

# 汎用的な自動定理発見ツールの実現と応用

プロジェクト代表者：後藤 祐一  
(理工学研究科・数理電子情報部門・助教)

## 1 背景と目的

自動定理発見とは、予め与えられた定理を自動的に証明することではなく、計算機を用いて新しい定理を自動的に発見することである。自動定理発見問題は、自動定理発見の一般的な方法を求めるという問題であり、1988年ごろ自動定理証明の大家であるアメリカのWos博士により提示された世界的に知られている難問である [Wos, Automated Reasoning 33 Basic Research Problems, 1988]。自動定理発見は自動定理証明と異なり、予めゴール、すなわち発見すべき定理を定めることができないため、証明では行うことができず、推論を用いるしかない。「推論」とは、与えられた前提（既知の事実あるいは仮定）に推論規則を適用して未知の新しい結論を導出する過程のことである。一方、「証明」とは、あらかじめ明確に与えられた結論（言明あるいは仮説）に対して、与えられた前提からその結論へ至る論理的道筋を見つけ出す過程のことである。推論と証明の本質的な違いは、証明は証明しようとする物事（ゴール）があらかじめ既に定まっていることに対して、推論は推論すべき物事（ゴール）があらかじめ定まっていないことにある。

1995年にCheng博士によって強相関論理に基づく帰結演算を用いた自動定理発見の理論的基礎と方法が提案された [Cheng, Entailment Calculus as the Logical Basis of Automated Theorem Finding in Scientific Discovery, 1995]。Cheng博士のアプローチの特徴は、推論の妥当性を基礎付ける論理体系とそれぞれの分野の定義や公理、定理、また、それら二つを入力として受け取り入力された論理体系に従いそれぞれの分野の公理や定理から新たな定理の導出を行う前向き演繹プログラムを明確に分離した点にある。Cheng博士は、前向き演繹の妥当性を基礎付ける論理体系として強相関論理を、また、前向き演繹の方法として前向き帰結演算を選んだが、一般的には、定理発見を行いたい分野や演繹の妥当性、何の関係（条件関係、連言関係など）に着目して前向き演繹を行うかは定理発見の実行者によって異なると考えられる。

本研究では、実行者が妥当と思う論理体系と定理発見を行いたい分野の公理や定理、また、何の関係に着目して演繹を行うかを表した推論規則を入力として自由に与えられる前向き演繹プログラムを用意し、汎用的にかつ、統一的な手法により自動定理発見を行うツールを開発する。

## 2 研究内容と成果

平成19年度は、汎用的な自動定理発見ツールの中心的な機能である汎用前向き演繹プログラムの開発と高速化を試みた。形式論理における統語論の観点からすると、ある論理体系は、論理式を構成する語彙、論理式の構成規則、公理、そして、推論規則を定めることにより定義することができる。また、演繹推論、帰納推論、仮説生成推論も、どんな前提からどんな結論を導出するのかという観点からとらえれば推論規則としてこの3つを表現することができる。つまり、利用者が自由に論理式を構成する語彙、論理式の構成規則、公理、そして推論規則の違いを定義することができる前向き演繹プログラムであるならば、任意の論理体系で前向き演繹を行うことができる。この基本的なアイデアに基づき、論理式を構成する語彙、論理式の構成規則、公理、そして、推論規則を入力として自由に与えられるようにすることで任意の論理体系や形式理論、また演繹推論、単純帰納推論、単純仮説生成推論を行うことができる汎用前向き推論エン

ジンFreeEnCalの提案と開発を行った [公表論文1]。また、自動定理発見ツールを実現するためには、Free EnCalはできる限り短い時間で多くの結論を導出しなければならない。そこで、開発したFreeEnCalの処理アルゴリズムを見直し、処理の高速化を試みた（この成果についての外部発表はまだない）。

### 3 今後の課題

今後の課題は、大きく分けて FreeEnCal の汎用性の改善、処理速度の向上、そして FreeEnCal を用いた自動定理発見の事例研究の 3 つに分けられる。現在の FreeEnCal は、演繹推論、単純帰納推論、そして単純仮説生成推論を行うことができる。しかし、自動定理発見においては、単純帰納推論や単純仮説生成推論だけでは不十分な可能性がある。そこで、FreeEnCal を用いて帰納推論や仮説生成推論を行う方法およびシステムを構築する必要がある。また、現在は論理体系や形式理論を表現する形式システムとしてヒルベルト流の公理システムしか用いることができない。一方、論理体系や形式理論を表現するための形式システムとしてはゲンツェンの自然演繹システムとシーケント計算システムもよく利用されている。汎用的な自動定理発見ツールを実現するためには、FreeEnCal はヒルベルト流の公理システムだけでなく、ゲンツェンの自然演繹システムとシーケント計算システムにも対応しなければならない。また、多くの数学の分野においては命題の定義に数学的帰納法が利用されている。数学的帰納法で定義された命題を論理式で表現するためには二階レベルの述語が扱えなければならない。現在の FreeEnCal は一階述語までにしかな対応していないため二階レベルの述語を扱えるように拡張しなければならない。

現在、FreeEnCal の処理アルゴリズムを見直すことで処理速度の向上を図っているが、更なるアルゴリズムの改良や並列処理による処理の高速化が必要である。

また、FreeEnCal を用いた自動定理発見の事例研究として公理的集合論の一種である Von Neumann–Bernays–Gödel 集合論 (NBG 集合論) において定理の発見を試みる予定であるが、このためにすでに証明済みの定理の収集とデータベース化、FreeEnCal を用いた定理発見プロセスの考案とその（部分）自動化を行う必要がある。

### 4 公表論文

1. Jingde CHENG, Shinsuke NARA, and Yuichi GOTO: FreeEnCal: A Forward Reasoning Engine with General-Purpose, in B. Apolloni, R. J. Howlett, and L. C. Jain (Eds.), "Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems, 11th International Conference, KES 2007, XVII Italian Workshop on Neural Networks, Vietri sul Mare, Italy, September 12-14, 2007, Proceedings, Part II," Lecture Notes in Artificial Intelligence (Subseries of Lecture Notes in Computer Science), Vol. 4693, pp. 444-452, Springer-Verlag, September 2007.