q$ が成立する．
(iii) $q^* \geq ([d/\nu]-1)\{([d/\nu]+1)\nu - d\}$ であれば，不等式 $G \geq d-\nu-q^*$ が成立する．

注意 1 評価式 (ii) (iii) は $q < d-\nu-1$ や $q^* < d-\nu-1$ のときに意味がある．$\nu \geq 3$ あるいは $\nu \not| \, d$ のときに，(iii) は (ii) の評価を改良する可能性がある．実際，2 次関数 $Q(x)$ は $0 \leq x \leq d/2$ において，単調関数なので，もし，$\nu \geq 3$ であれば，$q^* < q$ である．

ゴナリティ G に対するもう一つの評価式を述べる．$m_1,\ldots,m_n$ を C の特異点の重複度とする．この中には，無限小近傍の特異点も含めるとする．ここでは，$[m_1,\ldots,m_n]$ を C の全重複度列とよぶことにする．次の不変量を定義する：

$$\eta=\sum_{i=1}^{n}(m_i/\nu)^2$$

また，i 番目に大きい重複度を ν_i で表して，次の副次的な不変量を定める．

$$\sigma=(\nu_2/\nu)+(\nu_3/\nu)+(\nu_4/\nu).$$

次の関数を用意する．

$$\begin{aligned}
h(\eta,\nu,q)&=\frac{\eta}{2(1+q/\nu)}+\frac{1+q/\nu}{2},\\
g(\eta,\nu,q)&=\frac{\sqrt{\eta}+\sqrt{\eta-4/\nu}+2}{2}-\frac{2(q/\nu)}{\sqrt{\eta}+\sqrt{\eta-4/\nu}-2},\\
f_3(\eta,\nu,q)&=\frac{3\sqrt{\eta}-(1+1/\nu+q/\nu)}{2},\\
f_2(\eta,\nu,q)&=2\sqrt{\eta}-(1+1/\nu+q/\nu).
\end{aligned}$$

さらに，$k=2,3$ について，$\chi_k(\eta,\nu,q)=\max\Big\{h(\eta,\nu,q),\min\big\{f_k(\eta,\nu,q),g(\eta,\nu,q)\big\}\Big\}$ とおく．

定理 2 C を (d,ν) 型の既約平面曲線とする．条件 $\eta\geq 4/\nu$ を仮定する．非負整数 q に対して（$q<d-\nu-1$），下記のそれぞれの場合に下からの評価式 $G\geq d-\nu-q$ が成立する．

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & d/\nu>\chi_3(\eta,\nu,q)\ \text{かつ}\ d/\nu\ \geq\ \sigma-q/\nu,\\
\text{(ii)} & d/\nu>\chi_2(\eta,\nu,q).
\end{array}$$

注意 2 $\chi_3\leq\chi_2$ であるので，付加条件 $d/\nu\geq\sigma-q/\nu$ が満たされている場合には，(i) は (ii) より良い評価式である．例外 $\eta<4/\nu$ は (a) $\nu=2,\eta=3$ （C が重複度 2 の特異点を 3 個持つ），あるいは (b) $\nu=3,\eta=1$ （C は重複度 3 の特異点を 1 個持つ）の場合のみに起こる．(a) のとき，$G=d-2$ $(d\geq 5)$，$=1$ $(d=4)$ であり，(b) のとき，$G=d-3$ が成立する．

参考文献

1. M.Ohkouchi and F.Sakai, The gonality of singular plane curves, Tokyo J. Math., **27**, 137 - 147 (2004)
2. F.Sakai, Lower bounds for the gonality of singular plane curves, 第三回代数幾何シンポジウム報告集, Chuo Univ., 114-123 (2006).
3. F.Sakai, On the gonality of singular plane curves, 2006 代数幾何学シンポジウム報告集, 32-48 (2007)
4. F.Sakai, Lower bounds for the gonality of singular plane curves, Preprint