

平成 19 年度 総合研究機構研究プロジェクト「若手研究及び基礎研究」

粘性解理論とその先端的応用 (A-07-86)

プロジェクト代表者 小池 茂昭 (理工学研究科・教授)

【研究の目的】

1996 年に導入された L^p 粘性解の概念を用いて古典的な強解の regularity 理論に対応する理論の構築を目指す。

一方、粘性解の regularity を高める事は数理ファイナンスを含む最適制御理論の最適制御 (最適ポリシー) の構成に密接に関係しており、理論の進展が直接応用に結びつく。本研究の先端的応用としては、数理ファイナンスに現われる最適停止時刻問題の粘性解の構成と regularity を高める事による最適ポリシーの構成である。

【研究の進め方】

本研究は理論と応用で別の共同研究者と行った。数学の共同研究の進め方は、技術の進歩に比べ古典的である。基本的にはメールにより研究打合せを行い、最終的には実際に討論してまとめあげる。これは、個々の研究者自身が特殊技能を持った“実験装置”である事に由来し、お互いの特殊技能を交換するためにはメールという間接的な方法より、詳細な技術交換を行える実際の口頭による討論が極めて重要である。

粘性解理論に関しては、 L^p 粘性解の創始者の一人である A. Świąch (ジョージア工科大学教授・米) と共同研究を行った。2007 年 6 月には日本に招聘し、2008 年 1 - 2 月に Atlanta を訪問して研究打合せを重ねた。また、研究成果は下記のように多くの研究集会や、regularity の第一人者である L. A. Caffarelli (テキサス大学オースティン校教授・米) 主催のセミナーでも発表した。

最適停止時刻問題に関しては、森本宏明 (愛媛大学教授)・坂口茂 (当時・愛媛大学教授) と共同研究を行った。2007 年の「粘性解生誕 25 周年国際研究集会 (東京大学)」(小池ほか組織委員) の際に、両者と研究打合せをした。

研究の成果

粘性解理論に関しては、Świąch との共同研究で得た最大値原理を発展させ、弱 Harnack 不等式および境界弱 Harnack 不等式を構築した。この応用として、大域的ヘルダー連続性、強最大値原理、強解の存在定理を導いた。この研究は論文としてまとめ、現在投稿中である。

上記の応用の最後の「強解の存在」を用いて、小池研究室の博士後期課程学生 (中川和重) が更に複雑な完全非線形方程式の最大値原理を導いた。

森本・坂口との共同研究では、数理ファイナンスに現われる非線形変分不等式の粘性解を構成し、その regularity を高める事で最適ポリシーを構成した。現在は、この研究の非定常版 (放物型非線形変分不等式) を共同研究している。

《論文》

- [1] S. KOIKE, Maximum principle via the iterated comparison function method, 数理解析研究所講究録 1545 「微分方程式の粘性解理論とその発展」(2007年4月), 1-12.
- [2] S. KOIKE, Perron-Ishii method for viscosity solutions, 数理解析研究所講究録 1553 「ポテンシャル論とその関連分野」(2007年5月), 44-58.
- [3] S. KOIKE, H. MORIMOTO AND S. SAKAGUCHI, A linear-quadratic control problem with discretionary stopping, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, series B*, 8巻2号(2007年), 261-277.
- [4] S. KOIKE & A. ŚWIĘCH, Maximum principle for fully nonlinear equations via the iterated comparison function method, *Mathematische Annalen*, 339巻(2007年), 461-484.
- [5] 小池茂昭「数理ファイナンスに現れる偏微分方程式」, これからの非線型偏微分方程式, 日本評論社, 小園英雄編, 2007年, 151-168.

《研究集会での講演》

- [i] The ABP maximum principle for fully nonlinear equations with unbounded coefficients, Analysis seminar at University of Texas at Austin, 10 September 2007.
- [ii] The maximum principle for fully nonlinear PDEs with unbounded coefficients, Analysis seminar at Università di Roma “la Sapienza”, 1 October 2007.
- [iii] Maximum principle and its applications for fully nonlinear PDEs, Analysis seminar at Università di Roma “Tor Vergata”, 9 October 2007.
- [iv] Weak Harnack inequality for fully nonlinear elliptic PDEs with unbounded ingredients, 9-11 January 2008, 「非線形偏微分方程式とその応用」Kobe University.
- [v] 完全非線形方程式の粘性解の弱ハルナック不等式, 2008年3月8日, 熊本大学偏微分方程式セミナー
- [vi] 粘性解の弱ハルナック不等式とその応用, 2008年3月19-20日, Mini-Workshop「KAM理論と粘性解」, 福岡大学
- [vii] 非有界係数をもつ完全非線形方程式の L^p 粘性解の弱 Harnack 不等式, 2008年3月23-26日, 日本数学会年会, 近畿大学
- [viii] 完全非線形方程式の L^p 粘性解の弱ハルナック不等式, 2008年3月29-30日, Sapporo Guest House Symposium on Mathematics, Final “Nonlinear Partial Differential Equations” 札幌天神山ゲストハウス