

平面代数曲線の特異点と有理関数体の研究

(Singularities and Rational functions on plane algebraic curves)

所属・職名 大学院理工学研究科・教授

(Graduate School of Science and Engineering/Professor)

代表者 酒井文雄

(Fumio SAKAI)

研究成果

次数が d で特異点の最大重複度が $d-2$ である平面代数曲線を $(d, d-2)$ 型であるという。 $(d, d-2)$ 型の有理尖点曲線については、フレナー・ザイデンベルグ氏の行った研究、および、研究代表者と戸野恵太氏との共同研究で分類が完成している。構成は射影直線に退化型の 2 次クレモナ変換をくり返してを変換することによる。研究代表者と当時博士後期課程の大学院生であった M.Saleem 氏は、この結果を任意の特異点を許した $(d, d-2)$ 型の有理平面曲線に拡張した。平成 19 年度総合研究機構研究プロジェクト研究において、研究代表者の酒井は、M.Saleem 氏、戸野恵太氏との共同研究により、上記 $(d, d-2)$ 型の平面有理曲線の分類結果を、正種数 g を持ち、任意の特異点を許す $(d, d-2)$ 型の特異平面曲線に拡張した。まず、これらの平面曲線の特異点の数値型を分類して、その数値型を実現する曲線の構成法の帰納的なアルゴリズムを得た。次に、そのような平面曲線はクレモナ変換により、標準的な平面超楕円曲線に変換されることを示した。主結果は下記の通りである。ここでは、平面曲線 C の各特異点 P に対して、記号 $m_P(C)$ で P における重複度列系を表し、特異点の重複度列系を列記したものを $\text{Data}(C)$ で表している。省略記号、

$$(2_a) = (\overbrace{2, \dots, 2}^a, 1, 1), \quad (2_0) = (1), \quad \binom{1}{1}_a = \overbrace{\binom{1}{1} \cdots \binom{1}{1}}^a.$$

なども用いる。

定理 1 C を種数 g の $(d, d-2)$ 型の平面曲線とし、重複度 $d-2$ の特異点を $Q \in C$ で表す。このとき、下記の結果が成立する。

$$(i) \text{Data}(C) = \left[m_Q(C), \binom{1}{1}_{b_1}, \dots, \binom{1}{1}_{b_n}, (2_{b_{n+1}}), \dots, (2_{b_{n+n'}}) \right],$$

ただし,

$$\underline{m}_Q(C) = \left\{ \left(\begin{array}{c} k_1 \\ k'_1 \\ \vdots \\ k_s \\ k'_s \\ k_{s+1} \\ \vdots \\ k_N \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (1) \\ (1)_{a_1} \\ \vdots \\ (1)_{a_s} \\ 2a_{s+1} \\ \vdots \\ 2a_N \end{array} \right) \right\}.$$

であって, 次の条件が成立している (N は Q における C の異なる接線の個数である).

- (1) $\sum_{h=1}^N k_h + \sum_{h'=1}^s k'_{h'} = d-2$ かつ $\sum_{i=1}^N a_i + \sum_{j=1}^{n+n'} b_j = d-g-2$ である. ただし $j = 1, \dots, s$, $b_j > 0$, について, $a_i \geq 0$ ($a_i > 0$ である).
- (2) $n, n', s \geq 0$ かつ $n' + s' \leq 2g + 2$ である. ここで, $s' = \#\{j | a_{s+j} > 0\}$ とした.
- (3) $i = 1, 2, \dots, s$ に対して, もし, $k'_i = k_i$ ならば, $a_i \geq k_i$ であり, もし, $k'_i > k_i$ ならば, $a_i = k_i$ である.
- (4) $i = s + 1, \dots, N$ について, もし, $a_i > 0$ ならば, k_i が偶数で $a_i \geq k_i/2$ を満たすか, k_i が奇数で, $a_i = (k_i - 1)/2$ である.

(ii) $\text{Data}(C)$ は デグチャーレフ氏の 2-公式 $T(C)$ によって記述される.

定理 2 種数 g の $(d, d-2)$ 型既約平面曲線 C に対して, C を平面曲線

$$\Gamma : y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - \lambda_i),$$

に写すクレモナ変換が存在する. 逆に, 平面曲線 Γ と $d \geq g + 2$ を満たす d および, 条件 (1)–(4) を満たす重複度列系の組 M が与えられれば,

- (a) $\text{Data}(C) = M$,
- (b) C は Γ にクレモナ双有理である.

となる $(d, d-2)$ 型既約平面曲線 C が存在する.

参考文献

1. F.Sakai and M.Saleem, Rational plane curves of type $(d, d-2)$, Saitama Math. J., 22, 11–34, 2004
2. F.Sakai and M.Saleem, Elliptic and hyperelliptic plane curves of type $(d, d-2)$, Abstracts of short communications, International Congress of Mathematicians Madrid 2006, 262–262, 2007
3. F.Sakai, M.Saleem and K.Tono, Hyperelliptic plane curves of type $(d, d-2)$, Preprint.