超曲面に対する
幾何学的発展方程式に関する研究

(課題番号：15540195)

平成１５年度～平成１６年度 科学研究費補助金（基盤研究（C）（2））
研究成果報告書

平成１７年３月

研究代表者　長澤 壯之
(埼玉大学理学部教授)

はしがき

曲面の平均曲率の２乗積分はウィルモア汎関数と呼ばれる。この量は、純粋に幾何学的なものと思われがちであるが、赤血球の形態変換の数理モデルにも現れ、実に興味深いものである。

超曲面をその幾何学的な量から決定される方向に変形させる事を考える。変形は時刻と共に進むものとし、これを記述する方程式を幾何学的発展方程式と呼ぶ。

どのような量が変形の方向を定めるかは、幾何学的に十分意味のあるものでなくてはならない。そこで、超曲面の族に定義される汎関数に対する勾配流を考える。一般に汎関数が与えられたとき、その臨界点が解析の対象となる。臨界点を直接求められればよいのだが、一般には容易ではない。勾配流は、汎関数の最急傾斜の方向に汎関数値を減らすように対象を変形させるもので、臨界点を求める一つの方法である。

文頭にあげたウィルモア汎関数は、幾何学的発展方程式を考える際にもっとも重要なものと思われる。ウィルモア汎関数に対する勾配流は **ウィルモア流** と呼ばれる。赤血球の形態変換に現れる問題は、曲面の面積と囲む体積を指定し、その制約条件下でウィルモア汎関数を最小化せよというものである。これは、モデルの提唱者の名を採って、**ヘルフリッヒ変分問題** と呼ばれ、対応する勾配流を **ヘルフリッヒ流** という。

本研究では、研究代表者によって、ヘルフリッヒ流の存在や、その中心多様体などの力学系的性質が調べられた。さらに、ヘルフリッヒ流の定常解（**ヘルフリッヒ曲面**）の、制限つき極値問題の停留点としての安定性が調べられた。また、研究分担者によって、その周辺の関連する非線形問題が取り扱われた。

本研究に対する科学研究費は、上記の研究の遂行に用いられたが、その他に、研究代表者は、「曲面と曲線の非線型解析」という研究集会を企画し、その運営に本研究費の一部を使用した。研究集会では、本研究やそれに関連した最新の成果に関する 10 の講演があった。。それらに基づき、討論、研究連絡が行われ、本研究に大きく寄与する事となった。講演者の方々には、この場を借りて御礼申し上げる。

科学研究費補助金（基盤研究（C）（2））研究成果報告書

研究課題

超曲面に対する幾何学的発展方程式に関する研究

課題番号

15540195

研究組織

研究代表者 長澤 壯之（埼玉大学・理学部・教授）

研究分担者 小池 茂昭（埼玉大学・理学部・教授）

研究分担者 阪本 邦夫（埼玉大学・理学部・教授）

研究分担者 太田 雅人（埼玉大学・理学部・助教授）

研究分担者 下川 航也（埼玉大学・理学部・助教授）

研究分担者 高木 泉 （東北大学・大学院理学研究科・教授）

研究分担者 柳田 英二（東北大学・大学院理学研究科・教授）

研究分担者 有澤 真理子（東北大学・大学院情報科学研究科・助教授）

研究分担者 高坂 良史（室蘭工業大学・工学部・講師）

研究分担者 立川 篤（東京理科大学・理工学部・教授）

研究経費

平成 15 年度　900 千円

平成 16 年度 1,200 千円

計　2,100 千円

研究成果

研究代表者及び研究分担者ごとにまとめた研究成果は、次の通りである。

長　澤　壯　之

研究概要

(1)　赤血球の形状は、ウィルモア汎関数を適当な制約条件下で極小にする曲面として与えられると考えられており、微分幾何学の問題としても興味深い。このテーマを高木 泉（東北大）と共同で1992年度以降研究し、球面からの分岐解の存在の厳密な証明を与え、分岐解の安定性を解析した。その結果、モードの一番低い分岐解について、分岐パラメーターと自発性曲率の組み合わせで安定性・不安定性が入れ替わる事が分かった。退化次数・指数も計算も出来た。その他のモードの分岐解については、安定でない事も分かり、退化次数・指数の上下からの評価を与える事が出来た。

(2)　この変分問題に付随する勾配流はヘルフリッヒ流と呼ばれる。室蘭工業大学の高坂良史と共同でヘルフリッヒ流について研究した。その結果、高木と示したモードの一番低い解が分岐する場所における中心多様体の次元が 10 である事が分かった。分岐パラメータと平行移動、相似変換の分を取り除いてもなお 5 次元ある。この研究を論文にまとめた。本報告書に付録として添付する。

(3)　(1) で得られた評価は、モードが比較的低い場合には、直接計算が可能であり、上下の評価が一致する事も確かめられる。モードが高くなると評価の数値を具体的に計算することは困難になる。2003年度になってから、安定の解析が表現論に現れるクレブシュ・ゴルダン係数の挙動を調べることに関連する事を見出した。クレブシュ・ゴルダン係数が満たす差分方程式を求め、それにより係数のある漸近展開を調べることにより、分岐解の対価次数・不安定指数の評価を行った。クレブシュ・ゴルダン係数が満たす差分方程式の導出と漸近展開の部分は、本報告書に付録として添付する。

(4)　必ずしも軸対称でない分岐解の存在の有無を調べるために、対称性を仮定せずに、モードが偶数の場合の既約分岐方程式を導いた。この方程式を導く過程で、多様体上の関数のヘシアンに関するある積分公式を示した。方程式の係数は、クレブシュ・ゴルダン係数によって決定する。そのため、係数の計算において、クレブシュ・ゴルダン係数が満たす差分方程式が重要な役割を演じた。既約分岐方程式の解を摂動して、分岐方程式の解を構成するためには、陰関数定理を用いるのが通常である。定理が適用するためには、何らかの非退化条件が必要である。しかし、本問題では、回転による不変性のため、非退化条件が常に成立しない。この困難さを回避するため、回転によって移りあう解を同一視するような変換を施

し、規約分岐方程式を簡略化する事が必要である。モードが 2 と 4 の場合には、それが可能であり、分岐方程式の解が構成する事が出来た。この方法は、モードが 6 以上でもある対称性の仮定の下では実行可能である。

なお、本研究費を用いて、平成 16 年 12 月に「曲面と曲線の非線型問題」と題する研究集会を主催し、研究発表、討論の場を設けた。付録に、その際のプログラムを添付する。

論文・著書

1. On the existence for the Helfrich flow and its center manifold near spheres (with Y. Kohsaka), preprint.

口頭発表・講演

1. Clebsch-Gordan 係数のある漸近展開と Helfrich 変分問題の安定性解析への応用, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 東京大学, 2003 年 12 月 24 日.

2. Stability analysis of Helfrich surfaces via asymptotic formulae of Clebsch-Gordan coefficients, Workshop: Submanifolds Sendai 2004, 東北大学, 2004 年 2 月 17 日.

3. Stability analysis of Helfrich surfaces via asymptotic formulae of Clebsch-Gordan coefficients, 室蘭工業大学 2004 年度第 4 回数理科学談話会, 室蘭工業大学, 2004 年 9 月 1 日.

4. Helfrich 変分問題と Clebsch-Gordan 係数の関わり, Workshop on BV functions and free boundary problems (有界変動関数と自由境界問題に関する研究会), ホテル・エーデルワイス, 2004 年 10 月 10 日.

5. Helfrich 変分問題と Clebsch-Gordan 係数の関わり, 大阪大学微分方程式セミナー, 大阪大学, 2004 年 10 月 22 日.

6. Helfrich 変分問題と Clebsch-Gordan 係数の関わり, 研究集会「多様体上の微分方程式」, 金沢大学サテライト・プラザ, 2004 年 12 月 8 日.

7. Helfrich 変分問題の非軸対称解, 研究集会「曲面と曲線の非線型解析」, 埼玉大学大宮ソニックシティカレッジ, 2004 年 12 月 17 日.

8. Helfrich 変分問題の非軸対称解, 研究集会「曲面と曲線の変分問題と発展方程式」, 湯沢グランドホテル, 2005 年 2 月 18 日.

9. Helfrich 変分問題の非軸対称解, 東京大学応用解析セミナー, 東京大学, 2005 年 2 月 24 日.

小 池 茂 昭

研究概要

(1) 可測係数・可測非斉次項・Du について２次の増大度をもった非発散型２階楕円型方程式の L^p 粘性解の ABP 型最大値原理が成り立つ十分条件を与え、その仮定の下でヘルダー連続性及び、存在定理を導いた。

(2) 数理ファイナンスに現れる obstacle 問題の粘性解の regularity を求め、フィードバック制御を構成した。

(3) 修正 Perron の方法を開発し、L^p 粘性解の Perron 解のヘルダー連続性を示した。

論文・著書

1. Variational inequalities for leavable bounded-velocity control (with H. Moromoto), *Appl. Math. Optim.* **48** (1) (2003), 1–20.

2. Maximum principle and existence of L^p-viscosity solutions for fully nonlinear (with Swięch), uniformly elliptic equations with measurable and quadratic terms, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **11** (4) (2004), 491–509.

3. Optimal consumption and portfolio choice with stopping (with H. Morimoto), submitted.

4. “A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions”, *MSJ Memoirs* **13**, Japan Math. Soc., Tokyo, 2004.

5. 粘性解による値関数の特徴づけ (儀我美一氏と共著), システム/制御/情報 (システム制御情報学会) **49** (1) (2005), 2–7.

6. 数理ファイナンスに現れる偏微分方程式, 第一回非線形偏微分方程式研究集会報告集, 投稿中.

7. Perron's method -revisited-, 数理解析研究所講究録「微分方程式の粘性解とその発展」, 準備中.

8. ペロンの方法 -revisited-, 「偏微分方程式と現象」研究集会報告集, 準備中.

口頭発表・講演

1. 二次の非線形項を持った完全非線形偏微分方程式の L^p 粘性解の存在, 日本数学会 2003 年度秋季総合分科会, 函数方程式分科会・特別講演, 千葉大学, 2003 年 9 月 24–27 日.

2. Existence of L^p viscosity solutions of fully nonlinear PDEs, 熊本大学応用解析セミナー, 熊本大学, 2003 年 10 月 11 日.

3. Some estimates on solutions of nonlinear PDEs arising in mathematical finance, 科学研究費シンポジウム, 大阪大学, 2003 年 10 月 31 日 – 11 月 1 日.

4. 数理ファイナンスに現れる非線形偏微分方程式, 第 1 回非線形偏微分方程式研究集会, 由布院ホテル, 2004 年 3 月 18–20 日.

5. L^p 粘性解とペロンの方法, 神楽坂解析セミナー, 東京理科大学理学部, 2004 年 6 月 26 日.

6. Perron's method -revisited-, 「微分方程式の粘性解理論とその展開」, 京都大学数理解析研究所, 2004 年 7 月 12–14 日.

7. ペロンの方法 -revisited-, 「偏微分方程式と現象」研究集会, 宮崎大学, 2004 年 11 月 19–21 日.

阪 本 邦 夫

研究概要

(1) 6 次元球面の極小曲面の曲率について、そのピンチングに関する Simon 予想を研究している。

(2) CR Weyl 構造と Fefferman 計量との関係を研究している。

論文・著書

1. Variational problems of normal curvature tensor and concircular scalar fields, *Tôhoku Math. J. (2)* **55** (2) (2003), 207–254

2. CR Einstein Weyl manifolds (with T. Ohkubo), to appear in *Tsukuba J. Math.*

口頭発表・講演

1. CR Einstein Weyl 構造について, 研究集会「微分幾何学とその応用」, 東京理科大学, 2004 年 9 月 11 日.

2. 法曲率テンソルに関する変分問題について, 研究集会「曲面と曲線の非線型解析」, 埼玉大学大宮ソニックシティカレッジ, 2004 年 12 月 16 日.

太 田 雅 人

研究概要

(1) 非線形クライン・ゴルドン方程式

$$\partial_t^2 u - \Delta u + u = |u|^{p-1}u$$

の定在波解 $e^{i\omega t}\varphi(x)$ の不安定性について、G. Todorova 氏 (Tennessee 大学、アメリカ合衆国) と共同研究を行なった。従来、基底状態に対して、臨界振動数の場合を除き、軌道安定性と不安定性が分類されていたが、軌道不安定性よりも強い意味での不安定性に関しては、$\omega = 0$ の場合を除いては知られていなかった。本研究では、軌道不安定であることが示されていた基底状態は、すべて強い意味で不安定であることを示した。また、臨界振動数の場合には、基底状態に対しても、軌道不安定性は分っていなかったが。本研究では、基底状態に限らず、球対称な定在波解はすべて強い意味で不安定であることを示した。さらに、プラズマ物理に現われるクライン・ゴルドン・ザハロフ方程式系に応用し、同様の結果を得た。

(2) ポテンシャルを含む非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u = -\Delta u + V(x)u - |u|^{p-1}u$$

の基底状態 $e^{i\omega t}\varphi(x)$ の安定性と不安定性について、福泉麗佳氏 (北海道大学) と共同研究を行なった。特に、臨界冪の場合を除き、振動数 ω が十分大きい場合には、ポテンシャルの影響が小さくなり、$V(x) = 0$ の場合に帰着できることを広いクラスのポテンシャルに対して示した。

(3) 異なる伝播速度をもつ半線形波動方程式系の初期値問題の小さいデータに対する解の時間大域存在と爆発について、久保英夫氏（大阪大学）と共同研究を行なった。久保氏との以前の共同研究により、空間3次元の強非線形相互作用系に対して、伝播速度が異なれば、常に小さいデータに対する解の大域存在が成り立つことが分っていた。これに対して、空間2次元の場合には、非線形項の次数が3以下の場合には、小さいデータに対しても解の爆発が起きることが分った。また、非線形項の次数が3より大きい場合には、小さいデータに対する解の大域存在が成り立つので、この結果は最適である。よく知られているように、3次元空間と異なり、2次元空間においては、ホイヘンスの原理が成り立たない。本研究は、この事実が非線形問題の解の大域的な性質に大きな影響を及ぼすことを明確にしたものである。

論文・著書

1. Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials (with R. Fukuizumi), *Differential Integral Equations* **16** (1) (2003), 111–128.

2. Instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials (with R. Fukuizumi), *Differential Integral Equations* **16** (6) (2003), 691–706.

3. Counterexample to global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds, *Funkcial. Ekvac.* **46** (3) (2003), 471–477.

4. Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations (with G. Todorova), *Discrete and Contin. Dyn. Syst.* **12** (2) (2005), 315–322.

5. On systems of semilinear wave equations with unequal propagation speeds in three space dimensions (with H. Kubo), to appear in *Funkcial. Ekvac.*

口頭発表・講演

1. Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations, Mini-symposium on NLS and Related Problems, 東京大学, 2003 年 5 月 17 日.

2. 非線形波動方程式系の解の爆発時刻の上からの評価について, 非線型波動方程式待兼山セミナー, 大阪大学, 2003 年 6 月 4 日.

3. 低次元空間における異なる伝播速度をもつ半線形波動方程式系について, 日本数学会 2003 年度秋季総合分科会, 千葉大学, 2003 年 9 月 25 日.

4. 異なる伝播速度をもつ 2 次元の半線形波動方程式系について, 宮代偏微分方程式研究集会, 日本工業大学, 2003 年 10 月 12 日.

5. Small data blowup for systems of nonlinear wave equations, Differential Equations and Mathematical Physics, A symposium for celebrating Professor ShigeToshi Kuroda's seventieth birthday, 東京大学, 2003 年 10 月 23 日.

6. Instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations in supercritical case, 神楽坂解析セミナー, 東京理科大学, 2003 年 11 月 22 日.

7. Strong instability of standing waves for Klein-Gordon-Zakharov equations, Session de printemps du GDR EAPQ a Toulouse, France, 2004 年 3 月 27 日.

8. Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations, 短期共同研究「非線形波動および分散型方程式に関する研究」京都大学数理解析研究所, 2004 年 5 月 27 日.

9. エネルギーから観た非線形発展方程式, 第 26 回発展方程式若手セミナー, 特別講演, 国民年金健康保養センター おくたま路, 2004 年 8 月 10, 11 日.

10. 非線形 Klein-Gordon 方程式の定在波解の不安定性について, 日本数学会 2004 年度秋季総合分科会, 函数方程式論分科会 特別講演, 北海道大学, 2004 年 9 月 22 日.

11. Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations, COE Symposium on "Nonlinear Dispersive Equations", 札幌コンベンションセンター, 2004 年 9 月 24 日.

12. 非線形クライン・ゴルドン方程式の定在波解の不安定性, 応用解析研究会, 早稲田大学, 2004 年 10 月 16 日.

下 川 航 也

研究概要

結び目及び絡み目のデーン手術の研究を行った。双曲絡み目のデーン手術で双曲多様体以外が得られる場合は、非常に限られることが知られている。結び目の場合はそれは有限になるため、その全てを数え上げることが問題となる。現在、Montesinos 結び目に付いて、その完全な理解を目指し研究を続けている。絡み目の場合には、その特徴付けの方法自体が難しい。今回の研究では、特に、デーン手術によって 3 次元球面に帰ってくる場合について、その手術スロープの制限等についての研究を行ってきた。

論文・著書

1. Tangle sum and constructible spheres (with M. Hachimori), *J. Knot Theory Ramifications* **13** (3) (2004), 373–383.
2. Essential laminations and branched surfaces in the exteriors of links (with M. Brittenham, Ch. Hayashi, M. Hirasawa & T. Kobayashi), to appear in *Japan. J. Math. (N. S.)* **31** (2005).

口頭発表・講演

1. 最近の Dehn surgery のいくつかの話題について, 結び目と多様体の幾何と代数 II, 甲南大学, 2003 年 9 月.
2. Tangle sum and constructible spheres, First KOOK Seminar International for Knot Theory and Related Topics, 淡路夢舞台国際会議場, 2004 年 7 月.
3. Culler-Shalen theory and A-polynomial, A多項式サマーセミナー, 東京工業大学, 2004 年 8 月.

高 木 泉

研究概要

この2年間は反応拡散系、特に Gierer と Meinhardt が提唱した活性因子－抑制因子系のダイナミクスを中心に研究した。生物の発生過程における形態形成はどのようなメカニズムによって制御されているのかという根本的な問題に対し、A. M. Turing は「拡散誘導不安定化」という斬新なアイデアを提出し、パターン形成の数理モデルの基礎を築いた。これは、単体では本来平坦化の過程である拡散が、拡散率が異なる二つの化学物質が反応する系では、空間的に一様な状態を不安定化し得るというものである。A. Gierer と H. Meinhardt は Turing の考えを発展させて、「短距離活性化と長距離阻害」という観点から反応拡散系のモデル方程式をつくり、シミュレーションによりパターンが形成されることを示した。Gierer-Meinhardt 系は、活性因子の線型拡散項、線型減衰項、非線型反応項及び抑制因子の線型拡散項、線型減衰項、非線型反応項から成る連立半線型放物型偏微分方程式である。これに斉次 Neumann 境界条件を課す。近年、Gierer-Meinhardt 系のスパイク状定常解が構成され、その安定性に関しても詳しい研究が行われた。しかし、非定常問題の解の挙動についての体系的な研究は少なかった。そこで、活性因子の非線型反応項が活性因子の斉次函数である場合に、次の二つの問題について研究を推進した。

(1)　拡散項を除いて得られる常微分方程式系は、反応拡散系の初期－境界値問題で初期値が定数値函数の場合に解が満たす方程式である。したがって、解の挙動を理解する上で最も重要な要素である。この常微分方程式系に対し、すべての解軌道の極限集合を決定した。これにより、拡散のない Gierer-Meinhardt 系の解の挙動は完全に解明されたことになる（Wei-Ming Ni と 鈴木香奈子 との共同研究による）。

(2)　初期－境界値問題の解の最大存在時間と解の有界性について次のことが分かった。

1. 活性因子がそれ自身を活性化する強さを表す指数 p と活性因子が抑制因子の増加を促す強さを表す指数 r が解の最大存在時間に決定的に影響する。つまり、$(p-1)/r < 1$ ならば、解は大域的に存在する。一方、$(p-1)/r > 1$ ならば、有限時間で爆発する解が存在する。

2. 抑制因子がそれ自身を抑制する強さを表す指数 s と抑制因子が活性因子の増

加を阻害する強さを表す指数 q, 及び抑制因子の反応時定数が解の有界性と漸近挙動に大きく影響する。つまり、$(p-1)/r<1$ の場合、解は時間無限大まで存在するが、$q/(s+1)<1$ ならば、反応時定数の取り方によっては非有界な解が存在することもある。

3. 抑制因子の反応時定数の大きさにより、活性因子と抑制因子がともに一様に 0 に収束するような解が存在する。これをパターンの崩壊と呼ぶ。

4. 上の 2, 3 の結果は、すでに知られていた活性因子の非線型反応項が非斉次生産項を含む場合と比較すると興味深い。後者では、大域解はすべて有界であり、またパターンの崩壊は決して起こらない。

口頭発表・講演

1. 「ある活性因子－抑制因子系の点凝集現象」とその後の展開, 応用解析研究会定例セミナー (第 414 回), 早稲田大学理工学部, 2003 年 12 月 13 日.

2. Gierer と Meinhardt の反応拡散系におけるパターンの崩壊, 解析セミナー, 名古屋大学多元数理科学研究科, 2004 年 2 月 17 日.

3. Singularly perturbed solutions of a semilinear Neumann problem in very thin domains, Workshop on Reaction-Diffusion Equations and Related Topics, NCTS, Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan, 2005 年 5 月 27 日.

4. Gierer-Meinhardt 系の解の非爆発性, 日本数学会 2004 年度秋季総合分科会, 北海道大学, 2004 年 9 月 22 日.

5. 反応拡散系によるパターン形成の研究の半世紀を振り返る, 富山大学, 理学部数学教室談話会, 2005 年 1 月 18 日

柳　田　英　二

研究概要

(1)　べき乗の形の非線形項を含む非線形熱方程式においては、指数の値によって解の構造が変化することが知られている。この研究では、指数がある臨界値より大きいときに非有界大域解が存在することを示し、またその増大度や増大点の集合の構造について明らかにした。

(2)　Fisher 型の方程式においては、フロントと呼ばれる遷移層の振る舞いが解のダイナミクスを理解する鍵となる。この研究では、初期値の取り方によっては時間的にも空間的にもきわめて複雑な振る舞いをすることを示した。

(3) 3つの相が3重結合を持つ界面によって隔てられている場合について、その定常状態が存在するための条件をついて調べた。これは。古典的な最適化問題である Fermat-Steiner 問題と関連しているが、自由度が大きい分だけ困難になり、現代的な視点から見ても興味深い問題となる。また存在を示す過程で、その不安定次元との関連が自然に導かれることを示した.

(4) ある準線形放物型方程式に対し、初期値に応じて大域的増大解、進行波解、有限時間消滅解のいずれかに分類されることを示し、その漸近挙動や消滅時刻における解の振る舞いについて調べた。

論文・著書

1. The Eckhaus and zigzag instability criteriain gradient/skew-gradient dissipative systems (with M. Kuwamura), *Physica D* **175** (3/4) (2003), 185–195.

2. A stability criterion for stationary curves to the curvature-driven motion with a triple junction (with R. Ikota), *Differential Integral Equations* **16** (6) (2003), 707–726.

3. A remark on stable subharmonic solutions of time-periodic reaction-diffusion equations (with H. Yagisita), *J. Math. Anal. Appl.* **286** (2) (2003), 795–803.

4. On bounded and unbounded global solutions of a supercritical semilinear heat equation (with P. Poláčik), *Math. Ann.* **327** (2003) (4), 745–771.

5. Recent topics on nonlinear partial differential equations: Structure of radial solutions for semilinear elliptic equations (with S. Yotsutani), in "Selected

Papers on Analysis and Differential Equations", *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **211**, 2003, pp. 121–137.

6. Nonstabilizing solutions and grow-up set for a supercritical semilinear diffusion equation (with P. Poláčik), *Differential Integral Equations* **17** (5/6) (2004), 535–548.

7. Uniqueness and profile of solutions for a superlinear elliptic equation (with Y. Kabeya), Adv. Differential Equations **9** (7/8) (2004), 771–796.

8. Grow-up rate of solutions for a supercritical semilinear diffusion equation (with M. Fila, M. Winkler), J. Differenatial Equations **205** (2) (2004), 365–389.

9. P. Polacik and E. Yanagida, A Liouville property and quasiconvergence for a semilinear heat equation (with P. Poláčik), J. Differenatial Equations **208** (1) (2005), 194–214.

口頭発表・講演

1. Complex dynamics of simple parabolic equations WORKSHOP 2003 "New Perspectives of Nonlinear Partial Differential Equations", 龍谷大学, 2003 年 6 月 23 日.

2. Stability analysis for the curvature-driven motion of curves with triple junctions, Mini-Symposium "Qualitative Theory of Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations", Limburgs University, Belgium, 2003 年 7 月 22 日.

3. Complex dynamics of some nonlinear parabolic equations, Mini-Symposium "Infinite Dimensional Dynamics", Limburgs University, Belgium, 2003 年 7 月 25 日.

4. On diffusion process on a thin domain, 数理生物学シンポジウム, 企画シンポジウム "Recent Topics on Mathematical Methods to Biological Systems", 奈良女子大学, 2003 年 9 月 21 日.

5. Stability of stationary interfaces with triple junctions, NCTS Seminar in PDE Tsing Hua University, 2003 年 10 月 31 日.

6. Fujita exponent and related topics（解の爆発と藤田先生の業績に関する話題）, 藤田宏先生の３／４世紀記念講演会, 日本女子大学, 2003 年 12 月 7 日.

7. Stability of stationary interfaces with triple junctions, New Directions In Dynamics of Evolution Equations — An International Conference In Honor of Professor Shui-Nee Chow, Hunan University, Changsha, P. R. China, 2003 年 12 月 18 日.

8. Irregular behavior of solutions for Fisher's equation, 第 21 回 九州における偏微分方程式研究集会, 九州大学, 2004 年 1 月 28～30 日.

9. Non-stabilizing solutions for a supercritical semilinear parabolic equation, International Conference on Elliptic and Parabolic Problems: Recent Advances, NCTS, Taiwan, 2004 年 2 月 20 日.

10. Non-convergent solutions for a supercritical semilinear parabolic equation, US-Japan Workshop on Dynamics and Computation, 横須賀湘南村, 2004 年 3 月 10 日.

11. Growup and convergence rates for a supercritical semilinear diffusion equation, Workshop on Reaction-Diffusion Equations and Related Topics NCTS, Taiwan, 2004 年 5 月 29 日.

12. Complex dynamics of some simple parabolic equations, Analysis seminar National Taiwan Normal University, 2004 年 6 月 1 日.

13. Dynamics of solutions for a supercritical semilinear heat equation, AIMS' Fifth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, California State Polytechnic University, Pomona, 2004 年 6 月 19 日.

14. Growup rate for a supercritical semilinear heat equation, International Conference on Nonlinear Dynamics and Evolution Equations, Memorial University of Newfoundland St. John's, Newfoundland and Labrador, Canada, 2004 年 7 月 6 日.

15. Rate of approach to steady states in a semilinear parabolic equation, The first Euro-Japanese workshop on blow-up, Comenius University, Slovakia, 2004 年 9 月 20 日.

16. On a singular diffusion equation with a linear source, 反応拡散系に現れる時・空間パターンのメカニズム, 京都大学数理解析研究所, 2004 年 10 月 13 日.

17. Stability analysis for stationary interfaces with triple junctions, Applied Math. Seminar, Ohio State University, 2004 年 10 月 28 日.

    Ohio State University

18. Complicated dyanmics of parabolic equations, Colloquium Ohio State University, 2004 年 10 月 28 日.

19. Logarithmic diffusion with a linear source, Conference on "Autonomous Formation of Spatial Structures in Parabolic Equations", 東北大学, 2004 年 11 月 19 日.

20. Stability analysis for a variational problem with triple junctions, I: Formulation and backgroud, II: The case of a single junction, III: The case of multiple junctions, Singularities in Nonlinear Problems「非線形問題に現れる特異性の解析 (SNP2004)」, 関西セミナーハウス, 2004 年 11 月 24〜25 日.

21. 非線形現象と解析, 城西大学数学教室講演会, 2004 年 11 月 29 日.

22. Global unbounded solutions for a supercritical parabolic equation, スイス日本共同セミナー/Joint Swiss-Japanese Scientific Seminars on Elliptic and Parabolic Issues in Applied Sciences, University of Zurich, 2004 年 12 月 8 日.

23. A Liouville property and quasi-convergence for a semilinear parabolic equation, 第 5 回東アジア偏微分方程式会議, 大阪大学中ノ島センター, 2005 年 2 月 3 日.

有 澤　真 理 子

研究概要

(1)　非局所効果項を含む非線型偏微分方程式の研究。

(2)　ジャンプ効果にある株価過程のオプション価格付け問題の研究。(3)　ルックバックオプションの価格付け問題の研究。

論文・著書

1. Long time averaged reflection force and homogenization of oscillating Neumann boundary conditions, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **20** (2) (2003), 293–332.

2. Some regularity results for degenerate elliptic second-order partial defferential operators, in "Viscosity solutions of differential equations and related topics", 京都大学数理解析研究所講究録 **1323** (2003), 45–58

3. 非線形偏微分方程式の未解決問題への挑戦（P.-L.Lions）（翻訳），「数学の最先端」収録，シュプリンガー・フェアラーク東京, 2003, pp.100–119

口頭発表・講演

1. Ergodic problem for Lévy processes, Stochastic Optimal Control and Applications, Rouen University, France, 2004 年　6 月 14〜18 日.

高　坂　良　史

研究概要

幾何学的時間発展方程式の１つである表面拡散流方程式の解析を行った。表面拡散流方程式は、Helfrich 流方程式と同様、4 階の非線形放物型偏微分方程式として表記されることが知られている。本研究ではこの方程式に対応する定常解を求め、それら定常解の周りで方程式を線形化し、その線形化方程式に対応する固有値問題を解析することによって、定常解の安定性の判定基準を数学的に導出した。現在は得られた安定性の判定基準をもとに，非線形安定性の研究 (中心多様体の研究なども含む) を行っている。

論文・著書

1. Linearized stability analysis of stationary solutions for surface diffusion with boundary conditions, to appear in *SIAM J. Math. Anal.*
2. On the existence for the Helfrich flow and its center manifold near spheres (with T. Nagasawa), preprint.

口頭発表・講演

1. Linear stability analysis of stationary solutions for surface diffusion flow equation in a bounded domain, New Perspectives of Nonlinear Partial Differential Equations, 龍谷大学, 2003 年 6 月 23〜25 日.
2. On phase boundary motion by surface diffusion in a bounded domain, ICIAM 2003, シドニー, 2003 年 7 月 7〜11 日.
3. Stability analysis of stationary solutions for surface diffusion flow equation, 反応拡散系におけるパターン形成と漸近的幾何構造の研究, 京都大学, 2003 年 10 月 15〜17 日.
4. 有界領域内での表面拡散による相境界運動について, 語ろう「数理解析」, 岐阜大学, 2004 年 1 月 26 日.
5. A criterion of linearized stability of stationary solutions for surface diffusion flow equation, 第 7 回ソウル大-北大ジョイントシンポジウム, 北海道大学, 2004 年 7 月 9 日.

6. 表面拡散による3相境界運動の定常解の安定性について, Workshop on BV functions and free boundary problems, ニセコ町, 2004年10月8〜11日.

7. 表面拡散流方程式による3相境界運動の定常解の線形安定性について, 偏微分方程式と現象 : PDEs and Phenomena in Miyazaki 2004, 宮崎大学, 2004年11月19〜21日.

8. Linearized stability analysis of three phase boundary motion by surface diffusion, 研究集会「曲面と曲線の非線型解析」, 埼玉大学大宮ソニックシティカレッジ, 2004年12月17日.

立 川 篤

研究概要

立川は微分幾何学に現れる変分問題とそれに関連する非線形偏微分方程式を研究している。特に、フィンスラー多様体への調和写像の正則性を中心に研究し、"A partial regularity result for harmonic maps into Finsler manifolds" (Calc. Var. **16** (2003), 217–224) において、エネルギーを最小化する写像の部分ヘルダー連続性を示した。

フィンスラー多様体への写像のエネルギー密度はその係数が特異性を持ち、強い非線形性とともに問題を困難にしている。この種の問題に関連して、VMO 係数の被積分関数の積分で表される汎関数の最小化写像の部分正則性について、Catania 大学の Maria Alessandra Ragusa 助教授とともに研究し、部分的な結果を "Interior estimates in Campanato spaces related to quadratic functionals" (数理解析研究所講究録 **1405** (2004) 54–65 M. A. Ragusa-A. Tachikawa) に報告した。

論文・著書

1. A partial regularity result for harmonic maps into Finsler manifolds, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **16** (2) (2003), 217–224 (Erratum, *Ibid.* **16** (2) (2003), 225–226).

2. A partial Hölder regularity result for harmonic maps into a Finsler manifold, 数理解析研究所講究録 **1347** (2003) 167–178.

3. Interior estimates in Campanato spaces related to quadratic functionals (with M. A. Ragusa), 数理解析研究所講究録 **1405** (2004) 54–65.

口頭発表・講演

1. A partial regularity result for harmonic maps into a Finsler manifold, 研究集会「変分問題とその周辺」, 京都大学数理解析研究所 2003 年 6 月 26 日.

2. フィンスラー多様体への調和写像について, 熊本大学応用解析セミナー, 熊本大学自然科学研究科 2003 年 12 月 13 日.

3. Harmonic maps into Finsler manifolds, 研究集会「曲面と曲線の非線型解析」, 埼玉大学大宮ソニックシティカレッジ, 2004 年 12 月 17 日.

添付資料

1. Y. Kohsaka & T. Nagasawa, On the existence for the Helfrich flow and its center manifold near spheres（高坂良史と長澤壯之によるプレプリント）.
2. 長澤壯之, Clebsch-Gordan 係数と対応する微分方程式の解のある漸近展開について（長澤壯之による研究ノート）.
3. 小研究集会「曲線と曲面の非線型解析」プログラム.

On the existence for the Helfrich flow and its center manifold near spheres

Yoshihito Kohsaka*& Takeyuki Nagasawa†

Abstract

The Helfrich variational problem is one of models for shape transformation theory of human red blood cell. Here the associated gradient flow, called the *Helfrich flow*, is studied. The existence of the flow is proved locally for arbitrary initial data, and globally near spheres. Furthermore its center manifold near spheres is investigated.

1 Introduction

Let Σ be a smooth compact surface embedded in $\mathbb{R}^3$. Consider the minimizing problem of the functional

$$\mathcal{W}_{c_0}(\Sigma) = \int_\Sigma (H - c_0)^2 dS$$

with the prescribed area $\mathcal{A}(\Sigma) = A_0$ and enclosed volume $\mathcal{V}(\Sigma) = V_0$. Here H is the mean curvature of Σ with respect to the *inner* normal vector, and c_0 is a constant. This is a model of shapes of human red blood cell, where c_0 is called the *spontaneous curvature* (see [2, 5, 6]). If Σ is a critical point of this variational problem with constraints, then the surface must satisfy the equation

$$\Delta_\Sigma H + 2H(H^2 - K) + 2c_0 K - 2\left(c_0^2 + \lambda_1\right) H - \lambda_2 = 0.$$

*Muroran Institute of Technology, Muroran 050-8585, Japan; Partly supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (No.16740087), Ministry of Education, Science, Sports, and Culture, Japan

†Department of Mathematics, Faculty of Science, Saitama University, Saitama 338-8570, Japan; Partly supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C2) (No.15540195), Ministry of Education, Science, Sports, and Culture, Japan

Here Δ_Σ is the Laplace-Beltrami operator of Σ, K is the Gaussian curvature, λ_1 and λ_2 are Lagrange multipliers. This is the first variation of the *Helflich* functional

$$\mathcal{H}(\Sigma) = \mathcal{W}_{c_0}(\Sigma) + \lambda_1 \mathcal{A}(\Sigma) + \lambda_2 \mathcal{V}(\Sigma)$$

without constraints.

Now consider the L^2-gradient flow (the *Helfrich flow*) for the Helfrich functional. Let $\Sigma(t)$ be a one-parameter family of surfaces, and let V be the velocity in the direction of *inner* normal vector. The equation of flow is

$$V = -\Delta_{\Sigma(t)} H - 2H(H^2 - K) - 2c_0 K + 2\left(c_0^2 + \lambda_1\right) H + \lambda_2. \tag{1.1}$$

We should state related results on geometrical gradient flows, that is, the surface diffusion flow, which is the H^{-1}-gradient flow for the area functional,

$$V = -\Delta_{\Sigma(t)} H$$

by Escher-Mayer-Simonett [4]; the Willmore flow, which corresponds to the Helfrich flow with $c_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$,

$$V = -\Delta_{\Sigma(t)} H - 2H(H^2 - K)$$

by Simonett [13], Kuwert-Schätzle [8, 9]. Roughly speaking they showed the local existence of flow, the global existence near sphere, and the stability of spheres.

For the Helfrich flow, spheres are equilibrium under suitable choices of λ_i, however, they are not necessarily stable. Furthermore finite time blow-up occurs even if the initial surface is sphere.

The first aim of ours is to show the local existence of flow for arbitrary λ_i, and the existence of global flow and (parameter-dependent) center manifolds for the suitable λ_i.

In the previous paper [10] we showed the existence of stationary solutions with rotational symmetry bifurcating from the spheres. We can show the existence of bifurcating solutions without symmetry by Krasnoselski's theorem [3, Theorem 7.3], however, it does not give us any information about structure of all bifurcating branches.

The second aim is to show that branches are embedded in a finite dimensional smooth manifold by the center manifold analysis.

2 Formulation of problem

We can formulate our problem as in Simonett [13], however, we should pay attention to the signature of mean curvature and normal velocity. We would like to follow the definition of mean curvature of our previous paper [10], which has the opposite signature to that of [13]. Since these differences of signature confuse us sometimes, we reformulate our problem under our chioce of signature.

Let Σ_0 be an orientable compact closed surface in $\mathbb{R}^3$, and let $\bigcup_{\ell=1}^{m} U_\ell$ be its open covering. We denote the inner unit normal vector fields of Σ_0 by ν. The mapping $X_\ell : U_\ell \times (-a,a) \ni (s,r) \to s + r\boldsymbol{\nu}(s) \in \mathbb{R}^n$ is a C^∞-diffeomorphism from $U_\ell \times (-a,a)$ to $\mathcal{R}_\ell = \mathrm{Im}(X_\ell)$ provided $a > 0$ is sufficiently small. Let denote the inverse mapping X_ℓ^{-1} by (S_ℓ, Λ_ℓ), where $S_\ell(X_\ell(s,r)) = s \in U_\ell$, and $\Lambda_\ell(X_\ell(s,r)) = r \in (-a,a)$.

Assuming that $\Sigma(t)$ is sufficiently close to Σ_0, we can represent it as a graph of a function on Σ_0 as

$$\Sigma_{\rho(t)} = \Sigma(t) = \bigcup_{\ell=1}^{m} \mathrm{Im}\left(X_\ell : U_\ell \to \mathbb{R}^n,\ [s \mapsto X_\ell(s, \rho(s,t))]\right).$$

Conversely for a given function $\rho : \Sigma_0 \times [0,T) \to (-a,a)$ we define the mapping $\Phi_{\ell,\rho}$ from $\mathcal{R}_\ell \times [0,T)$ to $\mathbb{R}$ by

$$\Phi_{\ell,\rho}(x,t) = \Lambda_\ell(x) - \rho(S_\ell(x),t).$$

Then $(\Phi_{\ell,\rho}(\cdot,t))^{-1}$ gives the surface $\Sigma_{\rho(t)}$.

The velocity in the direction of inner normal vector field of $\Sigma = \{\Sigma_{\rho(t)} \mid t \in [0,T)\}$ at $(x,t) = (X_\ell(s,\rho(s,t)),t)$ is given by

$$V(s,t) = -\left.\frac{\partial_t \Phi_{\ell,\rho}(x,t)}{\|\nabla_x \Phi_{\ell,\rho}(x,t)\|}\right|_{x=X_\ell(s,\rho(s,t))} = \left.\frac{\partial_t \rho(s,t)}{\|\nabla_x \Phi_{\ell,\rho}(x,t)\|}\right|_{x=X_\ell(s,\rho(s,t))}$$

The equation (1.1) is represented as

$$\begin{aligned} \partial_t \rho = L_\rho \{ & -\Delta_\rho H(\rho) - 2H(\rho)\left(H^2(\rho) - K(\rho)\right) \\ & - 2c_0 K(\rho) + 2\left(c_0^2 + \lambda_1\right) H(\rho) + \lambda_2 \}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

where

$$L_\rho = \|\nabla_x \Phi_{\ell,\rho}(x,t)\| |_{x=X_\ell(s,\rho(s,t))}\,.$$

We would like to write down the mean curvature and the Gaussian curvature in terms of the function ρ and its derivatives. As far as the authors know, there are no references for the expression of $K(\rho)$. We can refer [13] for the expression of $H(\rho)$, but its definition has the opposite signature. Therefore we state here these expressions for the sake of completeness. Since their proof is lengthy, we will give it in the last section. The surface is defined by $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_{\ell,\rho}(x) = 0\}$ locally, where the interior near the surface is located in the side $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_{\ell,\rho}(x) > 0\}$. Assume that $\nabla_x \Phi_{\ell,\rho} \neq 0$ everywhere near the surface.

Define the diffeomorphism θ_ρ between Σ_0 and Σ_ρ by

$$\theta_\rho(s) = X_\ell(s, \rho(s)) \quad \text{for } s \in U_\ell.$$

We denote its pull back by θ_ρ^*. Let $g_{\mathbb{R}^3}$ be the Euclidean metric on $\mathbb{R}^3$, and put $\eta = g_{\mathbb{R}^3}|_{\mathcal{R}_\ell}$, $g_\ell = X_\ell^* \eta$, which are metric on $T(\mathcal{R}_\ell)$ and $T(U_\ell \times (-a, a))$ respectively. The metric g_ℓ can be written as

$$g_\ell = w_\ell(r) + dr \otimes dr,$$

where $w_\ell(r)$ is the metric on $T(U_\ell \times \{r\})$. Put

$$g_\rho = w_\rho + dr \otimes dr = g_\ell|_{(s,\rho(s))},$$

where $w_\rho = (w_{jk}(\rho))$ is a metric on $T(\Sigma_0)$ defined by

$$w_\rho|_{T(U_\ell)} = w_\ell(\rho)$$

We denote the metric $(w_{jk}(\rho))^{-1} = \left(w^{jk}(\rho)\right)$ on $T^*(\Sigma_0)$ simply by w_ρ^*.

Remark 2.1 w_ρ is not $\theta_\rho^* \eta$.

Put $U_{\ell,\rho} = (U_\ell, w(\rho))$ and $\Xi_\ell = (U_\ell \times (-a, a), g_\ell)$, and define the function $\tilde{\Phi}_{\ell,\rho}$ on $U_\ell \times (-a, a)$ by

$$\tilde{\Phi}_{\ell,\rho}(s, r) = \Phi_{\ell,\rho}(X_\ell(s, r)) = r - \rho(s).$$

In what follows, Latin indices expect n range from 1 to 2, and Greek ones do from 1 to 3. And the Einstein convention is used. Furthermore we denote the coordinate system by $y = (y^\alpha)$ defined by

$$y^\alpha = \begin{cases} s^i & (\alpha = i), \\ r & (\alpha = 3). \end{cases}$$

For a while we fix ℓ, ρ, and the time variable t, and omit them.

The entries of the metric g are

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} w_{ij} & (\alpha = i,\ \beta = j), \\ 0 & (\alpha = i,\ \beta = 3), \\ 1 & (\alpha = 3,\ \beta = 3). \end{cases}$$

Therefore we have

$$\left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\alpha = \begin{cases} -w^{ij}\partial_i\rho & (\alpha = j), \\ 1 & (\alpha = 3), \end{cases}$$

$$\left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)_\beta = \begin{cases} -\partial_i\rho & (\beta = i), \\ 1 & (\beta = 3), \end{cases}$$

$$\left(\mathrm{Hess}_y \tilde{\Phi}\right)_{\alpha\beta} = \begin{cases} -\partial_i\partial_j\rho + \Gamma^k_{ij}\partial_k\rho - \Gamma^3_{ij} & (\alpha = i,\ \beta = j), \\ \Gamma^k_{i3}\partial_k\rho & (\alpha = i,\ \beta = 3), \\ 0 & (\alpha = \beta = 3), \end{cases}$$

$$\Delta_y \tilde{\Phi} = -w^{ij}\partial_i\partial_j\rho + w^{ik}\Gamma^j_{ik}\partial_j\rho - w^{ik}\Gamma^3_{ik}.$$

Here

$$\left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\alpha = g^{\alpha\beta}\left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)_\beta, \quad \left(\nabla \tilde{\Phi}\right)_\beta = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_\beta},$$

and Γ^k_{ij} is the Christoffel symbol of Ξ.

Using this fact we get

Lemma 2.1 **([13])** *The mean curvature $H(\rho)$ can be written as*

$$H(\rho) = P_1(\rho)\rho + F_1(\rho),$$

where

$$\begin{aligned} P_1(\rho) = \frac{1}{2L_\rho^3} \Big[& \left\{ L_\rho^2 w^{jk}(\rho) - w^{j\ell}(\rho)w^{km}(\rho)\partial_\ell\rho\partial_m\rho \right\} \partial_j\partial_k \\ & - \left\{ L_\rho^2 w^{jk}(\rho)\Gamma^i_{jk}(\rho) + w^{j\ell}(\rho)w^{ki}(\rho)\Gamma^3_{jk}(\rho)\partial_\ell\rho \right. \\ & \left. + 2w^{km}(\rho)\Gamma^i_{3k}(\rho)\partial_m\rho - w^{j\ell}(\rho)w^{km}(\rho)\Gamma^i_{jk}(\rho)\partial_\ell\rho\partial_m\rho \right\} \partial_i \Big] \end{aligned}$$

$$F_1(\rho) = \frac{1}{2L_\rho} w^{jk}(\rho)\Gamma^3_{jk}(\rho),$$

$$\Gamma^i_{jk}(\rho) = \Gamma^i_{jk}\Big|_{(s,\rho(s))} \quad on \quad T_{(s,\rho(s))}\left(\Xi_\ell\right).$$

Proof. Let x be the standard Euclidean coordinate system, then we have

$$\begin{aligned}
2H(\rho) &= -\mathrm{div}_x \left(\frac{\nabla_x \Phi}{\|\nabla_x \Phi\|} \right)\bigg|_{x=X_\ell(s,\rho(s))} \\
&= -\left(\frac{\Delta_x \Phi}{\|\nabla_x \Phi\|} - \frac{\nabla_x \Phi \cdot \nabla_x \|\Phi\|}{\|\nabla_x \Phi\|^2} \right)\bigg|_{x=X_\ell(s,\rho(s))} \\
&= -\left(\frac{\Delta_x \Phi}{\|\nabla_x \Phi\|} - \frac{\nabla_x \Phi \cdot \nabla_x \|\Phi\|^2}{2\|\nabla_x \Phi\|^3} \right)\bigg|_{x=X_\ell(s,\rho(s))} \\
&= -\left(\frac{\Delta_x \Phi}{\|\nabla_x \Phi\|} - \frac{\mathrm{Hess}_x \Phi \left(\nabla_x \Phi, \nabla_x \Phi\right)}{\|\nabla_x \Phi\|^3} \right)\bigg|_{x=X_\ell(s,\rho(s))}.
\end{aligned}$$

Since the differential operators ∇_x, Hess_x, Δ_x, and the length $\|\cdot\|$ are geometric, *i. e.*, independent of the choice of coordinate system, it holds that

$$2H(\rho) = -\left(\frac{\Delta_y \tilde{\Phi}}{\|\nabla_y \tilde{\Phi}\|} - \frac{\left(\mathrm{Hess}_y \tilde{\Phi}\right)_{\alpha\beta} \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\alpha \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\beta}{\|\nabla_y \tilde{\Phi}\|^3} \right)\Bigg|_{(s,\rho(s))}.$$

Using the previous fact and

$$\|\nabla_y \tilde{\Phi}\| = L_\rho$$

we get the assertion. ☐

Lemma 2.2 *The Gaussian curvature $K(\rho)$ can be written as*

$$K(\rho) = w(\rho)^{-1} \det{}_3 \left\{ L_\rho^{-\frac{1}{2}} H_{\alpha\beta}(\rho) \left(\delta_\mu^\alpha - k_\mu^\alpha(\rho)\right) \left(\delta_\nu^\beta - k_\nu^\beta(\rho)\right) + \ell_{\mu\nu}(\rho) \right\},$$

where

$$w(\rho) = \det{}_2 \left(w_{ij}(\rho)\right),$$

$$H_{\alpha\beta}(\rho) = \begin{cases} -\partial_i \partial_j \rho + \Gamma_{ij}^k(\rho) \partial_k \rho - \Gamma_{ij}^3(\rho) & (\alpha = i,\ \beta = j), \\ \Gamma_{i3}^k(\rho) \partial_k \rho & (\alpha = i,\ \beta = 3), \\ 0 & (\alpha = \beta = 3), \end{cases}$$

$$k_\mu^\alpha(\rho) = \begin{cases} L_\rho^{-2} w^{ij}(\rho) \partial_i \rho \partial_j \rho & (\alpha = i, \mu = j), \\ -L_\rho^{-2} w^{ij}(\rho) \partial_j \rho & (\alpha = i, \mu = 3), \\ -L_\rho^{-2} \partial_j \rho & (\alpha = 3, \mu = j), \\ L_\rho^{-2} & (\alpha = \mu = 3), \end{cases}$$

$$\ell_{\mu\nu}(\rho) = \begin{cases} L_\rho^{-2}\partial_i\rho\partial_j\rho & (\mu = i, \nu = j), \\ -L_\rho^{-2}\partial_i\rho & (\mu = i, \nu = 3; \ or\ \mu = 3, \nu = i), \\ L_\rho^{-2} & (\mu = \nu = 3). \end{cases}$$

$\det_k$ *is the determinant for* $k \times k$ *martices.*

Proof. Noticing that

$$g|_{(s,\rho(s))} = \det{}_3(g_{\alpha\beta})|_{(s,\rho(s))} = \det{}_2(w_{ij})|_{(s,\rho(s))} = w(\rho),$$

$$\left(\mathrm{Hess}_y\tilde{\Phi}\right)_{\alpha\beta}\Big|_{(s,\rho(s))} = H_{\alpha\beta}(\rho),$$

$$\|\nabla_y\tilde{\Phi}\|^{-2}\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)^{\alpha}\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)_{\mu}\Big|_{(s,\rho(s))} = k_\nu^\alpha(\rho),$$

$$\|\nabla_y\tilde{\Phi}\|^{-2}\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)_{\mu}\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)_{\nu}\Big|_{(s,\rho(s))} = \ell_{\mu\nu}(\rho),$$

we obtain the assertion from Lemma 5.2 in the last section. □

Now we go back to the equation (2.1). Define the metric σ_ρ by

$$\theta_\rho^*\eta = \sigma(\rho) = (\sigma_{jk}(\rho)).$$

Writing the Christoffel symbols with respect to this metric by $\gamma_{jk}^i(\rho)$, we have

$$\Delta_\rho = \sigma^{jk}(\rho)\left(\partial_j\partial_k - \gamma_{jk}^i(\rho)\partial_i\right).$$

Let $h^\gamma(\Sigma_0)$ be the little Hölder space on Σ_0 of order γ. We fix $0 < \alpha < \beta < 1$. Then, for $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$ and $a > 0$, put

$$\mathcal{U} = \{\rho \in h^{2+\beta_0}(\Sigma_0) \mid \|\rho\|_\infty < a\}.$$

For two Banach spaces E_0 and E_1 satisfying $E_1 \hookrightarrow E_0$, the set $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ is the class of $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ such that $-A$, considered as an unbounded operator in E_0, generates a strongly continuous analytic semigroup on E_0.

Proposition 2.1 *There exist*

$$P \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{H}(h^{4+\alpha}(\Sigma_0), h^\alpha(\Sigma_0))), \quad F \in C^\infty(\mathcal{U}, h^{\beta_0}(\Sigma_0))$$

such that the equation (2.1) *is in the form*

$$\rho_t + P(\rho)\rho + F(\rho) = 0.$$

Proof. The principal term $-L_\rho \Delta_\rho H(\rho)$ in (2.1) is the same as those of the surface diffusion flow [4] and of the Willmore flow [13] (see Remark below). Taking Lemmata 2.1 – 2.2 into consideration, we can obtain the assertion in a similar manner to the proof of [4, Lemma 2.1] and [13, Lemma 2.1]. $\square$

Remark 2.2 Our mean curvature $H(\rho)$ corresponds to $-H_\rho$ in [4] and $-H(\rho)$ in [13], having the opposite signature. Therefore our $-L_\rho \Delta_\rho H(\rho)$ is $L_\rho \Delta_\rho H_\rho$ in [4] and $L_\rho \Delta_\rho H(\rho)$ in [13], and the principal terms of equations for ρ are the same each others.

Applying [1, Theorem 6.3], we get an existence results for the Helfrich flow.

Theorem 2.1 *For any $\rho_0 \in h^{2+\beta}(\Sigma_0) \cap \mathcal{U}$, there exists $t^+ = t^+(\rho_0) \in (0, \infty]$ such that (3.2) has a unique maximal solution $\rho \in C([0, t^+); h^{2+\beta}(\Sigma_0) \cap \mathcal{U}) \cap C^\infty((0, t^+); C^\infty(\Sigma_0))$ satisfying $\rho(0) = \rho_0$.*

3 The linearized operator around sphere

In this section we consider the case where the reference manifold Σ_0 is the unit sphere S^2, for which

$$H(0) = K(0) = L_0 = 1$$

holds. Therefore S^2 is a stationary solution to (2.1), when

$$\lambda_2 = 2c_0 - 2\left(c_0^2 + \lambda_1\right). \tag{3.1}$$

Here we study the stability of S^2 under (3.1). Put

$$\gamma = \lambda_2 + 2c_0,$$

then the equation with which we concern ourselves is

$$\begin{aligned} \rho_t = L_\rho\{&-\Delta_\rho H(\rho) - 2H(\rho)\left(H^2(\rho) - K(\rho)\right) \\ &- 2c_0\left(K(\rho) - 1\right) + \left(4c_0 - \gamma\right)\left(H(\rho) - 1\right)\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

We have already shown in [10] the following fact. Let consider the case where γ close to $n(n+1)$. Here n is integer greater than 1. Then there exists an axially symmetric critical surface near $\gamma = n(n+1)$, which bifurcates from the unit sphere, to the variational problem of the Helfrich functional. Such phenomenon does not occur for $\gamma < 6$. That is, $\gamma = 6$ is the first bifurcation point. The existence of such critical surfaces near S^2 suggests that S^2 (*i.e.*, $\rho \equiv 0$) is not unconditionary stable for $\gamma > 6$.

Furthermore if $\gamma < 0$, then S^2 is unstable. To show this, it is enough to analyze the ordinary differential equation associated with (2.1). Assume that $\rho(0)$ is a constant function on S^2, and that so is $\rho(t)$. Then we have

$$L_\rho = 1, \quad H(\rho) = \frac{1}{1-\rho}, \quad K(\rho) = \frac{1}{(1-\rho)^2}.$$

The first relation follows from $\Phi(x,t) = 1 - \|x\| - \rho$. Thus (2.1) is reduced to an ordinary differential equation

$$\rho_t = -2c_0 \left\{ \frac{1}{(1-\rho)^2} - 1 \right\} + (4c_0 - \gamma) \left(\frac{1}{1-\rho} - 1 \right).$$

Put $\dfrac{1}{1-\rho} = 1 + k$. Since

$$k_t = \frac{\rho_t}{(1-\rho)^2} = (1+k)^2 \rho_t,$$

we obtain the equation which k must satisfy:

$$k_t = -k(1+k)^2 (2c_0 k + \gamma).$$

The stationary solution $k \equiv 0$ (*i.e.*, the unit sphere) is unstable if

$$\frac{d}{dk} \left\{ -k(1+k)^2 (2c_0 k + \gamma) \right\} \Big|_{k=0} = -\gamma > 0.$$

Therefore $\gamma \geq 0$ is a necessary condition for the stability of S^2 as a stationary solution to (2.1).

Of course the same conclusion follows from the functional $\mathcal{H}$. If ρ is constant on S^2, and if $\lambda_2 = 2c_0 - 2(c_0^2 + \lambda_1)$, then

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\Sigma_\rho) &= \int_{\Sigma_\rho} \left(H^2(\rho) - 2c_0 H(\rho) \right) dS + \left(c_0^2 + \lambda_1 \right) \mathcal{A}(\Sigma_\rho) + \lambda_2 \mathcal{V}(\Sigma_\rho) \\ &= 4\pi \left(1 - c_0 - \frac{\lambda_2}{6} + \frac{\gamma}{2}\rho^2 - \frac{\lambda_2}{3}\rho \right). \end{aligned}$$

Therefore we have

$$\frac{d}{d\rho} \mathcal{H}(\Sigma_\rho) \Big|_{\rho=0} = 0, \quad \frac{d^2}{d\rho^2} \mathcal{H}(\Sigma_\rho) \Big|_{\rho=0} = 4\pi\gamma,$$

and the unit sphere S^2 is unstable as a critical point of the Helfrich functional when $\gamma < 0$.

We now investigate the stability of the unit sphere for $\gamma \in [0,6]$. In fact we can construct a center manifold for $\gamma \in [0,6]$, which attracts for all solutions to (2.1) with sufficiently small initial data if either $\gamma \in (0,6)$ or $\gamma = c_0 = 0$.

Lemma 3.1 *It holds that*

$$\frac{d}{d\varepsilon} L_{\varepsilon h}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Proof. The assertion follows from $L_{\varepsilon h} = \sqrt{1+\varepsilon^2\|\nabla_{\varepsilon h} h\|^2}$. □

Lemma 3.2 *It holds that*

$$\frac{d}{d\varepsilon} H(\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}(\Delta_0 + 2)h.$$

Proof. Since

$$H(\varepsilon h) = P_1(\varepsilon h)\varepsilon h + F_1(\varepsilon h),$$

we have

$$\frac{d}{d\varepsilon} H(\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0} = P_1(0)h + \frac{d}{d\varepsilon} F_1(\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Lemma 2.1 implies

$$P_1(0)h = \frac{1}{2} w^{jk}(0)\left(\partial_j\partial_k - \Gamma^i_{jk}(0)\partial_i\right) h = \frac{1}{2}\Delta_0 h.$$

By Lemma 3.1, it holds that

$$\frac{d}{d\varepsilon} F_1(\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{2L_0}\frac{d}{d\varepsilon} w^{jk}(\varepsilon h)\Gamma^3_{jk}(\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Since $\frac{1}{L_0} w^{jk}(\varepsilon h)\Gamma^3_{jk}(\varepsilon h)$ does not contain derivatives of h, its value at $s = s_0$ can be calculated by use of the constant function $f(s) = \varepsilon h(s_0)$. Noticing $L_0 = L_f$ holds for constant functions, we get

$$-\frac{1}{2L_0} w^{jk}(\varepsilon h(s_0))\Gamma^3_{jk}(\varepsilon h(s_0)) = -\frac{1}{2L_f} w^{jk}(f)\Gamma^3_{jk}(f) = F_1(f).$$

Furthermore because of $P_1(f) = 0$ for constant functions, we have

$$F_1(f) = H(f) = \frac{1}{1-f} = \frac{1}{1-\varepsilon h(s_0)}.$$

Therefore we find

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}F_1(\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0} &= -\frac{1}{2L_f}\,\frac{d}{d\varepsilon}w^{jk}(f)\Gamma^3_{jk}(f)\bigg|_{\varepsilon=0} = -\,\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{2L_f}w^{jk}(f)\Gamma^3_{jk}(f)\bigg|_{\varepsilon=0}\\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{1-\varepsilon h(s_0)}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{h(s_0)}{(1-\varepsilon h(s_0))^2}\bigg|_{\varepsilon=0} = h(s_0).\end{aligned}$$

Since s_0 is arbitrary, we obtain the assrtion. $\square$

Lemma 3.3 *It holds that*

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(L_{\varepsilon h}\Delta_{\varepsilon h}H(\varepsilon h)\right)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\Delta_0(\Delta_0+2)h.$$

Proof. We have

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(L_{\varepsilon h}\Delta_{\varepsilon h}H(\varepsilon h)\right)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\left(L_{\varepsilon h}\Delta_{\varepsilon h}H(0)\right)\bigg|_{\varepsilon=0} + L_0\Delta_0\,\frac{d}{d\varepsilon}H(\varepsilon h)\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Taking $H(0) = L_0 \equiv 1$ into account, the previous lemma gives the assertion. $\square$

Lemma 3.4 *It holds that*

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left\{L_{\varepsilon h}H(\varepsilon h)\left(H^2(\varepsilon h) - K(\varepsilon h)\right)\right\}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Proof. Let $\kappa_1(\varepsilon h)$ and $\kappa_2(\varepsilon h)$ be the principal curvatures. Since

$$H^2(\varepsilon h) - K(\varepsilon h) = \left(\frac{\kappa_1(\varepsilon h) - \kappa_1(\varepsilon h)}{2}\right)^2$$

and since

$$\kappa_1(0) = \kappa_2(0) = 1,$$

we get

$$\left(H^2(\varepsilon h) - K(\varepsilon h)\right)\big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\left(H^2(\varepsilon h) - K(\varepsilon h)\right)\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

$\square$

Lemma 3.5 *It holds that*

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(L_{\varepsilon h}H(\varepsilon h)\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}(\Delta_0+2)h, \quad \frac{d}{d\varepsilon}\left(L_{\varepsilon h}K(\varepsilon h)\right)\Big|_{\varepsilon=0} = (\Delta_0+2)h.$$

Proof. It follows from Lemmata above that

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(L_{\varepsilon h}H(\varepsilon h)\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}H(\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}(\Delta_0+2)h.$$

Similarly we have

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\left(L_{\varepsilon h}K(\varepsilon h)\right)\Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon}K(\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\left\{H^2(\varepsilon h) - \left(H^2(\varepsilon) - K(\varepsilon h)\right)\right\}\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= 2H(0)\,\frac{d}{d\varepsilon}\left(H(\varepsilon h)\right)\Big|_{\varepsilon=0} = (\Delta_0+2)h.\end{aligned}$$

□

Combining these lammata, we obtain

Proposition 3.1 *The linearized equation around the unit sphere of* (2.1) *is*

$$h_t + Ah = 0,$$

where

$$A = \frac{1}{2}(\Delta_0+2)(\Delta_0+\gamma), \quad \gamma = 4c_0 - 2\left(c_0^2 + \lambda_1\right).$$

We now investigate the spectrum of $-A$.

Proposition 3.2 *The spectrum of $-A$ consists of eigenvalues*

$$\mathrm{spec}\,(-A) = \left\{ -\frac{1}{2}(\mu_i - 2)(\mu_i - \gamma) \,\Big|\, \mu_i \in \mathrm{spec}\,(-\Delta_0) \right\}.$$

Proof. Let $\mathrm{spec}\,(-\Delta_0) = \{\mu_i\}$ and ϕ_i be an eigenfunction belonging to the eigenvalue μ_i, satisfying $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}$. Consider the equation

$$(A+\nu)\phi = 0$$

and look for ϕ in the form

$$\phi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i.$$

Then $\{c_i\}$ must satisfy

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \left\{ \frac{1}{2} (-\mu_i + 2)(-\mu_i + \gamma) + \nu \right\} \phi_i = 0.$$

Therefore ν is an eigenvalue of $-A$ if and only if

$$\nu = -\frac{1}{2} (-\mu_i + 2)(-\mu_i + \gamma)$$

for some i. $\square$

Corollary 3.1 *The spectrum* $\operatorname{spec}(-A)$ *contains in* $(-\infty, 0]$ *if and only if* $0 \leq \gamma \leq 6$.

Proof. The assertion follows from the fact $\mu_i = k(k+1)$ for $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\square$

Let W_k be the eigenspace of $-\Delta_0$ belonging to the eigenvalue $k(k+1)$. In particular,

$$W_0 = \operatorname{span}\{1\}, \quad W_1 = \operatorname{span}\left\{ x_1|_{S^2}, x_2|_{S^2}, x_3|_{S^2} \right\},$$

$$W_2 = \operatorname{span}\left\{ x_1 x_2|_{S^2}, x_2 x_3|_{S^2}, x_1 x_3|_{S^2}, x_1^2 - x_2^2|_{S^2}, x_2^2 - x_3^2|_{S^2} \right\},$$

where x_i is the Euclidean coordinate function in $\mathbb{R}^3$.

Remark 3.1 By use of the standard polar coordinate system

$$x_1|_{S^2} = \sin\phi\cos\theta, \quad x_2|_{S^2} = \sin\phi\sin\theta, \quad x_3|_{S^2} = \cos\phi,$$

it holds that

$$W_k = \operatorname{span}\{P_k(\cos\phi), P_k^m(\cos\phi)\cos m\theta, P_k^m(\cos\phi)\sin m\theta \mid 1 \leq m \leq k\}.$$

Here P_k^m is the associated Legendre function, and $P_k = P_k^0$. In particular

$$x_1|_{S^2} = P_1^1(\cos\phi)\cos\theta, \quad x_2|_{S^2} = P_1^1(\cos\phi)\sin\theta, \quad x_3|_{S^2} = P_1(\cos\phi),$$

$$x_1 x_2|_{S^2} = \frac{1}{6} P_2^2(\cos\phi)\sin 2\theta, \quad x_2 x_3|_{S^2} = \frac{1}{3} P_2^1(\cos\phi)\sin\theta,$$

$$x_1x_3|_{S^2} = \frac{1}{3}P_2^1(\cos\phi)\cos\theta, \quad x_1^2 - x_2^2|_{S^2} = \frac{1}{3}P_2^2(\cos\phi)\cos 2\theta,$$

$$x_2^2 - x_3^2|_{S^2} = -P_2(\cos\phi) - \frac{1}{6}P_2^2(\cos\phi)\cos 2\theta,$$

$$P_2(\cos\phi) = -\frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) - \left(x_2^2 - x_3^2\right)\Big|_{S^2},$$

$$P_2^1(\cos\phi)\cos\theta = 3x_3x_1|_{S^2}, \quad P_2^1(\cos\phi)\sin\theta = 3x_2x_3|_{S^2},$$

$$P_2^2(\cos\phi)\cos 2\theta = 3\left(x_1^2 - x_2^2\right)|_{S^2}, \quad P_2^2(\cos\phi)\sin 2\theta = 6x_1x_2|_{S^2}$$

In what follows we assume $0 \le \gamma \le 6$. We arrange eigenvalues

$$\nu = -\frac{1}{2}(k-1)(k+2)\left(k^2 + k - \gamma\right)$$

of $-A$ in descending order as

$$0 = \nu_0 > \nu_1 > \cdots > \nu_m > \cdots.$$

Denoting the eigenspace belonging to ν_m by V_m, we have

Proposition 3.3 1. *When* $\gamma = 0$,

$$\nu_m = -\frac{1}{2}m(m+1)(m+2)(m+3),$$

$$V_0 = W_0 \oplus W_1,$$

the geometric and algebraic multiplicity of $\nu_0 = \dim V_0 = 4$.

2. *When* $0 < \gamma < 4$,

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_1 = -\gamma,$$

$$\nu_m = -\frac{1}{2}(m-1)(m+2)\left(m^2 + m - \gamma\right) \quad \textit{for} \quad m \ge 2,$$

$$V_0 = W_1,$$

the geometric and algebraic multiplicity of $\nu_0 = \dim V_0 = 3$.

3. *When* $\gamma = 4$,

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_1 = -\gamma,$$

$$\nu_m = -\frac{1}{2}m(m+3)\left(m^2 + 3m + 2 - \gamma\right) \quad \textit{for} \quad m \ge 2,$$

$$V_0 = W_1,$$

the geometric and algebraic multiplicity of $\nu_0 = \dim V_0 = 3$.

4. *When* $4 < \gamma < 6$,

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_1 = -2(6-\gamma), \quad \nu_2 = -\gamma,$$

$$\nu_m = -\frac{1}{2}(m-1)(m+2)\left(m^2+m-\gamma\right) \quad \textit{for} \;\; m \geq 3,$$

$$V_0 = W_1,$$

the geometric and algebraic multiplicity of $\nu_0 = \dim V_0 = 3$.

5. *When* $\gamma = 6$,

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_1 = -\gamma,$$

$$\nu_m = -\frac{1}{2}m(m+3)\left(m^2+3m+2-\gamma\right) \quad \textit{for} \;\; m \geq 2,$$

$$V_0 = W_1 \oplus W_2,$$

the geometric and algebraic multiplicity of $\nu_0 = \dim V_0 = 8$.

In a similar manner to [4, 13], we can obtain the following result.

Theorem 3.1 *For the Helfrich flow obtained in Theorem 2.1 with* $\Sigma_0 = S^2$, *the following statements hold.*

1. *For* $\gamma \in [0,6]$ *there exists uniquely a local center manifold* $\mathcal{M}$ *for* (3.2) *with*

$$\dim \mathcal{M} = \begin{cases} 4 & \gamma = 0, \\ 3 & \gamma \in (0,6), \\ 8 & \gamma = 6. \end{cases}$$

2. *For* $\gamma \in (0,6)$ *we have*

$$\mathcal{M} = \{\textit{all spheres with center close to the original } S^2 \\ \textit{and with radius } 1\}.$$

That is, the center manifold $\mathcal{M}$ *is generated by small translation.*

3. *For* $\gamma = c_0 = 0$ *we have*

$$\mathcal{M} = \{\textit{all spheres with center close to the original } S^2 \\ \textit{and with radius close to } 1\}.$$

That is, the center manifold $\mathcal{M}$ *is generated by small translation and dilation with ratio near* 1.

4. *Unit spheres obtained by small translation are included in* $\mathcal{M}$ *even for cases "*$\gamma = 0$ *and* $c_0 \neq 0$*", and* $\gamma = 6$.

5. *For $\gamma \in (0,6)$ or $\gamma = c_0 = 0$ the center manifold $\mathcal{M}$ attracts the solutions of (3.2) that start in a small $h^{2+\beta}(S^2)$ neighborhood of 0, where β is that of Theorem 2.1.*

Proof. The first assertion follows from the results of Simonett [11, 12] (see also [4, 13]).

A non-zero constant function on S^2 is a generator of dilation, and $x_i|_{S^2}$ does that of translation. Furthermore unit spheres are stationary solutions for (3.2), and so are spheres for (3.2) with $c_0 = 0$. These facts yield the assertions 2–5 (see [4, 13]). Note that the assertions for $c_0 = 0$ were obtained by Simonett [13]. □

Proposition 3.4 *When $\gamma = 0$ and $c_0 \neq 0$, the unit sphere is unstable.*

Proof. Let $\Sigma(0)$ be a sphere. By the uniqueness of the flow, $\Sigma(t)$ is also a sphere for every t. Denoting the curvature of $\Sigma(t)$ by $1 + k(t)$, we find that k is governed by

$$k_t = -2c_0 k^2 (1+k)^2. \tag{3.3}$$

We consider the initial value problem for (3.3) with sufficiently small $|k(0)|$. It is easily shown that:

1. The case $c_0 < 0$:

   (a) If $k(0) > 0$, then the solution k exists on $(-\infty, t_*)$ for some $t_* \in (0, \infty)$, and $k(t) \uparrow \infty$ as $t \uparrow t_*$. That is, the sphere $\Sigma(t)$ shrinks in finite time.

   (b) If $-1 < k(0) < 0$, then k exists for all $t \in \mathbb{R}$, and satisfies $-ct^{-1} < k(t) < 0$.

2. The case $c_0 > 0$:

   (a) If $k(0) > 0$, then the solution k exists on (t_*, ∞) for some $t_* \in (-\infty, 0)$, and satisfies $0 < k(t) < ct^{-1}$.

   (b) If $-1 < k(0) < 0$, then k exists for all $t \in \mathbb{R}$, and satisfies $-1 < k(t) < -1 + ct^{-1}$. That is, the sphere $\Sigma(t)$ grows up infinitly taking inifite time.

These suggest the assertion. □

We do not know the more precise structure of $\mathcal{M}$ for $\gamma = 6$. The bifurcating surface Σ_ε from the unit sphere around $\gamma = 6$ obtained in [10] satisfies

$$H(\rho) = 1 + \varepsilon P_2(x_3|_{S^2}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

The axis of rotation for this surface is the x_3-axis. By the addition theorem for P_k^m implies that there also exists the bifurcating surface satisfying

$$H(\rho) = 1 + \varepsilon \left\{ P_2(\cos\phi_0)P_2(x_3|_{S^2}) + \frac{1}{3}P_2^1(\cos\phi_0)P_2^1(x_3|_{S^2})\cos(\theta - \theta_0) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12}P_2^2(\cos\phi_0)P_2^2(x_3|_{S^2})\cos 2(\theta - \theta_0) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Here $\theta \in [0, 2\pi)$ is the angle around the x_3-axis. The surface is also rotationally symmetric around the axis passing through the origin and $(\sin\phi_0\cos\theta_0, \sin\phi_0\sin\theta_0, \cos\phi_0) \in S^2$.

4 A parameter-dependent center manifold

To seek for solutions near the unit sphere, we define a new parameter λ by

$$\lambda = \lambda_1 - c_0 + c_0^2 + \frac{1}{2}\lambda_2,$$

which is equivalent to

$$\lambda_2 = 2c_0 - 2\left(c_0^2 + \lambda_1\right) + 2\lambda$$

(cf. (3.1)). Put

$$\gamma = \lambda_2 + 2c_0$$

as before. We consider that our problem is described the system

$$\begin{cases} \partial_t\rho = L_\rho\{-\Delta_\rho H(\rho) - 2H(\rho)\left(H^2(\rho) - K(\rho)\right) \\ \qquad\qquad - 2c_0\left(K(\rho) - 1\right) + (4c_0 - \gamma)\left(H(\rho) - 1\right) + 2\lambda H(\rho)\}, \\ \partial_t\lambda = 0, \\ \partial_t\gamma = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

The unit sphere corresponds to $(\rho, \lambda, \gamma) \equiv (0, 0, \gamma)$, which is an equilibrium for any γ.

For any fixed γ_0, we consider $\gamma = \gamma_0 + \hat{\gamma}$ as the small perturbation. We write the first equation in (4.4) as

$$\partial_t \rho + P(\rho)\rho + F(\lambda, \gamma_0 + \hat{\gamma}, \rho) = 0.$$

Then it holds that

$$P(0) - \partial_\rho F(0, \gamma_0, 0) = -\frac{1}{2}(\Delta_0 + 2)(\Delta_0 + \gamma_0) = A(\gamma_0).$$

Denote the operator $(\lambda, \hat{\gamma}, \rho) \mapsto A(\gamma_0)\rho$ by $\boldsymbol{A}(\gamma_0)$. Then we have

$$\mathrm{spec}\,(-\boldsymbol{A}(\gamma_0)) = \mathrm{spec}\,(-A(\gamma_0)) \cup \{0\} = \mathrm{spec}\,(-A(\gamma_0)).$$

The eigenspace $\boldsymbol{V}_\nu(\gamma_0)$ belonging to $\nu \in \mathrm{spec}\,(-\boldsymbol{A}(\gamma_0))$ is

$$\boldsymbol{V}_\nu(\gamma_0) = \{(0,0,\rho) \,|\, (A(\gamma_0) + \nu)\rho = 0\} \quad \text{if} \quad \nu \neq 0,$$

$$\boldsymbol{V}_0(\gamma_0) = \{(\lambda, \hat{\gamma}, \rho) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}, \hat{\gamma} \in \mathbb{R}, A(\gamma_0)\rho = 0\},$$

In particular, $\mathrm{spec}\,(-\boldsymbol{A}(\gamma_0)) \subset (-\infty, 0]$ if and only if $\gamma_0 \in [0,6]$. Furthermore we have

Proposition 4.1 1. *When* $\gamma_0 = 0$,

$$\boldsymbol{V}_0(0) = \{(\lambda, \hat{\gamma}, \rho) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}, \hat{\gamma} \in \mathbb{R}, \rho \in W_0 \oplus W_1\}, \quad \dim \boldsymbol{V}_0(0) = 6.$$

2. *When* $\gamma_0 \in (0,6)$,

$$\boldsymbol{V}_0(\gamma_0) = \{(\lambda, \hat{\gamma}, \rho) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}, \hat{\gamma} \in \mathbb{R}, \rho \in W_1\}, \quad \dim \boldsymbol{V}_0(\gamma_0) = 5.$$

3. *When* $\gamma_0 = 6$,

$$\boldsymbol{V}_0(\gamma_0) = \{(\lambda, \hat{\gamma}, \rho) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}, \hat{\gamma} \in \mathbb{R}, \rho \in W_1 \oplus W_2\}, \quad \dim \boldsymbol{V}_0(\gamma_0) = 10.$$

According to [11], we obtain

Theorem 4.1 *For* $\gamma_0 \in [0,6]$ *there exists a parameter-dependent center manifold* $\mathcal{M}(\gamma_0)$ *uniquely with* $\dim \mathcal{M}(\gamma_0) = \dim \boldsymbol{V}_0(\gamma_0)$.

5 Appendix

In this section we shall give expressions of mean curvature and Gaussian curvature in terms of ρ. Lemmata in this section are valid not only for surfaces in $\mathbb{R}^3$ but also for hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. As in section 2, we assume that a closed hypersurface is defined by $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \Phi(x) = 0\}$ locally, where the interior near the hypersurface is located in the side $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \Phi(x) > 0\}$. Assume also that $\nabla_x \Phi \neq 0$ everywhere near the hypersurface.

Lemma 5.1 *The mean curvature H and Gaussian curvature K are given by*

$$H = -\frac{1}{n}\operatorname{div}_x \left(\frac{\nabla_x \Phi}{\|\nabla_x \Phi\|} \right)\Bigg|_{\{x \mid \Phi(x)=0\}},$$

$$K = \mathcal{G}(\nabla_x \Phi, \operatorname{Hess}_x \Phi)|_{\{x \mid \Phi(x)=0\}}$$

where

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{p}, X) = \det{}_{n+1}\left(\|\boldsymbol{p}\|^{-1} (I_{n+1} - \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}}) X (I_{n+1} - \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}}) + \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}} \right),$$

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \|\boldsymbol{p}\|^{-1}\boldsymbol{p}$$

for $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{n+1}$ and $X \in \mathcal{S}^{n+1}$.

Proof. The assertion for the mean curvature is well-known. We give here the proof for the Gaussian curvature, which is an adapted version of [7, Lemma A]. We may assume $x = 0$, and

$$\boldsymbol{e}_{n+1} = -\|\nabla_x \Phi(0)\|^{-1} \nabla_x \Phi(0).$$

Introduce an orthonormal system $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ so that $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_{n+1}\}$ is an orthogonal basis in $\mathbb{R}^{n+1}$, and that the surface $\Phi(x) = 0$ is represented locally as a graph of a function $f : U \to \mathbb{R}$. Here U is a neighborhood of $0 \in \mathbb{R}^n$. Put $\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_n)$. Then eigenvalues of $\operatorname{Hess}_{\tilde{x}} f(0)$ are the principal curvatures of the surface at $x = 0$. Differentiating the relation

$$\Phi(\tilde{x}, f(\tilde{x})) = 0,$$

with respect to x_i $(i = 1, \cdots, n)$, we have

$$\Phi_{x_i}(\tilde{x}, f(\tilde{x})) + \Phi_{x_{n+1}}(\tilde{x}, f(\tilde{x})) f_{x_i}(\tilde{x}) = 0.$$

Differentiate with respect to x_j $(j = 1, \cdots, n)$, and we get

$$\Phi_{x_i x_j}(\tilde{x}, f(\tilde{x})) + \Phi_{x_i x_{n+1}}(\tilde{x}, f(\tilde{x})) f_{x_j}(\tilde{x}) + \Phi_{x_j x_{n+1}}(\tilde{x}, f(\tilde{x})) f_{x_i}(\tilde{x})$$
$$+ \Phi_{x_{n+1} x_{n+1}}(\tilde{x}, f(\tilde{x})) f_{x_i}(\tilde{x}) f_{x_j}(\tilde{x}) + \Phi_{x_{n+1}}(\tilde{x}, f(\tilde{x})) f_{x_i x_j}(\tilde{x}) = 0.$$

Since

$$f_{x_i}(0) = 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \quad \Phi_{x_{n+1}}(0) = -\|\nabla_x \Phi(0)\|,$$

we obtain

$$f_{x_i x_j}(0) = \|\nabla_x \Phi(0)\|^{-1} \Phi_{x_i x_j}(0).$$

We denote the set of all real-valued $j \times k$ matrices by $M_{j,k}(\mathbb{R})$, and $M_{jj}(\mathbb{R}) = M_j(\mathbb{R})$. Put

$$\boldsymbol{p} = \nabla_x \Phi(0), \quad X = \mathrm{Hess}_x \Phi(0) \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \quad E = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \in M_{n+1,n}(\mathbb{R}).$$

Then we have

$$\mathrm{Hess}_{\tilde{x}} f(0) = \|\nabla_x \Phi(0)\|^{-1}\, {}^t\!E \,\mathrm{Hess}_x \Phi(0) E = \|\boldsymbol{p}\|^{-1}\, {}^t\!E X E,$$

$$\boldsymbol{e}_{n+1} = -\|\boldsymbol{p}\|^{-1} \boldsymbol{p} = -\bar{\boldsymbol{p}}.$$

Since $(E\ \boldsymbol{e}_{n+1}) = I_{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$,

$$E\,{}^t\!E + \boldsymbol{e}_{n+1}\,{}^t\boldsymbol{e}_{n+1} = (E\ \boldsymbol{e}_{n+1}) \begin{pmatrix} {}^t\!E \\ {}^t\boldsymbol{e}_{n+1} \end{pmatrix} = I_{n+1}, \quad \boldsymbol{e}_{n+1}\,{}^t\boldsymbol{e}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{p}}\,{}^t\bar{\boldsymbol{p}} = \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}}$$

hold. Therefore

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{p}\|^{-1}\,{}^t\!E X E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= (E\, \boldsymbol{e}_{n+1}) \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{p}\|^{-1}\,{}^t\!E X E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\!E \\ {}^t\boldsymbol{e}_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \|\boldsymbol{p}\|^{-1} E\,{}^t\!E X E\,{}^t\!E + \boldsymbol{e}_{n+1}\,{}^t\boldsymbol{e}_{n+1} \\ &= \|\boldsymbol{p}\|^{-1} (I_{n+1} - \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}})\, X\, (I_{n+1} - \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}}) + \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}}, \end{aligned}$$

from which it follows that

$$K = \det{}_n \mathrm{Hess}_{\tilde{x}} f(0) = \det{}_{n+1} \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{p}\|^{-1}\,{}^t\!E X E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{G}(\boldsymbol{p}, X).$$

□

Let $y = (y_1, \cdots, y_{n+1})$ be an arbitrary (local) coordinate system on $\mathbb{R}^{n+1}$. We would like to know the expression of Gaussian curvature in this system. Choose the standard coordinate system $x = (x_1, \cdots, x_{n+1})$ so that

$$\Phi(0) = 0, \quad \partial_{x_{n+1}} = -\|\nabla_x \Phi(0)\|^{-1} \nabla_x \Phi(0),$$

$$\mathrm{span}\,\{\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_n}\} = \text{ the tangent space of the surface at } x = 0.$$

Put

$$\tilde{\Phi}(y) = \Phi(x(y)) \quad (\text{or } \Phi(x) = \tilde{\Phi}(y(x))), \quad g_{ij} = (\partial_{y_i}, \partial_{y_j})_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

We have

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

Let $\Gamma_{x}{}^{s}_{ij}$ and $\Gamma_{y}{}^{m}_{k\ell}$ be the Christoffel symbol with respect to the coordinate systems x and y respectively. Since

$$\left(\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}\Gamma_{y}{}^{m}_{k\ell}\right)\frac{\partial x_s}{\partial y_m} = \Gamma_{x}{}^{s}_{ij} = 0,$$

it holds that

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_k \partial y_\ell}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_m}\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_k \partial y_\ell} - \Gamma_{y}{}^{m}_{k\ell}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_m}\right).$$

Therefore we have with $\boldsymbol{p} = \nabla_x \Phi$,

$$(\bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}})_{ij} = \left(\|\nabla_x \Phi\|^{-2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) = \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_k}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_\ell}.$$

We multiply both sides by $\delta^{\lambda i}\frac{\partial y_\mu}{\partial x_\lambda}\delta^{j\rho}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_\rho}$. Because of $g^{k\ell} = \delta^{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}$, we get

$$\begin{aligned}
\delta^{\lambda i}\frac{\partial y_\mu}{\partial x_\lambda}(\bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}})_{ij}\,\delta^{j\rho}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_\rho} &= g^{k\mu}g^{\ell\nu}\|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_k}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_\ell} \\
&= \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2}\left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\mu \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\nu.
\end{aligned}$$

Furthermore, since $\delta_{ij} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}g_{k\ell}$, it holds that

$$(I_{n+1} - \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}})_{ij} = \left(g_{k\ell} - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_k}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_\ell}\right)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}.$$

Using $g^{k\ell} = \delta^{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}$ again, we get

$$((I_{n+1} - \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}})\,\mathrm{Hess}_x \Phi\,(I_{n+1} - \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}}))_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(g_{k\ell} - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_k} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_\ell}\right) \left(g_{st} - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_s} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_t}\right) \\
&\quad \times \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_p} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_u} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_q} \frac{\partial y_s}{\partial x_v} \frac{\partial y_t}{\partial x_j} \delta^{pu} \delta^{qv} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} - \Gamma_{y\alpha\beta}^{\ \gamma} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_\gamma}\right) \\
&= \left(g_{k\ell} - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_k} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_\ell}\right) \left(g_{st} - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_s} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_t}\right) \\
&\quad \times g^{\ell\alpha} g^{\beta s} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_t}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} - \Gamma_{y\alpha\beta}^{\ \gamma} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_\gamma}\right) \\
&= \left(\delta_k^\alpha - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} g^{\ell\alpha} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_k} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_\ell}\right) \left(\delta_t^\beta - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} g^{\beta s} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_s} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_t}\right) \\
&\quad \times \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_t}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} - \Gamma_{y\alpha\beta}^{\ \gamma} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_\gamma}\right) \\
&= \left\{\delta_k^\alpha - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\alpha \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_k}\right\} \left\{\delta_t^\beta - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\beta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_t}\right\} \\
&\quad \times \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_t}{\partial x_j} \left(\mathrm{Hess}_y \tilde{\Phi}\right)_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

Similarly we have

$$
\begin{aligned}
&\delta^{\lambda i} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\lambda} \left(\left(I_{n+1} - \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}}\right) \mathrm{Hess}_x \Phi \left(I_{n+1} - \bar{\boldsymbol{p}} \otimes \bar{\boldsymbol{p}}\right)\right)_{ij} \delta^{j\rho} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\rho} \\
&\quad = \left\{\delta_k^\alpha - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\alpha \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_k}\right\} \\
&\qquad \times \left\{\delta_t^\beta - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\beta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_t}\right\} g^{\mu k} g^{\nu t} \left(\mathrm{Hess}_y \tilde{\Phi}\right)_{\alpha\beta} \\
&\quad = \left\{g^{\alpha\mu} - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\alpha \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\mu\right\} \\
&\qquad \times \left\{g^{\beta\nu} - \|\nabla_y \tilde{\Phi}\|_g^{-2} \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\beta \left(\nabla_y \tilde{\Phi}\right)^\nu\right\} \left(\mathrm{Hess}_y \tilde{\Phi}\right)_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

Since

$$\det{}_{n+1}\left(\delta^{\lambda i}\frac{\partial y_\mu}{\partial x_\lambda}\right) = \det{}_{n+1}\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial x_\lambda}\right) = \det{}_{n+1}\left(\frac{\partial x_\lambda}{\partial y_\mu}\right)^{-1}$$
$$= \operatorname{sgn}\left\{\det{}_{n+1}\left(\frac{\partial x_\lambda}{\partial y_\mu}\right)\right\} g^{-\frac{1}{2}},$$

we obtain

$$\begin{aligned}
& g^{-1}\Big|_{\{y\,|\,\tilde{\Phi}(y)=0\}} K \\
&= \det{}_{n+1}\left\{\left(\delta^{\lambda i}\frac{\partial y_\mu}{\partial x_\lambda}\right)\right. \\
&\quad \times \left(\|\boldsymbol{p}\|^{-1}\left(I_{n+1}-\bar{\boldsymbol{p}}\otimes\bar{\boldsymbol{p}}\right)\operatorname{Hess}_x\Phi\left(I_{n+1}-\bar{\boldsymbol{p}}\otimes\bar{\boldsymbol{p}}\right)+\bar{\boldsymbol{p}}\otimes\bar{\boldsymbol{p}}\right) \\
&\quad \times \left.\left(\delta^{j\nu}\frac{\partial y_\rho}{\partial x_\nu}\right)\right\}\Bigg|_{\{y\,|\,\tilde{\Phi}(y)=0\}} \\
&= \det{}_{n+1}\left[\|\nabla_y\tilde{\Phi}\|_g^{-1}\left\{g^{\alpha\mu}-\|\nabla_y\tilde{\Phi}\|_g^{-2}\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)^\alpha\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)^\mu\right\}\right. \\
&\quad \times\left\{g^{\beta\nu}-\|\nabla_y\tilde{\Phi}\|_g^{-2}\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)^\beta\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)^\nu\right\}\left(\operatorname{Hess}_y\tilde{\Phi}\right)_{\alpha\beta} \\
&\quad \left.+\|\nabla_y\tilde{\Phi}\|_g^{-2}\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)^\mu\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)^\nu\right]\Bigg|_{\{y\,|\,\tilde{\Phi}(y)=0\}}.
\end{aligned}$$

Lowering indices μ and ν, we obtain

Lemma 5.2 *The Gaussian curvature is given by*

$$\begin{aligned}
K = g^{-1}\det{}_{n+1}&\left[\|\nabla_y\tilde{\Phi}\|_g^{-1}\left\{\delta_\mu^\alpha-\|\nabla_y\tilde{\Phi}\|_g^{-2}\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)^\alpha\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)_\mu\right\}\right. \\
&\quad\times\left\{\delta_\nu^\beta-\|\nabla_y\tilde{\Phi}\|_g^{-2}\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)^\beta\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)_\nu\right\}\left(\operatorname{Hess}_y\tilde{\Phi}\right)_{\alpha\beta} \\
&\quad\left.+\|\nabla_y\tilde{\Phi}\|_g^{-2}\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)_\mu\left(\nabla_y\tilde{\Phi}\right)_\nu\right]\Bigg|_{\{y\,|\,\tilde{\Phi}(y)=0\}}.
\end{aligned}$$

Lemmata 2.1 and 2.2 also hold for hypersurfaces with the replacement of 3 by $n+1$.

References

[1] Amann, H., *Quasilinear evolution equations and parabolic systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1) (1986), 191–227.

[2] Canham, P. B., *The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell*, J. Theor. Biol. **26** (1970), 61–81.

[3] Chow, S.-N. & J. K. Hale, "Methods of Bifurcation Theory", Grundlehren Math. Wiss. **251**, Springer, New York· Heidelberg· Berlin, 1982.

[4] Escher, J., U. F. Mayer & G. Simonett, *The surface diffusion flow for immersed hypersurfaces*, SIAM J. Math. Anal. **29** (6) (1998), 1419–1433.

[5] Evans, E. A., *Bending resistance and chemically induced moments in membrane bilayers*, Biophys. J. **14** (1974), 923–931.

[6] Helfrich, W., *Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible experiments*, Z. Naturforsch **28c** (1973), 693–703.

[7] Ishii, H. & T. Mikami, *A level set approach to the wearing process of a nonconvex stone*, Calc. Var. Partial Differential Equations **19** (1) (2004), 53–93.

[8] Kuwert, E. & R. Schätzle, *The Willmore flow with small initial energy*, J. Differential Geom. **57** (3) (2001), 409–441.

[9] Kuwert, E. & R. Schätzle, *shape Gradient flow for the Willmore functional*, Comm. Anal. Geom. **10** (2) (2002), 307–339.

[10] Nagasawa, T. & I. Takagi, *Bifurcating critical points of bending energy with constraints related to the shape of red blood cells*, Calc. Var. Partial Differential Equations **16** (1) (2003), 63–111.

[11] Simonett, G., *Invariant manifolds and bifurcation for quasilinear reaction-diffusion systems*, Nonlinear Anal. **23** (4), 515–544.

[12] Simonett, G., *Center manifolds for quasilinear reaction-diffusion systems*, Differential Integral Equations **8** (4) (1995), 753–796.

[13] Simonett, G., *The Willmore flow near spheres*, Differential Integral Equations **14** (8) (2001), 1005–1014.

Clebsch-Gordan 係数と対応する微分方程式の解のある漸近展開について

長澤 壮之

平成 17 年 2 月 23 日

概 要

このノートでは、Clebsch-Gordan 係数が Jacobi の微分方程式を差分化して得られる漸化式を満たす事と、その漸化式からある漸近公式を導く。第 1 節では、[2] に従って Clebsch-Gordan 係数について記述し、漸化式を導出する。第 2 節では、漸化式の連続版である Jacobi の微分方程式のある漸近展開を考察する。それを差分化する事で、第 3 節で Clebsch-Gordan 係数の漸近展開を証明する。第 4 節で、[1] で現れた Clebsch-Gordan 係数について、漸近展開を具体的に求める。

1 Clebsch-Gordan 係数について

この節では [2] に従って Clebsch-Gordan 係数について記述する。

1.1 Euler 角

$$SL(2,\mathbf{C}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right) \in M_2(\mathbf{C}) \,\middle|\, \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\},$$

$$SU(2) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{array} \right) \in SL(2,\mathbf{C}) \right\}$$

とおく。すなわち、

$$u = \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{array} \right) \in SU(2)$$

のとき、$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ である。$\alpha\beta \neq 0$ のとき、

$$|\alpha| = \cos\frac{\theta}{2}, \quad \operatorname{Arg}\alpha = \frac{\phi+\psi}{2}, \quad \operatorname{Arg}\beta = \frac{\phi-\psi+\pi}{2}$$

で ϕ, θ, ψ を定義し、Euler 角 と呼ぶ。但し、

$$0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad -2\pi \leq \psi < 2\pi$$

とする。このとき、$|\beta| = \sin\frac{\theta}{2}$ であるので、

$$u = \left(\begin{array}{cc} \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\phi+\psi)}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\phi-\psi)}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\psi-\phi)}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i(\phi+\psi)}{2}} \end{array} \right)$$

となる。これを $u(\phi,\theta,\psi)$ と書く。

$$u(\phi,\theta,\psi)=\begin{pmatrix} e^{\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\psi}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= u(\phi,0,0)u(0,\theta,0)u(0,0,\psi)$$

である事が分かる。また、

$$\cos\theta = 2|\alpha|^2-1,\quad e^{i\phi}=-\frac{\alpha\beta i}{|\alpha||\beta|},\quad e^{\frac{i\psi}{2}}=\frac{\alpha e^{-\frac{i\phi}{2}}}{|\alpha|}$$

である。

Euler 角を複素数に拡張して考えると、

$$\{u(\phi,\theta,\psi)\mid 0\le\Re\phi<2\pi,\ 0\le\Re\theta\le\pi,\ -2\pi\le\Re\psi<2\pi\}=SL(2,\mathbb{C})$$

となる。この意味で、$SL(2,\mathbb{C})$ は $SU(2)$ の複素化となっている。

1.2 既約表現 T_ℓ

ℓ を整数または半整数とする。$\mathbb{C}^2$ 上の斉次 2ℓ 次多項式全体を $\mathfrak{H}_\ell$ で表す。すなわち、$f\in\mathfrak{H}_\ell$ であるとき、

$$f(z_1,z_2)=\sum_{n=-\ell}^{\ell} a_n z_1^{\ell-n} z_2^{\ell+n}$$

と書き表される。ここで、和は ℓ が整数ならば、$|n|\le\ell$ なる整数 n に関して和をとったものであり、ℓ が半整数ならば、$|n|\le\ell$ なる半整数 n に関して和をとったものである。以後も和に関しては同様に規約するが、いちいちこれを断らない。$f(z_1,1)=\phi(z_1)$ おくと、

$$f(z_1,z_2)=z_2^{2\ell}\phi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

と書く事が出来る。ϕ は $\mathbb{C}$ 上の 2ℓ 次多項式である（「高々 2ℓ 次」という意味ではない）。そこで、$\mathbb{C}$ 上の 2ℓ 次多項式全体を同じ文字 $\mathfrak{H}_\ell$ で表す事にする。

$g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$ に対し、

$$T_\ell(g)f(z_1,z_2)=f(\alpha z_1+\gamma z_2,\beta z_1+\delta z_2),\quad T_\ell(g)\phi(z)=(\beta z+\delta)^{2\ell}\phi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)$$

で $T_\ell(g)$ を定義する。

$$T_\ell(g)f(z_1,z_2)=z_2^{2\ell}T_\ell(g)\phi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

である。$T_\ell(g)(\mathfrak{H}_\ell)\subset\mathfrak{H}_\ell$ である。また、容易に、

$$T_\ell(g_1)T_\ell(g_2)=T_\ell(g_1g_2)$$

である事が分かる。よって、$T_\ell(g)$ は $SL(2,\mathbb{C})$ の $\mathfrak{H}_\ell$ 上の表現である。

事実 1.1 $T_\ell(g)$ は $SL(2,\mathbb{C})$ の $\mathfrak{H}_\ell$ 上の既約表現である。表現を $SU(2)$ に制限したものは、$SU(2)$ の $\mathfrak{H}_\ell$ 上の既約表現である。

1.3 T_ℓ の不変内積

この節では、$\mathfrak{H}_\ell$ は $\mathbb{C}$ 上の 2ℓ 次多項式全体とする。これは、もちろん有限次元ベクトル空間であり、$SU(2)$ はコンパクトであるので、不変内積 $(\cdot,\cdot)$ が存在する。すなわち、任意の $g \in SU(2)$, ϕ, $\psi \in \mathfrak{H}_\ell$ に対して、

$$(T_\ell(g)\phi, T_\ell(g)\psi) = (\phi, \psi)$$

が成り立つような $\mathfrak{H}_\ell$ 上の内積である。$\mathfrak{H}_\ell$ の基底として、$\{x^{\ell-k} \mid -\ell \le k \le \ell\}$ が採れるので、$\left(x^{\ell-k}, x^{\ell-m}\right)$ の値が分かれば、内積は決定する。

$g \in SU(2)$ として、

$$g = g(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}$$

を考える。

$$T_\ell(g(t))x^{\ell-k} = \left(e^{-\frac{it}{2}}\right)^{2\ell}\left(\frac{e^{\frac{it}{2}}x}{e^{-\frac{it}{2}}}\right)^{\ell-k} = e^{-ikt}x^{\ell-k}$$

であるので、

$$\left(x^{\ell-k}, x^{\ell-m}\right) = \left(T_\ell(g(t))x^{\ell-k}, T_\ell(g(t))x^{\ell-m}\right) = e^{-i(k-m)t}\left(x^{\ell-k}, x^{\ell-m}\right)$$

となる。これより、$k \neq m$ のとき、

$$\left(x^{\ell-k}, x^{\ell-m}\right) = 0$$

である事が分かる。

次に、g として、

$$g = g(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

を考える。

$$\begin{aligned} T_\ell(g(t))x^{\ell-k} &= \left(-x\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)^{2\ell}\left(\frac{x\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}}{-x\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}}\right)^{\ell-k} \\ &= \left(-x\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)^{\ell+k}\left(x\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)^{\ell-k} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T_\ell(g(t))x^{\ell-k} = &-\frac{\ell+k}{2}\left(-x\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)^{\ell+k-1}\left(x\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)^{\ell-k+1} \\ &+\frac{\ell-k}{2}\left(-x\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)^{\ell+k+1}\left(x\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)^{\ell-k-1}, \end{aligned}$$

$$\left.\frac{d}{dt}T_\ell(g(t))x^{\ell-k}\right|_{t=0} = -\frac{\ell+k}{2}x^{\ell-k+1} + \frac{\ell-k}{2}x^{\ell-k-1} \tag{1.1}$$

となる。そこで、

$$2\left(x^{\ell-k}, x^{\ell-k+1}\right) = 2\left(T_\ell(g(t))x^{\ell-k}, T_\ell(g(t))x^{\ell-k+1}\right)$$

の両辺を t で微分して、$t=0$ とおくと、

$$\begin{aligned}
0 = & \left(-(\ell+k)x^{\ell-k+1}+(\ell-k)x^{\ell-k-1}, x^{\ell-k+1}\right) \\
& + \left(x^{\ell-k}, -(\ell+k+1)x^{\ell-k+2}+(\ell-k+1)x^{\ell-k}\right) \\
= & -(\ell+k)\left(x^{\ell-k+1}, x^{\ell-k+1}\right)+(\ell-k+1)\left(x^{\ell-k}, x^{\ell-k}\right)
\end{aligned}$$

を得る。不変内積は定数倍の自由度がある。そこで、$(1,1)=(2\ell)!$ となるように定めると、上の漸化式より、$|k|\leq\ell$ なる k に対し、

$$\left(x^{\ell-k}, x^{\ell-k}\right)=(\ell-k)!(\ell+k)!$$

が得られる。

以上で、不変内積は決定した。

$$\psi_k(x)=\frac{x^{\ell-k}}{\sqrt{(\ell-k)!(\ell+k)!}}$$

とおくと、$\{\psi_k(x) \mid -\ell\leq k\leq\ell\}$ が不変内積に関して $\mathfrak{H}_k$ の正規直交基底となる。

1.4 $T_\ell(g)$ の行列要素

$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$ とし、

$$t^\ell_{mn}(g)=(T_\ell(g)\psi_n, \psi_m)$$

とおく。

$$T_\ell(g)x^{\ell-n}=(\alpha x+\gamma)^{\ell-n}(\beta x+\delta)^{\ell+n}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
t^\ell_{mn}(g) &= \frac{\left(T_\ell(g)x^{\ell-n}, x^{\ell-m}\right)}{\sqrt{(\ell-m)!(\ell+m)!(\ell-n)!(\ell+n)!}} \\
&= \frac{\left((\alpha x+\gamma)^{\ell-n}(\beta x+\delta)^{\ell+n}, x^{\ell-m}\right)}{\sqrt{(\ell-m)!(\ell+m)!(\ell-n)!(\ell+n)!}} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell-n}\sum_{j=0}^{\ell+n} {}_{\ell-n}C_i\ {}_{\ell+n}C_j\alpha^i\beta^j\gamma^{\ell-n-i}\delta^{\ell+n-j}\left(x^{i+j}, x^{\ell-m}\right)}{\sqrt{(\ell-m)!(\ell+m)!(\ell-n)!(\ell+n)!}}
\end{aligned}$$

分子は $i+j=\ell-m$ 以外の項は消えてしまう。$0\le \ell-m-j\le \ell-n$ のとき、$i=\ell-m-j$ の項のみ残る。従って、$M=\max\{0,n-m\}$, $N=\min\{\ell-m,\ell+n\}$ としたとき、

$$\begin{aligned}
t^{\ell}_{mn}(g) &= \sqrt{\frac{(\ell-m)!(\ell+m)!}{(\ell-n)!(\ell+n)!}}\sum_{j=M}^{N} {}_{\ell-n}C_{\ell-m-j}\ {}_{\ell+n}C_j \alpha^{\ell-m-j}\beta^j\gamma^{m+j-n}\delta^{\ell+n-j} \\
&= \sqrt{(\ell-m)!(\ell+m)!(\ell-n)!(\ell+n)!}\ \alpha^{\ell-m}\gamma^{m-n}\delta^{\ell+n} \\
&\quad \times \sum_{j=M}^{N}\frac{1}{j!(\ell-m-j)!(\ell+n-j)!(m-n+j)!}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\right)^j
\end{aligned}$$

となる。指標は、

$$\chi_\ell(g)=\sum_{m=-\ell}^{\ell} t^{\ell}_{mm}(g)$$

で計算される。
$u=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\in SU(2)$ の固有値は、

$$\lambda_\pm=\Re\alpha\pm i\sqrt{1-(\Re\alpha)^2}$$

である。

$$\cos\frac{t}{2}=\Re\alpha$$

で t を定めると、

$$\lambda_\pm=e^{\pm\frac{it}{2}}$$

となる。u は適当な $v\in SU(2)$ を用いて、

$$v^{-1}uv=\mathrm{diag}\ \left(e^{\frac{it}{2}},e^{-\frac{it}{2}}\right)$$

と対角化される。指標は共役類で決まるので、

$$\begin{aligned}
\chi_\ell(u) &= \chi_\ell\left(\mathrm{diag}\ \left(e^{\frac{it}{2}},e^{-\frac{it}{2}}\right)\right)=\sum_{m=-\ell}^{\ell} t^{\ell}_{mm}\left(\mathrm{diag}\ \left(e^{\frac{it}{2}},e^{-\frac{it}{2}}\right)\right) \\
&= \sum_{m=-\ell}^{\ell} e^{\frac{i(\ell-m)t}{2}}e^{-\frac{i(\ell+m)t}{2}}=\sum_{m=-\ell}^{\ell} e^{-imt} \\
&= \frac{e^{i(\ell+1)t}-e^{-i\ell t}}{e^{it}-1}=\frac{e^{-i(\ell+1)t}-e^{i\ell t}}{e^{-it}-1}=\frac{\sin\left(\ell+\dfrac{1}{2}\right)t}{\sin\dfrac{t}{2}}
\end{aligned}$$

となる。

1.5 $T_\ell(u)$ のテンソル積

この節では、$\mathfrak{H}_{\ell_i}$ を簡単に $\mathfrak{H}_i$ で表す。$\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ 上の表現

$$T(u) = T_{\ell_1}(u) \otimes T_{\ell_2}(u)$$

を考える。$u \in SU(2)$ とし、その固有値を $e^{\pm\frac{it}{2}}$ とする。このとき、指標は、

$$\chi(u) = \chi_{\ell_1}(u)\chi_{\ell_2}(u) = \sum_{k=-\ell_1}^{\ell_1} e^{-ikt} \sum_{m=-\ell_2}^{\ell_2} e^{-imt}$$

である。$\varepsilon = e^{-it}$ とおく。$t \neq 0$ のとき、

$$\sum_{k=-\ell_1}^{\ell_1} e^{-ikt} = \frac{\varepsilon^{\ell_1+1} - \varepsilon^{-\ell_1}}{\varepsilon - 1}$$

であるので、

$$\chi_{\ell_1}(u)\chi_{\ell_2}(u) = \frac{\varepsilon^{\ell_1+1} - \varepsilon^{-\ell_1}}{\varepsilon - 1} \sum_{m=-\ell_2}^{\ell_2} \varepsilon^m = \frac{1}{\varepsilon - 1}\left(\sum_{m=-\ell_2}^{\ell_2} \varepsilon^{\ell_1+m+1} - \sum_{n=-\ell_2}^{\ell_2} \varepsilon^{n-\ell_1}\right)$$

となる。$\ell_1 \geq \ell_2$ のとき、括弧内の第一の和について $\ell = \ell_1 + m$ とおき、第二の和について $\ell = \ell_1 - n$ とおくと、

$$\chi_{\ell_1}(u)\chi_{\ell_2}(u) = \sum_{\ell=\ell_1-\ell_2}^{\ell_1+\ell_2} \frac{\varepsilon^{\ell+1} - \varepsilon^{-\ell}}{\varepsilon - 1} = \sum_{\ell=\ell_1-\ell_2}^{\ell_1+\ell_2} \chi_\ell(u)$$

となる。同様に、$\ell_1 \leq \ell_2$ のときは、

$$\chi_{\ell_1}(u)\chi_{\ell_2}(u) = \sum_{\ell=\ell_2-\ell_1}^{\ell_1+\ell_2} \frac{\varepsilon^{\ell+1} - \varepsilon^{-\ell}}{\varepsilon - 1} = \sum_{\ell=\ell_2-\ell_1}^{\ell_1+\ell_2} \chi_\ell(u)$$

となる。従って、ℓ_1 と ℓ_2 の大小関係に拘わらず、

$$\chi_{\ell_1}(u)\chi_{\ell_2}(u) = \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} \chi_\ell(u)$$

となる。この式が $t = 0$ の場合も成立する事は、容易に分かる。従って、

$$T_{\ell_1}(u) \otimes T_{\ell_2}(u) = \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} T_\ell(u)$$

である事が分かる。

$T_\ell(u)$ は $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ 内のある不変部分空間 $\mathfrak{F}_\ell$ 上の既約表現である。従って、

$$\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2 = \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} \mathfrak{F}_\ell$$

という直和分解が存在する。$\{\boldsymbol{f}_j \mid -\ell_1 \leq j \leq \ell_1\}$ と $\{\boldsymbol{h}_k \mid -\ell_2 \leq k \leq \ell_2\}$ をそれぞれ $\mathfrak{H}_1$ と $\mathfrak{H}_2$ の正規直交基とする。このとき、

$$\{\boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{h}_k \mid -\ell_1 \leq j \leq \ell_1,\ -\ell_2 \leq k \leq \ell_2\}$$

は $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ の正規直交基となる。$t^{\ell_1}_{jj'}(u)$ を基底 $\{\boldsymbol{f}_j\}$ に関する $T_{\ell_1}(u)$ の行列要素とする。すなわち、

$$t^{\ell_1}_{jj'}(u) = \left(T_{\ell_1}(u)\boldsymbol{f}_{j'}, \boldsymbol{f}_j\right)_{\mathfrak{H}_1}$$

である。ここで、$(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}_1}$ は $\mathfrak{H}_1$ 上の不変内積である。同様に、

$$t^{\ell_2}_{kk'}(u) = (T_{\ell_2}(u)\boldsymbol{h}_{k'}, \boldsymbol{h}_k)_{\mathfrak{H}_2}$$

とする。$T(u)$ の基底 $\{\boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{h}_k\}$ に関する行列要素を $\alpha_{(jk),(j'k')}(u)$ と書くと、

$$\begin{aligned}
\alpha_{(jk),(j'k')}(u) &= \left(T(u)(\boldsymbol{f}_{j'} \otimes \boldsymbol{h}_{k'}), \boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{h}_k\right)_{\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2} \\
&= \left(T_{\ell_1}(u)\boldsymbol{f}_{j'} \otimes T_{\ell_2}(u)\boldsymbol{h}_{k'}, \boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{h}_k\right)_{\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2} \\
&= \left(T_{\ell_1}(u)\boldsymbol{f}_{j'}, \boldsymbol{f}_j\right)_{\mathfrak{H}_1} (T_{\ell_2}(u)\boldsymbol{h}_{k'}, \boldsymbol{h}_k)_{\mathfrak{H}_2} = t^{\ell_1}_{jj'}(u) t^{\ell_2}_{kk'}(u)
\end{aligned}$$

となる。

$\mathfrak{F}_\ell$ の正規直交基を $\left\{\boldsymbol{a}^\ell_m \mid -\ell \le m \le \ell\right\}$ とする。このとき、

$$\left\{\boldsymbol{a}^\ell_m \mid |\ell_1 - \ell_2| \le \ell \le \ell_1 + \ell_2,\ -\ell \le m \le \ell\right\}$$

は、$\displaystyle\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} \mathfrak{F}_\ell = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ の正規直交基である。この基に関する $T(u)$ の行列要素を $\beta_{(\ell m),(\ell' m')}(u)$ と書く。すなわち、

$$\beta_{(\ell m),(\ell' m')}(u) = \left(T(u)\boldsymbol{a}^{\ell'}_{m'}, \boldsymbol{a}^\ell_m\right)_{\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2}$$

である。$\displaystyle\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} \mathfrak{F}_\ell$ は直和かつ直交分解であるので、

$$\beta_{(\ell m),(\ell' m')}(u) = \delta_{\ell\ell'} \left(T_\ell(u)\boldsymbol{a}^\ell_{m'}, \boldsymbol{a}^\ell_m\right)_{\mathfrak{F}_\ell} = \delta_{\ell\ell'} t^\ell_{mm'}(u)$$

となる。

$\left\{\boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{h}_k\right\}$ と $\left\{\boldsymbol{a}^\ell_m\right\}$ は共に $\{\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2\}$ の正規直交基であるので、ある直交行列 $C = \left(C_{(\ell m),(jk)}\right)$ を用いて、

$$\boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{h}_k = \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{(\ell m),(jk)} \boldsymbol{a}^\ell_m,$$

$$\boldsymbol{a}^\ell_m = \sum_{j=-\ell_1}^{\ell_1} \sum_{k=-\ell_2}^{\ell_2} \overline{C_{(\ell m),(jk)}} \boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{h}_k$$

と変換される。C の ℓ_1 と ℓ_2 の依存性を明示するため、$C_{(\ell m),(jk)}$ を、

$$C_{(\ell m),(jk)} = C(\ell_1, \ell_2, \ell; j, k, m) = C(\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{j})$$

と書き、Clebsch-Gordan **係数** と呼ぶ。ここで、

$$\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell), \quad \boldsymbol{j} = (j, k, m)$$

である。

1.6 Clebsch-Gordan 係数の計算の方針

z_1, z_2, z_3 を絶対値が 1 である複素数とする。$\{z_1\boldsymbol{f}_j\}$, $\{z_2\boldsymbol{h}_k\}$, $\{z_3\boldsymbol{a}^{\ell}_m\}$ はそれぞれ $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{F}_\ell$ の正規直交基になる。このことから、Clebsch-Gordan 係数は、絶対値 1 の複素数倍の不定性がある事が分かる。そこで、以後は、

$$C(\ell_1,\ell_2,\ell;\ell_1,-\ell_2,\ell_1-\ell_2) \geq 0 \tag{1.2}$$

となるように定める事にする。

前項の結果より、

$$\begin{aligned}
&t^{\ell_1}_{jj'}(u)t^{\ell_2}_{kk'}(u)\\
&= \alpha_{(jk),(j'k')}(u)\\
&= \left(T(u)\left(\boldsymbol{f}_{j'}\otimes\boldsymbol{h}_{k'}\right),\boldsymbol{f}_j\otimes\boldsymbol{h}_k\right)_{\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2}\\
&= \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\sum_{\ell'=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sum_{m'=-\ell'}^{\ell'}\left(C_{(\ell'm'),(j'k')}T(u)\boldsymbol{a}^{\ell'}_{m'},C_{(\ell m),(jk)}\boldsymbol{a}^{\ell}_{m}\right)_{\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2}\\
&= \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\sum_{\ell'=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} C_{(\ell'm'),(j'k')}\beta_{(\ell m),(\ell'm')}\overline{C_{(\ell m),(jk)}}\\
&= \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\sum_{\ell'=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} C_{(\ell'm'),(j'k')}\delta_{\ell\ell'}t^{\ell}_{mm'}(u)\overline{C_{(\ell m),(jk)}}\\
&= \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sum_{m'=-\ell}^{\ell} C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{j}')\overline{C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{j})}t^{\ell}_{mm'}(u)
\end{aligned}$$

となる。$\dim\mathfrak{F}_\ell = 2\ell+1$ であるので、群のユニタリー表現の一般論より、$SU(2)$ 上の不変測度 du が存在して、その測度に関して $\left\{\sqrt{2\ell+1}\,t^{\ell}_{mm'}(\cdot)\right\}$ が完全正規直交基となる事が分かる。従って、

$$C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{j}')\overline{C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{j})} = (2\ell+1)\int_{SU(2)} t^{\ell_1}_{jj'}(u)t^{\ell_2}_{kk'}(u)\overline{t^{\ell}_{mm'}(u)}\,du \tag{1.3}$$

を得る。$t^{\ell_1}_{jj'}(u)$ の具体的な表示が求められれば、Clebsch-Gordan 係数を計算する事が出来る。$\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}$ とおくと、

$$|C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{j})|^2 = (2\ell+1)\int_{SU(2)} t^{\ell_1}_{jj}(u)t^{\ell_2}_{kk}(u)\overline{t^{\ell}_{mm}(u)}\,du$$

となる。特に、$\boldsymbol{j}=(\ell_1,-\ell_2,\ell_1-\ell_2)$ であるとき、

$$\begin{aligned}
&C(\ell_1,\ell_2,\ell;\ell_1,-\ell_2,\ell_1-\ell_2)\\
&= \sqrt{(2\ell+1)\int_{SU(2)} t^{\ell_1}_{\ell_1\ell_1}(u)t^{\ell_2}_{(-\ell_2)(-\ell_2)}(u)\overline{t^{\ell}_{(\ell_1-\ell_2)(\ell_1-\ell_2)}(u)}\,du}
\end{aligned}$$

によって、$C(\ell_1,\ell_2,\ell;\ell_1,-\ell_2,\ell_1-\ell_2)$ が決定する。

以上の計算を実行するためには、不変測度 du を知ることと、$t^{\ell_1}_{jj'}(u)$ の表示式を知る必要がある。

1.7　不変測度

$SU(2)$ 上の不変測度 du は、$SU(2)$ 上の連続関数 f と u_0 に対して、

$$\int_{SU(2)} f(u)\,du = \int_{SU(2)} f(u_0u)\,du = \int_{SU(2)} f(uu_0)\,du = \int_{SU(2)} f(u^{-1})\,du$$

を満たす。また、

$$\int_{SU(2)} du = 1$$

を満たす様に正規化する。

まず、

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; |\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0 \right\}$$

なる群を考える。

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in G, \quad u_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ -\bar{\beta}_0 & \bar{\alpha}_0 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

とすると、

$$uu_0 = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\bar{\beta}' & \bar{\alpha}' \end{pmatrix} \in G, \quad \begin{cases} \alpha' = \alpha_0\alpha - \bar{\beta}_0\beta, \\ \beta' = \beta_0\alpha + \bar{\alpha}_0\beta \end{cases}$$

となる。

注意 1.1 [2, p. 159] では、誤って $\beta' = \beta_0\beta + \bar{\alpha}_0\beta$ となっている。

$\det u_0 = 1$ であるので、G 上の測度 $dg = d\alpha d\bar{\alpha} d\beta d\bar{\beta}$ は $u_0 \in SU(2)$ を右から掛ける演算で不変である。$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \beta = \beta_1 + i\beta_2$ とおくと

$$dg = 4d\alpha_1 d\alpha_2 d\beta_1 d\beta_2$$

である。

$$\alpha = r\cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\phi+\psi)}{2}}, \quad \beta = ir\sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\phi-\psi)}{2}}$$

で r, ϕ, θ, ψ を定義する。$r = 1$ のとき、$u \in SU(2)$ であり、ϕ, θ, ψ は u の Euler 角である。簡単な計算で、

$$d\alpha d\bar{\alpha} d\beta d\bar{\beta} = \frac{1}{2} r^3 \sin\theta\, dr d\theta d\phi d\psi$$

である事が分かる。$SU(2)$ は $r = 1$ で特徴付けられるので、

$$\int_{SU(2)} f(u)\,du = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-2\pi}^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\phi, \theta, \psi)\, \sin\theta\, d\theta d\phi d\psi$$

となる。ここで、$f(u(\phi, \theta, \psi))$ を単に $f(\phi, \theta, \psi)$ を書いた。$\dfrac{1}{16\pi^2}$ は、全測度が 1 となるように正規化した定数である。この測度は、構成の方法から右不変である。$SU(2)$ はコンパクト群であるので、左不変でもある。従って、

$$du = \frac{1}{16\pi^2} \sin\theta\, d\theta d\phi d\psi \tag{1.4}$$

が求める不変測度である。

1.8 $t^\ell_{mn}(u)$ の表示式

$g \in SL(2,\mathbb{C})$ とする。Euler 角を用いて、

$$g(\phi,\theta,\psi) = g(\phi,0,0)g(0,\theta,0)g(0,0,\psi)$$

と分解する。これより、

$$T_\ell(g(\phi,\theta,\psi)) = T_\ell(g(\phi,0,0))T_\ell(g(0,\theta,0))T_\ell(g(0,0,\psi))$$

が成り立つ。ここで、

$$g(\phi,0,0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

である。§8.3 で見たように、$x^{\ell-n} \in \mathfrak{H}_\ell$ に対して、

$$T_\ell(g(\phi,0,0))x^{\ell-n} = e^{-in\phi}x^{\ell-n}$$

である。ゆえに、

$$t^\ell_{mn}(g(\phi,0,0)) = e^{-in\phi}\delta_{mn}$$

である。$g(0,0,\psi) = g(\psi,0,0)$ であるので、

$$t^\ell_{mn}(g(0,0,\psi)) = e^{-in\psi}\delta_{mn}$$

も分かる。$t^\ell_{mn}(g(0,\theta,0))$ を簡単に $t^\ell_{mn}(\theta)$ と略記する。このとき、

$$t^\ell_{mn}(g) = \sum_{i=-\ell}^{\ell}\sum_{j=-\ell}^{\ell} t^\ell_{mi}(g(\phi,0,0))t^\ell_{ij}(\theta)t_{jn}(g(0,0,\psi)) = e^{-i(m\phi+n\psi)}t^\ell_{mn}(\theta)$$

となる。

$$g(0,\theta,0) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & i\sin\dfrac{\theta}{2} \\ i\sin\dfrac{\theta}{2} & \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

であるので、$t^\ell_{mn}(\theta)$ を求める為には、§8.4 で得られた式に

$$\alpha = \delta = \cos\frac{\theta}{2},\quad \beta = \gamma = i\sin\frac{\theta}{2}$$

を代入すればよい。その結果、

$$t^\ell_{mn}(\theta) = i^{-m-n}\sqrt{\frac{(\ell-m)!(\ell-n)!}{(\ell+m)!(\ell+n)!}}\cot^{m+n}\frac{\theta}{2}$$

$$\times \sum_{j=\max\{m,n\}}^{\ell} \frac{(\ell+j)!i^{2j}}{(\ell-j)!(j-m)!(j-n)!}\sin^{2j}\frac{\theta}{2}$$

を得る。ここで、$0 \le \Re\theta < \pi$ である。この範囲で、

$$\cot\frac{\theta}{2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

と表されるので、$t^{\ell}_{mn}(\theta)$ は $\cos\theta$ の関数と考える事が出来る。そこで、

$$t^{\ell}_{mn}(\theta) = P^{\ell}_{mn}(\cos\theta)$$

で P^{ℓ}_{mn} を定義する。これより、

$$t^{\ell}_{mn}(g) = e^{-i(m\phi+n\psi)} P^{\ell}_{mn}(\cos\theta) \tag{1.5}$$

となる。

$\cos\theta = z$ とおくと、

$$\begin{aligned} P^{\ell}_{mn}(z) &= i^{-m-n}\sqrt{\frac{(\ell-m)!(\ell-n)!}{(\ell+m)!(\ell+n)!}}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{m+n}{2}} \\ &\times \sum_{j=\max\{m,n\}}^{\ell} \frac{(\ell+j)!i^{2j}}{(\ell-j)!(j-m)!(j-n)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{j} \end{aligned} \tag{1.6}$$

となる。$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{m+n}{2}}$ を一価に定める為に、複素平面に実軸上の 2 本の半直線 $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$ に沿ったカットを入れて考える。

$t^{\ell}_{mn}(g)$, $P^{\ell}_{mn}(z)$ の別の表現を求める。$t^{\ell}_{mn}(g)$ は、

$$T_{\ell}(g)\psi_n(x) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} t^{\ell}_{mn}(g)\psi_m(x)$$

で定義される。$T_{\ell}(g)$ の定義より、

$$T_{\ell}(g)\psi_n(x) = \frac{T_{\ell}(g)x^{\ell-n}}{\sqrt{(\ell-n)!(\ell+n)!}} = \frac{(\alpha x+\gamma)^{\ell-n}(\beta x+\delta)^{\ell+n}}{\sqrt{(\ell-n)!(\ell+n)!}}$$

である。$T_{\ell}(g)\psi_n(x)$ の Taylor 展開を考えると、

$$t^{\ell}_{mn}(g) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-n)!(\ell+n)!(\ell-m)!}}\,\frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}\left\{(\alpha x+\gamma)^{\ell-n}(\beta x+\delta)^{\ell+n}\right\}\Big|_{x=0}$$

を得る。$y = \alpha(\beta x+\delta)-1$ とおく。$\alpha\delta-\beta\gamma = 1$ に注意すると、

$$t^{\ell}_{mn}(g) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-n)!(\ell+n)!(\ell-m)!}}\,\frac{\beta^{n-m}}{\alpha^{n+m}}\,\frac{d^{\ell-m}}{dy^{\ell-m}}\left\{y^{\ell-n}(y+1)^{\ell+n}\right\}\Big|_{y=\beta\gamma}$$

を得る。

$$\alpha = \delta = \cos\frac{\theta}{2}, \quad \beta = \gamma = i\sin\frac{\theta}{2}, \quad \cos\theta = z$$

とおく。

$$\alpha^{n+m} = \left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}} = \left(\frac{1-z}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}},$$

$$\beta^{n-m} = i^{n-m}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{n-m}{2}} = i^{n-m}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{n-m}{2}},$$

$$\frac{d^{\ell-m}}{dy^{\ell-m}}\left\{y^{\ell-n}(y+1)^{\ell+n}\right\}\bigg|_{y=\beta\gamma} = \frac{d^{\ell-m}}{dy^{\ell-m}}\left\{y^{\ell-n}(y+1)^{\ell+n}\right\}\bigg|_{y=\frac{z-1}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^{\ell-n}}{2^{\ell+m}}\frac{d^{\ell-m}}{dz^{\ell-m}}\left\{(1-z)^{\ell-n}(z+1)^{\ell+n}\right\}$$

であるので、

$$P^{\ell}_{mn}(z) = \frac{(-1)^{\ell-n}i^{n-m}}{2^{\ell}}\sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-n)!(\ell+n)!(\ell-m)!}} \tag{1.7}$$

$$\times(1+z)^{-\frac{n+m}{2}}(1-z)^{\frac{n-m}{2}}\frac{d^{\ell-m}}{dz^{\ell-m}}\left\{(1-z)^{\ell-n}(z+1)^{\ell+n}\right\}$$

を得る。

1.9 Clebsch-Gordan 係数の計算

§8.8 で求めた $t^{\ell}_{mn}(g)$ の表示式 (1.5) を §8.6 で導いた式 (1.3) に代入する。§8.7 で求めた不変測度 (1.4) を用いると、

$$C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{j}')\overline{C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{j})} = \frac{2\ell+1}{16\pi^2}\int_{-2\pi}^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\{(j+k-m)\phi+(j'+k'-m')\psi\}}$$

$$\times P^{\ell_1}_{jj'}(\cos\theta)P^{\ell_2}_{kk'}(\cos\theta)\overline{P^{\ell}_{mm'}(\cos\theta)}\sin\theta\, d\theta d\phi d\psi$$

$$= \frac{(2\ell+1)\delta_{(j+k)m}\delta_{(j'+k')m'}}{2}\int_{-1}^{1}P^{\ell_1}_{jj'}(x)P^{\ell_2}_{kk'}(x)\overline{P^{\ell}_{mm'}(x)}\,dx$$

となる。従って、$j+k=m$, $j'+k'=m'$ 以外の場合は、Clebsch-Gordan 係数は 0 である。そこで、以後は、

$$\boldsymbol{\ell}=(\ell_1,\ell_2,\ell),\quad \boldsymbol{j}=(j,k,j+k),\quad \boldsymbol{j}'=(j',k',j'+k')$$

とし、

$$C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{j}')\overline{C(\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{j})} = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1}P^{\ell_1}_{jj'}(x)P^{\ell_2}_{kk'}(x)\overline{P^{\ell}_{(j+k)(j'+k')}(x)}\,dx \tag{1.8}$$

の計算をもっぱら考える。

$j'=\ell_1$, $k'=\ell_2$ の場合を考える。(1.6) より、

$$P^{\ell_1}_{j\ell_1}(x) = \frac{i^{\ell_1-j}}{2^{\ell_1}}\sqrt{\frac{(2\ell_1)!}{(\ell_1-j)!(\ell_1+j)!}}(1-x)^{\frac{\ell_1-j}{2}}(1+x)^{\frac{\ell_1+j}{2}},$$

$$P^{\ell_2}_{k(-\ell_2)}(x) = \frac{i^{\ell_2+k}}{2^{\ell_2}}\sqrt{\frac{(2\ell_2)!}{(\ell_2+k)!(\ell_2-k)!}}(1-x)^{\frac{\ell_2+k}{2}}(1+x)^{\frac{\ell_2-k}{2}}$$

である。また、(1.7) より

$$P^{\ell}_{(j+k)(\ell_1-\ell_2)}(x) = \frac{i^{-j-k-\ell_1+\ell_2+2\ell}}{2^{\ell}}\sqrt{\frac{(\ell+j+k)!}{(\ell-j-k)!(\ell+\ell_1-\ell_2)!(\ell-\ell_1+\ell_2)!}}$$

$$\times(1-x)^{-\frac{j+k+\ell_2-\ell_1}{2}}(1+x)^{\frac{\ell_2-\ell_1-j-k}{2}}\frac{d^{\ell-j-k}}{dx^{\ell-j-k}}\left\{(1-x)^{\ell-\ell_1+\ell_2}(1+x)^{\ell+\ell_1-\ell_2}\right\}$$

となる。これらを (1.8) に代入して、

$$C(\ell_1,\ell_2,\ell;\ell_1,-\ell_2,\ell_1-\ell_2)\overline{C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{(-1)^{-\ell+\ell_1+k}(2\ell+1)}{2^{\ell+\ell_1+\ell_2+1}} \\ &\times\sqrt{\frac{(2\ell_1)!(2\ell_2)!(\ell+j+k)!}{(\ell_1-j)!(\ell_1+j)!(\ell_2-k)!(\ell_2+k)!(\ell-j-k)!(\ell+\ell_1-\ell_2)!(\ell-\ell_1+\ell_2)!}} \\ &\times\int_{-1}^{1}(1-x)^{\ell_1-j}(1+x)^{\ell_2-k}\frac{d^{\ell-j-k}}{dx^{\ell-j-k}}\left\{(1-x)^{\ell-\ell_1+\ell_2}(1+x)^{\ell+\ell_1-\ell_2}\right\}dx\end{aligned} \tag{1.9}$$

を得る。

$j=\ell_1$, $k=-\ell_2$ とおく。部分積分により、

$$\begin{aligned}&|C(\ell_1,\ell_2,\ell;\ell_1,-\ell_2,\ell_1-\ell_2)|^2 \\ &= \frac{(-1)^{-\ell+\ell_1-\ell_2}(2\ell+1)}{2^{\ell+\ell_1+\ell_2+1}(\ell-\ell_1+\ell_2)!} \\ &\quad\times\int_{-1}^{1}(1+x)^{2\ell_2}\frac{d^{\ell-\ell_1+\ell_2}}{dx^{\ell-\ell_1+\ell_2}}\left\{(1-x)^{\ell-\ell_1+\ell_2}(1+x)^{\ell+\ell_1-\ell_2}\right\}dx \\ &= \frac{(2\ell+1)(2\ell_2)!}{2^{\ell+\ell_1+\ell_2+1}(\ell-\ell_1+\ell_2)!(\ell_1+\ell_2-\ell)!}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2\ell_1}(1-x)^{\ell-\ell_1+\ell_2}dx \\ &= \frac{(2\ell+1)(2\ell_1)!(2\ell_2)!}{(\ell_1+\ell_2-\ell)!(\ell_1+\ell_2+\ell+1)!}\end{aligned}$$

が得られる。(1.2) の下で、

$$C(\ell_1,\ell_2,\ell;\ell_1,-\ell_2,\ell_1-\ell_2)=\sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell_1)!(2\ell_2)!}{(\ell_1+\ell_2-\ell)!(\ell_1+\ell_2+\ell+1)!}} \tag{1.10}$$

となる。

これを (1.9) に代入すると、$C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)$ は実数である事が分かり、

$$\begin{aligned}&C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k) \\ &= \frac{(-1)^{-\ell+\ell_1+k}}{2^{\ell+\ell_1+\ell_2+1}} \\ &\times\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+j+k)!(\ell_1+\ell_2-\ell)!(\ell_1+\ell_2+\ell+!)!}{(\ell_1-j)!(\ell_1+j)!(\ell_2-k)!(\ell_2+k)!(\ell-j-k)!(\ell+\ell_1-\ell_2)!(\ell-\ell_1+\ell_2)!}} \\ &\times\int_{-1}^{1}(1-x)^{\ell_1-j}(1+x)^{\ell_2-k}\frac{d^{\ell-j-k}}{dx^{\ell-j+k}}\left\{(1-x)^{\ell-\ell_1+\ell_2}(1+x)^{\ell+\ell_1-\ell_2}\right\}dx\end{aligned} \tag{1.11}$$

となる。$\ell-j-k$ 回部分積分をして、Leibniz 則を用いると、

$$
\begin{aligned}
&C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)\\
&=(-1)^{\ell_1-j}\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+j+k)!(\ell-j-k)!(\ell_1-j)!(\ell_2-k)!(\ell_1+\ell_2-\ell)!}{(\ell_1+j)!(\ell_2+k)!(\ell+\ell_1-\ell_2)!(\ell-\ell_1+\ell_2)!(\ell_1+\ell_2+\ell+1)!}}\\
&\times\sum_{s=M_1}^{N_1}\frac{(-1)^s(\ell_1+j+s)!(\ell+\ell_2-j-s)!}{s!(\ell-j-k-s)!(\ell_1-j-s)!(\ell_2-\ell+j+s)!}
\end{aligned}\tag{1.12}
$$

を得る。ここで、

$$
M_1=\max\{0,\ell-\ell_2-j\},\quad N_1=\min\{\ell-j-k,\ell_1-j\}
$$

である。

$P^{\ell}_{(j+k)(\ell_1-\ell_2)}(x)=P^{\ell}_{(\ell_1-\ell_2)(j+k)}(x)$ を用いて、(1.8) から (1.11) - (1.12) を導いた計算と同様な計算を行うと、

$$
\begin{aligned}
&C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)\\
&=\frac{(-1)^{-\ell+\ell_1+k}}{2^{\ell+\ell_1+\ell_2+1}}\\
&\times\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+\ell_1-\ell_2)!(\ell_1+\ell_2-\ell)!(\ell_1+\ell_2+\ell+!)!}{(\ell_1-j)!(\ell_1+j)!(\ell_2-k)!(\ell_2+k)!(\ell+j+k)!(\ell-j-k)!(\ell-\ell_1+\ell_2)!}}\\
&\times\int_{-1}^{1}(1-x)^{\ell_2+k}(1+x)^{\ell_2-k}\frac{d^{\ell-\ell_1+\ell_2}}{dx^{\ell-\ell_1+\ell_2}}\left\{(1-x)^{\ell-j-k}(1+x)^{\ell+j+k}\right\}dx,
\end{aligned}\tag{1.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)\\
&=(-1)^{-\ell+\ell_1+k}\sqrt{(2\ell+1)(\ell+j+k)!(\ell-j-k)!}\\
&\times\sqrt{\frac{(\ell_1+\ell_2-\ell)!(\ell-\ell_1+\ell_2)!(\ell+\ell_1-\ell_2)!}{(\ell_1+\ell_2+\ell+1)!(\ell_1-j)!(\ell_1+j)!(\ell_2-k)!(\ell_2+k)!}}\\
&\times\sum_{s=M_2}^{N_2}\frac{(-1)^s(\ell+\ell_2-j-s)!(\ell_1+j+s)!}{s!(\ell-j-k-s)!(\ell-\ell_1+\ell_2-s)!(\ell_1-\ell_2+j+k+s)!}
\end{aligned}\tag{1.14}
$$

が得られる。ここで、

$$
M_2=\max\{0,\ell_2-\ell_1-j-k\},\quad N_2=\min\{\ell-j-k,\ell-\ell_1+\ell_2\}
$$

である。

(1.8) において $j'=\ell_1$, $k'=\ell_2$ としても、$C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)$ の表示が求められる。その為に

は、(1.6) において $m=j+k,\ n=\ell_1-\ell_2$ とおく。その結果は、

$$
\begin{aligned}
&C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)\\
(1.15)\qquad &=\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+j)!(\ell-j-k)!(\ell-\ell_1+\ell_2)!(\ell_1+\ell_2-\ell)!(\ell_1+\ell_2+\ell+1)!}{(\ell_1-j)!(\ell_2+k)!(\ell_2-k)!(\ell+j+k)!(\ell+\ell_1-\ell_2)!}}\\
&\times\sum_{s=N_3}^{\ell}\frac{(-1)^{\ell_1+k-s}(\ell+s)!(\ell_2+s-j)!}{(\ell-s)!(s-j-k)!(s-\ell_1+\ell_2)!(\ell_1+\ell_2+s+1)!}
\end{aligned}
$$

である。ここで、

$$N_3=\max\{j+k,\ell_1-\ell_2\}$$

である。

1.10 対称性

(1.13) において、j を $-j$ に、k を $-k$ に、x を $-y$ に置き換えると、

$$C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)=(-1)^{\ell-\ell_1-\ell_2}C(\ell_1,\ell_2,\ell;-j,-k,-j-k) \tag{1.16}$$

を得る。

(1.11) において、(ℓ_1,j) と (ℓ_2,k) を交換し、$x=-y$ と置くと、

$$C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)=(-1)^{\ell-\ell_1-\ell_2}C(\ell_2,\ell_1,\ell;k,j,j+k) \tag{1.17}$$

が得られる。

(1.11) において、

$$
\begin{aligned}
\ell_1&=\frac{\ell_1'+\ell_2'+j'+k'}{2},\quad \ell_2=\frac{\ell_1'+\ell_2'-j'-k'}{2},\\
j&=\frac{\ell_1'-\ell_2'+j'-k'}{2},\quad k=\frac{\ell_1'-\ell_2'-j'+k'}{2}
\end{aligned}
$$

と置くと、

$$C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)=C\left(\tilde{\ell}_1,\tilde{\ell}_2,\ell;\tilde{j},\tilde{k},\ell_1-\ell_2\right) \tag{1.18}$$

を得る。ここで、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\ell}_1&=\frac{\ell_1+\ell_2+j+k}{2},\quad \tilde{\ell}_2=\frac{\ell_1+\ell_2-j-k}{2},\\
\tilde{j}&=\frac{\ell_1-\ell_2+j-k}{2},\quad \tilde{k}=\frac{\ell_1-\ell_2-j+k}{2},
\end{aligned}
$$

である。

(1.11) を $\ell-j-k$ 回部分積分し、

$$
\begin{aligned}
\ell_1&=\frac{\ell'+\ell_1'-k'}{2},\quad \ell_2=\frac{\ell'+\ell_1'+k'}{2},\quad \ell=\ell_2',\\
j&=\frac{\ell'-\ell_1'+k'}{2}+j',\quad k=\frac{\ell'-\ell_1'-k'}{2}-j'
\end{aligned}
$$

と置くと、

$$C\left(\frac{\ell+\ell_1-k}{2}, \frac{\ell+\ell_1+k}{2}, \ell_2; \frac{\ell_1-\ell-k}{2}+j, \frac{\ell_1-\ell-k}{2}-j, \ell_1-\ell\right) \tag{1.19}$$
$$= (-1)^{\ell_1-j}\sqrt{\frac{2\ell_1+1}{2\ell+1}}C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k)$$

が得られる。

(1.18) と (1.19) を組み合わせると、

$$C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k) = (-1)^{\ell_1-j}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell_2+1}}C(\ell_1,\ell,\ell_2;j,-j-k,-k) \tag{1.20}$$

となる。この関係式と (1.16), (1.17) より、

$$\begin{aligned} C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k) =\ & (-1)^{\ell-\ell_1-k}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell_1+1}}C(\ell_2,\ell,\ell_1;k,-j-k,-j) \\ =\ & (-1)^{\ell-\ell_2+j}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell_2+1}}C(\ell,\ell_1,\ell_2;-j-k,j,-k) \\ =\ & (-1)^{\ell_2+k}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell_1+1}}C(\ell,\ell_2,\ell_1;-j-k,k,-j) \end{aligned} \tag{1.21}$$

なる対称性が得られる。これを Wigner の $3j$ 記号 $\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ を用いて、

$$C(\ell_1,\ell_2,\ell;j,k,j+k) = (-1)^{\ell_1-\ell_2+j+k}\sqrt{2\ell+1}\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ j & k & -j-k \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

で表す。すなわち、Wigner の $3j$ 記号は、

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2-m_3}\sqrt{\frac{1}{2j_3+1}}C(j_1,j_2,j_3;m_1,m_2,-m_3)$$

で定義される。これは、1, 2, 3 の巡回置換に対し不変であり、互換及び全ての m の符号の逆転に対し、$(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ だけ符号を替える。

1.11 差分版 Rodrigues の公式

$a \in \mathbb{C}$ に対し、

$$a^{(n)} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)}$$

とおく。また、a に関する差分作用素 Δ_a を

$$\Delta_a f(a) = f(a+1) - f(a)$$

で定義する。このとき、

$$\Delta_a a^{(n)} = na^{(n-1)},$$

$$\Delta_a^k f(a) = \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^{k-s} k!}{s!(k-s)!} f(a+s)$$

が成立する。差分作用素 Δ_j を用いると、(1.12) は、

$$\begin{aligned}
&C(\ell_1, \ell_2, \ell; j, k, j+k) \\
&= (-1)^{\ell_1-\ell+k} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+j+k)!(\ell_1+\ell_2-\ell)!}{(\ell-j-k)!(\ell+\ell_1-\ell_2)!(\ell-\ell_1+\ell_2)!(\ell+\ell_1+\ell_2+1)!}} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(\ell_1-j)^{(\ell_1-\ell_2-j-k)}}{(\ell_1+j)^{(\ell_1-\ell_2+j+k)}}} \Delta_j^{\ell-j-k} \left\{ \frac{(\ell_1+j)^{(\ell+\ell_1-\ell_2)}}{(\ell_1-j)^{(\ell_1-\ell-\ell_2)}} \right\}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

と書き表される。これは、Rodrigues の公式 (1.7) の差分版である。実際、$j+k=m, \ell_1-\ell_2=n$ と置くと、(1.23) は、

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\ell_1-\ell+k} C(\ell_1, \ell_2, \ell; j, k, j+k) \sqrt{\frac{(\ell+\ell_1+\ell_2+1)!}{(2\ell+1)(\ell_1+\ell_2-\ell)!}} \\
&= \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-n)!(\ell+n)!(\ell-m)!}} \sqrt{\frac{(\ell_1-j)^{(n-m)}}{(\ell_1+j)^{(n+m)}}} \Delta_j^{\ell-m} \left\{ \frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}} \right\}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

となる。一方、(1.7) は、

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\ell-n} i^{m-n} 2^\ell P_{mn}^\ell(z) \\
&= \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-n)!(\ell+n)!(\ell-m)!}} \sqrt{\frac{(1-z)^{n-m}}{(1+z)^{n+m}}} \frac{d^{\ell-m}}{dz^{\ell-m}} \left\{ \frac{(1+z)^{n+\ell}}{(1-z)^{n-\ell}} \right\}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

となる。

1.12 差分方程式

$P_{mn}^\ell(z)$ は、微分方程式

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP_{mn}^\ell(z)}{dz}\right\} - \frac{m^2+n^2-2mnz}{1-z^2} P_{mn}^\ell(z) = -\ell(\ell+1)P_{mn}^\ell(z) \tag{1.26}$$

を満たす。従って、Clebsch-Gordan 係数はこれに対応した差分方程式を満たすはずである。これを求める。以後、

$$C(\ell_1, \ell_2, \ell; j, k, j+k) = C(j,k), \quad \sqrt{(p-q)(p+q+1)} = R(p,q)$$

と略記する。

Clebsch-Gordan 係数の定義は、

$$\boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{h}_k = \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} C(j,k) \boldsymbol{a}_{j+k}^\ell$$

である。

$$g = g(t) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{t}{2} & -\sin\dfrac{t}{2} \\ \\ \sin\dfrac{t}{2} & \cos\dfrac{t}{2} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

とし、

$$T_{\ell_1}(g(t))\boldsymbol{f}_j \otimes T_{\ell_2}(g(t))\boldsymbol{h}_k = \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} C(j,k)T(g(t))\boldsymbol{a}^{\ell}_{j+k}$$

を t で微分して $t=0$ とおく。(1.1) と

$$\boldsymbol{f}_j = \frac{x^{\ell_1-j}}{\sqrt{(\ell_1-j)!(\ell_1+j)!}},$$

より、

$$\left.\frac{d}{dt}T_{\ell_1}(g(t))\boldsymbol{f}_j\right|_{t=0} = \frac{-(\ell_1+j)x^{\ell_1-j+1}+(\ell_1-j)x^{\ell_1-j-1}}{2\sqrt{(\ell_1-j)!(\ell_1+j)!}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-R(\ell_1,j-1)\boldsymbol{f}_{j-1}+R(\ell_1,j)\boldsymbol{f}_{j+1}\right)$$

となる。同様に、

$$\left.\frac{d}{dt}T_{\ell_2}(g(t))\boldsymbol{h}_k\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(-R(\ell_2,k-1)\boldsymbol{h}_{k-1}+R(\ell_2,k)\boldsymbol{h}_{k+1}\right)$$

$$\left.\frac{d}{dt}T(g(t))\boldsymbol{a}^{\ell}_m\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(-R(\ell,m-1)\boldsymbol{a}_{m-1}+R(\ell,m)\boldsymbol{a}_{m+1}\right)$$

となる。従って、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(-R(\ell_1,j-1)\boldsymbol{f}_{j-1}+R(\ell_1,j)\boldsymbol{f}_{j+1}\right)\otimes\boldsymbol{h}_k \\
&\quad+\frac{1}{2}\boldsymbol{f}_j\otimes\left(-R(\ell_2,k-1)\boldsymbol{h}_{k-1}+R(\ell_2,k)\boldsymbol{h}_{k+1}\right) \qquad (1.27)\\
&=\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\frac{1}{2}C(j,k)\left(-R(\ell,j+k-1)\boldsymbol{f}_{j+k-1}+R(\ell,j+k)\boldsymbol{f}_{j+k+1}\right)
\end{aligned}$$

を得る。

次に、

$$\omega(t) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{t}{2} & i\sin\dfrac{t}{2} \\ \\ i\sin\dfrac{t}{2} & \cos\dfrac{t}{2} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

に対して同様の計算を行う。

$$T_{\ell_*}(\omega(t))x^{\ell_*-n} = \left(ix\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^{\ell_*+n}\left(x\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}\right)^{\ell_*-n}$$

であるので、

$$\left.\frac{d}{dt}T_{\ell_*}(\omega(t))x^{\ell_*-n}\right|_{t=0} = \frac{(\ell_*+n)i}{2}x^{\ell_*-n+1}+\frac{(\ell_*-n)i}{2}x^{\ell_*-n-1}$$

となる。これより、

$$\left.\frac{d}{dt}T_{\ell_1}(\omega(t))\boldsymbol{f}_j\right|_{t=0} = \frac{(\ell_1+j)ix^{\ell_1-j+1}+(\ell_1-j)ix^{\ell_1-j-1}}{2\sqrt{(\ell_1-j)!(\ell_1+j)!}}$$

$$= \frac{i}{2}\left(R(\ell_1,j-1)\boldsymbol{f}_{j-1}+R(\ell_1,j)\boldsymbol{f}_{j+1}\right)$$

となる。同様に、

$$\left.\frac{d}{dt}T_{\ell_2}(g(t))\boldsymbol{h}_k\right|_{t=0} = \frac{i}{2}\left(R(\ell_2,k-1)\boldsymbol{h}_{k-1}+R(\ell_2,k)\boldsymbol{h}_{k+1}\right)$$

$$\left.\frac{d}{dt}T(g(t))\boldsymbol{a}^{\ell}_{m}\right|_{t=0} = \frac{i}{2}\left(R(\ell,m-1)\boldsymbol{a}_{m-1}+R(\ell,m)\boldsymbol{a}_{m+1}\right)$$

となる。従って、

$$\begin{aligned}&\frac{i}{2}\left(R(\ell_1,j-1)\boldsymbol{f}_{j-1}+R(\ell_1,j)\boldsymbol{f}_{j+1}\right)\otimes\boldsymbol{h}_k\\ &\qquad+\frac{i}{2}\boldsymbol{f}_j\otimes\left(R(\ell_2,k-1)\boldsymbol{h}_{k-1}+R(\ell_2,k)\boldsymbol{h}_{k+1}\right)\\ &=\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\frac{i}{2}C(j,k)\left(R(\ell,j+k-1)\boldsymbol{a}_{j+k-1}+R(\ell,j+k)\boldsymbol{a}_{j+k+1}\right)\end{aligned}\tag{1.28}$$

を得る。

(1.28) を $-i$ 倍して、(1.27) に加えると、

$$R(\ell_1,j)\boldsymbol{f}_{j+1}\otimes\boldsymbol{h}_k+R(\ell_2,k)\boldsymbol{f}_j\otimes\boldsymbol{h}_{k+1}=\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}R(\ell,j+k)C(j,k)\boldsymbol{a}^{\ell}_{j+k+1}\tag{1.29}$$

となる。左辺は、

$$\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\left\{R(\ell_1,j)C(j+1,k)+R(\ell_2,k)C(j,k+1)\right\}\boldsymbol{a}^{\ell}_{j+k+1}$$

である。ゆえに、

$$R(\ell,j+k)C(j,k)=R(\ell_1,j)C(j+1,k)+R(\ell_2,k)C(j,k+1)\tag{1.30}$$

を得る。

(1.28) を $-i$ 倍して、その結果より (1.27) を減すると、

$$R(\ell_1,j-1)\boldsymbol{f}_{j-1}\otimes\boldsymbol{h}_k+R(\ell_2,k-1)\boldsymbol{f}_j\otimes\boldsymbol{h}_{k-1}=\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}R(\ell,j+k-1)C(j,k)\boldsymbol{a}^{\ell}_{j+k-1}$$

となる。左辺は、

$$\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\left\{R(\ell_1,j-1)C(j-1,k)+R(\ell_2,k-1)C(j,k-1)\right\}\boldsymbol{a}^{\ell}_{j+k-1}$$

である。ゆえに、

$$R(\ell, j+k-1)C(j,k) = R(\ell_1, j-1)C(j-1,k) + R(\ell_2, k-1)C(j,k-1) \tag{1.31}$$

を得る。

(1.29) の両辺に $-T(g(t)) - iT(\omega(t))|_{t=0}$ を作用させると、

$$\begin{aligned}
&R(\ell_1, j)\left\{R(\ell_1, j)\boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{h}_k + R(\ell_2, k-1)\boldsymbol{f}_{j+1} \otimes \boldsymbol{h}_{k-1}\right\} \\
&\quad + R(\ell_2, k)\left\{R(\ell_1, j-1)\boldsymbol{f}_{j-1} \otimes \boldsymbol{h}_{k+1} + R(\ell_2, k)\boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{h}_k\right\} \\
&\quad = \sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} R(\ell, j+k)^2 C(j,k)\boldsymbol{a}_{j+k}^{\ell}
\end{aligned}$$

となる。左辺は、

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2} &\left\{\left(R(\ell_1, j)^2 + R(\ell_2, k)^2\right) C(j,k) + R(\ell_1, j)R(\ell_2, k-1)C(j+1, k-1)\right. \\
&\left. + R(\ell_1, j-1)R(\ell_2, k)C(j-1, k+1)\right\} \boldsymbol{a}_{j+k}^{\ell}
\end{aligned}$$

である。従って、Clebsch-Gordan 係数は差分方程式

$$\begin{aligned}
&\left(R(\ell_1, j)^2 + R(\ell_2, k)^2 - R(\ell, j+k)^2\right) C(j,k) \\
&\quad + R(\ell_1, j)R(\ell_2, k-1)C(j+1, k-1) + R(\ell_1, j-1)R(\ell_2, k)C(j-1, k+1) = 0
\end{aligned} \tag{1.32}$$

を満たす事が分かる。

(1.31) より、

$$R(\ell_2, k-1)C(j+1, k-1) = R(\ell, j+k)C(j+1, k) - R(\ell_1, j)C(j,k)$$

となる。(1.30) より、

$$R(\ell_2, k)C(j-1, k+1) = R(\ell, j+k-1)C(j-1, k) - R(\ell_1, j-1)C(j,k)$$

となる。これらを (1.32) に代入すると、

$$\begin{aligned}
&\{-R(\ell_1, j-1)^2 + R(\ell_2, k)^2 - R(\ell, j+k)^2\}C(j,k) \\
&\quad + R(\ell_1, j)R(\ell, j+k)C(j+1, k) + R(\ell_1, j-1)R(\ell, j+k-1)C(j-1, k) = 0
\end{aligned}$$

となる。

$$D(j,k) = R(\ell_1, j)C(j+1, k) - R(\ell, j+k)C(j,k)$$

とおくと、差分方程式は、

$$R(\ell, j+k)D(j,k) - R(\ell_1, j-1)D(j-1, k) = -R(\ell_2, k)^2 C(j,k) \tag{1.33}$$

となる。

(1.30) より、

$$R(\ell_1,j)C(j+1,k-1)=R(\ell,j+k-1)C(j,k-1)-R(\ell_2,k-1)C(j,k)$$

となる。(1.31) より、

$$R(\ell_1,j-1)C(j-1,k+1)=R(\ell,j+k)C(j,k+1)-R(\ell_2,k)C(j,k)$$

となる。これらを (1.32) に代入すると、

$$\{R(\ell_1,j)^2-R(\ell_2,k-1)^2-R(\ell,j+k)^2\}C(j,k)$$

$$+R(\ell_2,k-1)R(\ell,j+k-1)C(j,k-1)+R(\ell_2,k)R(\ell,j+k)C(j,k+1)=0$$

となる。

$$E(j,k)=R(\ell_2,k)C(j,k+1)-R(\ell,j+k)C(j,k)$$

とおくと、差分方程式は、

$$R(\ell,j+k)E(j,k)-R(\ell_2,k-1)E(j,k-1)=-R(\ell_1,j)^2C(j,k) \tag{1.34}$$

となる。

注意 1.2 [1] において、

$$q_\ell^j=\frac{2(\ell-j)!A_\ell^j}{(\ell+j)!A_\ell^0}$$

なる量が Helfrich 曲面の安定性の議論で現れた。ここで、A_ℓ^j は、

$$A_\ell^j=\int_{-1}^1 P_\ell(x)\left(P_\ell^j(x)\right)^2dx$$

で定義される量で、Clebsch-Gordan 係数（の定数倍）である。q_ℓ^j は、差分化された Legendre の方程式

$$\Delta_j\left(R(\ell,j)^2\Delta_j q_\ell^j\right)=-R(\ell,0)^2q_\ell^{j+1} \tag{1.35}$$

を満たす。実際、

$$P_\ell^j(z)=i^j\sqrt{\frac{(\ell+j)!}{(\ell-j)!}}P_{j0}^\ell(z)$$

であるので、Clebsch-Gordan 係数を用いれば、

$$A_\ell^j=\frac{2(\ell+j)!C(\ell,\ell,\ell;0,0,0)C(\ell,\ell,\ell;0,j,j)}{(\ell-j)!(2\ell+1)},$$

$$q_\ell^j=\frac{2C(\ell,\ell,\ell;0,j,j)}{C(\ell,\ell,\ell;0,0,0)}$$

となる。従って、$C(\ell,\ell,\ell;0,j,j)$ が差分化された Legendre 方程式 (1.35) を満たす事を確かめればよい。$C(\ell,\ell,\ell;0,j,j)$ は、$\ell_1=\ell_2=\ell$ としたときの $C(0,j)$ である。(1.34) において、これらのパラメータ値を代入したものが、(1.35) である。

直接の計算で、

$$R(\ell_1,j)^2+R(\ell_2,k)^2-R(\ell,j+k)^2=R(\ell_1,j-1)^2+R(\ell_2,k-1)^2-R(\ell,j+k-1)^2$$

が成立する事が分かる。これを (1.32) に代入すると、

$$\begin{aligned}&\left(R(\ell_1,j-1)^2+R(\ell_2,k-1)^2-R(\ell,j+k-1)^2\right)C(j,k)\\ &+R(\ell_1,j)R(\ell_2,k-1)C(j+1,k-1)+R(\ell_1,j-1)R(\ell_2,k)C(j-1,k+1)=0\end{aligned} \tag{1.36}$$

となる。(1.32) より (1.33), (1.34) を導いた方法と同様の計算をすると、差分方程式

$$R(\ell_1,j)\tilde{D}(j,k)-R(\ell,j+k-1)\tilde{D}(j-1,k)=-R(\ell_2,k-1)^2C(j,k), \tag{1.37}$$

$$R(\ell_2,k)\tilde{E}(j,k)-R(\ell,j+k-1)\tilde{E}(j,k-1)=-R(\ell_1,j-1)^2C(j,k) \tag{1.38}$$

が得られる。ここで、

$$\tilde{D}(j,k)=R(\ell,j+k)C(j+1,k)-R(\ell_1,j)C(j,k),$$

$$\tilde{E}(j,k)=R(\ell,j+k)C(j+1,k)-R(\ell_2,k)C(j,k)$$

である。

(1.33), (1.34), (1.36), (1.37) は、(1.26) の差分版であるのだが、対応が見難いので、書き直してみる。

$$P_\gamma^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(-1)^\gamma}{2^\gamma\gamma!(1-z)^\alpha(1+z)^\beta}\frac{d^\gamma}{dz^\gamma}\left\{(1-z)^{\alpha+\gamma}(1+z)^{\beta+\gamma}\right\} \tag{1.39}$$

とおく。これは Jacobi の多項式で、$P_{mn}^\ell(z)$ を用いると、

$$P_\gamma^{(\alpha,\beta)}(z)=2^m i^{n-m}\sqrt{\frac{(\ell-n)!(\ell+n)!}{(\ell-m)!(\ell+m)!}}\sqrt{\frac{(1-z)^{n-m}}{(1+z)^{n+m}}}P_{mn}^\ell(z) \tag{1.40}$$

と表される。ここで、

$$\alpha=m-n,\quad \beta=m+n,\quad \gamma=\ell-m \tag{1.41}$$

である。Jacobi の多項式は、微分方程式

$$(1-z^2)\frac{d^2P_\gamma^{(\alpha,\beta)}(z)}{dz^2}+\{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)z\}\frac{dP_\gamma^{(\alpha,\beta)}(z)}{dz}+\gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)P_\gamma^{(\alpha,\beta)}=0 \tag{1.42}$$

を満たす。これは (1.26) と同値である。

$$\mathfrak{P}_{mn}^\ell(z)=P_{\ell-m}^{(m-n,m+n)}(z)$$

とおくと、

$$(1-z^2)\frac{d^2\mathfrak{P}_{mn}^\ell(z)}{dz^2}+2\{n-(m+1)z\}\frac{d\mathfrak{P}_{mn}^\ell(z)}{dz}+R(\ell,m)^2\mathfrak{P}_{mn}^\ell(z)=0 \tag{1.43}$$

となる。そこで、

$$\mathfrak{C}_{mn}^\ell(j)=\frac{(-1)^{\ell-m}}{2^{\ell-m}(\ell-m)!}\frac{(\ell_1-j)^{(n-m)}}{(\ell_1+j)^{(n+m)}}\Delta_j^{\ell-m}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

とおく。差分版 Rodorigues の公式 (1.24) より、

$$\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j) = \frac{(-1)^{\ell_1-j}}{2^{\ell-m}}\sqrt{\frac{(\ell_1-n+1)!}{(2\ell+1)(\ell_1-\ell-n)!}}$$

$$\times\sqrt{\frac{(\ell-n)!(\ell+n)!}{(\ell-m)!(\ell+m)!}}\sqrt{\frac{(\ell_1-j)^{(n-m)}}{(\ell_1+j)^{(n+m)}}}C(\ell_1,\ell_1-n,\ell;j,m-j,m)$$

である。$\ell_2=\ell_1-n$ と置くと、

$$\begin{aligned}(\ell_1-j)^{(n-m)} &= (\ell_1-j)(\ell_1-j-1)\cdots(\ell_1-j-n+m+1)\\ &= \frac{(\ell_1-j)(\ell_1-j-1)^{(n-m)}}{\ell_1-j-n+m}\\ &= \frac{(\ell_1-j)(\ell_1-j-1)^{(n-m)}}{\ell_2+m-j},\\ (\ell_1+j)^{(n+m)} &= (\ell_1+j)(\ell_1+j-1)\cdots(\ell_1+j-n-m+1)\\ &= \frac{(\ell_1+j+1)^{(n+m)}(\ell_1+j-n-m+1)}{\ell_1+j+1}\\ &= \frac{(\ell_1+j+1)^{(n+m)}(\ell_2-m+j+1)}{\ell_1+j+1}\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\frac{(\ell_1-j)^{(n-m)}}{(\ell_1+j)^{(n+m)}} &= \frac{(\ell_1-j-1)^{(n-m)}}{(\ell_1+j+1)^{(n+m)}}\frac{(\ell_1-j)(\ell_1+j+1)}{(\ell_2+m-j)(\ell_2-m+j+1)}\\ &= \frac{(\ell_1-j-1)^{(n-m)}}{(\ell_1+j+1)^{(n+m)}}\frac{R(\ell_1,j)^2}{R(\ell_2,m-j-1)^2}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}(\ell_1-j)^{(n-m)} &= (\ell_1-j)(\ell_1-j-1)\cdots(\ell_1-j-n+m+1)\\ &= \frac{(\ell_1-j)(\ell_1-j-1)\cdots(\ell_1-j-n+m)}{\ell_1-j-n+m}\\ &= \frac{(\ell_1-j)^{(n-m+1)}}{\ell_2+m-j},\\ (\ell_1+j)^{(n+m)} &= (\ell_1+j)(\ell_1+j-1)\cdots(\ell_1+j-n-m+1)\\ &= (\ell_1+j)^{(n+m-1)}(\ell_1+j-n-m+1)\\ &= (\ell_1+j)^{(n+m-1)}(\ell_2-m+j+1)\end{aligned}$$

であるので、

$$\frac{(\ell_1-j)^{(n-m)}}{(\ell_1+j)^{(n+m)}}=\frac{(\ell_1-j)^{(n-m+1)}}{(\ell_1+j)^{(n+m-1)}}\frac{1}{(\ell_2+m-j)(\ell_2-m+j+1)}$$
$$=\frac{(\ell_1-j)^{(n-m+1)}}{(\ell_1+j)^{(n+m-1)}}\frac{1}{R(\ell_2,m-j-1)^2}$$

となる。従って、

$$\frac{(\ell_1-j-1)^{(n-m)}}{(\ell_1+j+1)^{(n+m)}}=\frac{R(\ell_2,m-j-1)^2}{R(\ell_1,j)^2}\frac{(\ell_1-j)^{(n-m)}}{(\ell_1+j)^{(n+m)}}=\frac{1}{R(\ell_1,j)^2}\frac{(\ell_1-j)^{(n-m+1)}}{(\ell_1+j)^{(n+m-1)}}$$

を得る。これを用いると、

$$R(\ell_1,j)^2\frac{(\ell_1-j-1)^{(n-m)}}{(\ell_1+j+1)^{(n+m)}}\Delta_j^{\ell-m}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$
$$=\frac{(\ell_1-j)^{(n-m+1)}}{(\ell_1+j)^{(n+m-1)}}\Delta_j^{\ell-m}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\},$$

$$R(\ell_2,m-j-1)^2\frac{(\ell_1-j)^{(n-m)}}{(\ell_1+j)^{(n+m)}}\Delta_j^{\ell-m}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$
$$=\frac{(\ell_1-j)^{(n-m+1)}}{(\ell_1+j)^{(n+m-1)}}\Delta_j^{\ell-m}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

が得られる。辺々の差をとって、$\dfrac{(-1)^{\ell-m}}{2^{\ell-m}(\ell-m)!}$ を乗ずると、

$$R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j+1)-R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$
$$=\frac{(-1)^{\ell-m}}{2^{\ell-m}(\ell-m)!}\frac{(\ell_1-j)^{(n-m+1)}}{(\ell_1+j)^{(n+m-1)}}\Delta_j^{\ell-m+1}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$
$$(1.44)\qquad =-\frac{(-1)^{\ell-m+1}2(\ell-m+1)}{2^{\ell-m}(\ell-m+1)!}\frac{(\ell_1-j)^{(n-m+1)}}{(\ell_1+j)^{(n+m-1)}}\Delta_j^{\ell-m+1}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$
$$=-2(\ell-m+1)\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j)$$

となる。

次に、

$$(1.45)\qquad R(\ell_2,\ell-j-1)^2\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}=R(\ell_1,j)^2\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}$$

の差分を計算する。左辺の p 階差分は、

$$\Delta_j^p\left\{R(\ell_2,\ell-j-1)^2\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$=R(\ell_2,\ell-j-p-1)^2\Delta_j^p\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-2p(j-\ell+p)\Delta_j^{p-1}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-p(p-1)\Delta_j^{p-2}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

となる。これを帰納法で示す。$p=0$ のときは正しい。p のとき正しいとする。積の差分公式

$$\Delta_j(f(j)g(j))=f(j+1)\Delta_j g(j)+g(j)\Delta_j f(j)$$

を用いて、

$$\Delta_j^{p+1}\left\{R(\ell_2,\ell-j-1)^2\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$=R(\ell_2,\ell-j-p-2)^2\Delta_j^{p+1}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$+\left(\Delta_j R(\ell_2,\ell-j-p-1)^2\right)\Delta_j^p\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-2p(j-\ell+p+1)\Delta_j^p\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-2p\left(\Delta_j(j-\ell+p)\right)\Delta_j^{p-1}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-p(p-1)\Delta_j^{p-1}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

となる。ここで、

$$\Delta_j R(\ell_2,\ell-j-p-1)^2=-2(j-\ell+p+1),$$

$$\Delta_j(j-\ell+p)=1$$

であるので、

$$\Delta_j^{p+1}\left\{R(\ell_2,\ell-j-1)^2\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$=R(\ell_2,\ell-j-p-2)^2\Delta_j^{p+1}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-2(p+1)(j-\ell+p+1)\Delta_j^{p}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-p(p+1)\Delta_j^{p-1}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}$$

となる。また、(1.45) の右辺の p 階差分は、

$$\Delta_j^{p}\left\{R(\ell_1,j)^2\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$=R(\ell_1,j+p)^2\Delta_j^{p}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-2p(j+p)\Delta_j^{p-1}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}-p(p-1)\Delta_j^{p-2}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

となる。実際、$p=0$ のときは正しい。p のとき正しいとして、

$$\Delta_j^{p+1}\left\{R(\ell_1,j)^2\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$=\Delta_j R(\ell_1,j+p+1)^2\Delta_j^{p+1}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$+\left(\Delta_j R(\ell_1,j+p)^2\right)\Delta_j^{p}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-2p(j+p+1)\Delta_j^{p}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}-2p\Delta_j^{p-1}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-p(p-1)\Delta_j^{p-1}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$=R(\ell_1,j+p+1)^2\Delta_j^{p+1}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

$$-2(p+1)(j+p+1)\Delta_j^{p}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}-p(p+1)\Delta_j^{p-1}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}$$

となる。従って、(1.45) の両辺を $\ell-m+1$ 回差分をとると、

$$
\begin{aligned}
&R(\ell_2,m-j-2)^2\Delta_j^{\ell-m+1}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}\\
&-2(\ell-m+1)(j-m+1)\Delta_j^{\ell-m}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}\\
&-(\ell-m+1)(\ell-m)\Delta_j^{\ell-m-1}\left\{\frac{(\ell_1+j+1)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j-1)^{(n-\ell)}}\right\}\\
&=R(\ell_1,\ell-m+j+1)^2\Delta_j^{\ell-m+1}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}\\
&\qquad-2(\ell-m+1)(j+\ell-m+1)\Delta_j^{\ell-m}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}\\
&\qquad-(\ell-m+1)(\ell-m)\Delta_j^{\ell-m-1}\left\{\frac{(\ell_1+j)^{(n+\ell)}}{(\ell_1-j)^{(n-\ell)}}\right\}
\end{aligned}
$$

となる。両辺に $\dfrac{(-1)^{\ell-m+1}}{2^{\ell-m+1}(\ell-m+1)!}\dfrac{(\ell_1-j)^{(n-m+1)}}{(\ell_1+j)^{(n+m-1)}}$ を掛ける。

$$
\begin{aligned}
\frac{(\ell_1-j)^{(n-m+1)}}{(\ell_1+j)^{(n+m-1)}} &= \frac{R(\ell_1,j)^2}{R(\ell_2,m-j-2)^2}\frac{(\ell_1-j-1)^{(n-m+1)}}{(\ell_1+j+1)^{(n+m-1)}}\\
&= R(\ell_1,j)^2\frac{(\ell_1-j-1)^{(n-m)}}{(\ell_1+j+1)^{(n+m)}}\\
&= R(\ell_1,j)^2R(\ell_2,m-j-1)^2\frac{(\ell_1-j-1)^{(n-m-1)}}{(\ell_1+j+1)^{(n+m+1)}}\\
&= R(\ell_2,m-j-1)^2\frac{(\ell_1-j)^{(n-m)}}{(\ell_1+j)^{(n+m)}}\\
&= R(\ell_2,m-j-1)^2R(\ell_2,m-j)^2\frac{(\ell_1-j)^{(n-m-1)}}{(\ell_1+j)^{(n+m+1)}}
\end{aligned}
$$

に注意すると、

$$
\begin{aligned}
&R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j+1)+(j-m+1)R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j+1)\\
&\quad-\frac{1}{4}R(\ell_1,j)^2R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{(m+1)n}(j+1)\\
&=R(\ell_1,\ell-m+j+1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j)+(j+\ell-m+1)R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)\\
&\quad-\frac{1}{4}R(\ell_2,m-j-1)^2R(\ell_2,m-j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{(m+1)n}(j)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、(1.44) を用いると、

$$(j-m+1)R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j+1)-(j+\ell-m+1)R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$=(j-m+1)\left\{R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j+1)-R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)\right\}$$

$$-\ell R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$=-2(j-m+1)(\ell-m+1)\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j)-\ell R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j),$$

$$R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{(m+1)n}(j+1)-R(\ell_2,m-j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{(m+1)n}(j)=-2(\ell-m)\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned}0=\ &R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j+1)\\ &-\left\{2(j-m+1)(\ell-m+1)+R(\ell_1,\ell-m+j+1)^2\right\}\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j)\\ &-\frac{1}{2}\{2\ell-(\ell-m)\}R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)\\ =\ &R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j+1)-\left\{R(\ell_1,j)^2-R(\ell,m-1)^2\right\}\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j)\\ &-\frac{1}{2}(\ell+m)R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)\\ =\ &R(\ell_1,j)^2\Delta_j\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j)+R(\ell,m-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j)\\ &-\frac{1}{2}(\ell+m)R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}&R(\ell_1,j)^2\Delta_j\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j)+R(\ell,m-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{(m-1)n}(j)\\ &=\frac{1}{2}(\ell+m)R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)\end{aligned}\tag{1.46}$$

となる。

(1.44) と (1.46) より、

$$\left(R(\ell_1,j)^2\Delta_j+R(\ell,m-1)^2\right)\left\{R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j+1)-R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)\right\}$$

$$=-R(\ell,m-1)^2R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

となる。整理すると、

$$\Delta_j\left\{R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j+1)-R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)\right\}$$

$$+R(\ell,m-1)^2\Delta_j\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)+R(\ell,m-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)=0$$

という $\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}$ で閉じた漸化式が得られた。

$$R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)-R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$=R(\ell_1,j)^2\Delta_j\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j+1)+\left(R(\ell_1,j)^2-R(\ell_2,m-j-1)^2\right)\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

であるので、

$$\Delta_j\left\{R(\ell_1,j)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j+1)-R(\ell_2,m-j-1)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)\right\}$$

$$=R(\ell_1,j+1)^2\Delta_j^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)+\left\{\Delta_jR(\ell_1,j)^2\right\}\Delta_j\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$+\left(R(\ell_1,j+1)^2-R(\ell_2,m-j-2)^2\right)\Delta_j\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$+\left\{\Delta_j\left(R(\ell_1,j)^2-R(\ell_2,m-j-1)^2\right)\right\}\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$=R(\ell_1,j+1)^2\Delta_j^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$+\left(-2j+R(\ell_1,\ell_2)^2-R(j+1,m-j-2)^2\right)\Delta_j\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$-\left(\Delta_jR(j,m-j-1)^2\right)\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$=R(\ell_1,j+1)^2\Delta_j^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$+\left[2\left\{n\ell_1-(m+1)j\right\}-n(n-1)+m(m-3)\right]\Delta_j\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)-2m\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

となる。また、

$$-n(n-1)+m(m-3)+R(\ell,m-1)^2=R(\ell,m-1)^2-R(m-1,n-1)^2,$$

$$R(\ell,m-1)^2-2m=R(\ell,m)^2$$

であるので、漸化式は、

$$R(\ell_1,j+1)^2\Delta_j^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$$

$$+\left[2\left\{n\ell_1-(m+1)j\right\}+R(\ell,m)^2-R(m-1,n-1)^2\right]\Delta_j\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j) \tag{1.47}$$

$$+R(\ell,m)^2\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)=0$$

となる。これが、(1.43) の差分版である。実際、Rodorigues の公式 (1.25) とその差分版 (1.24) を見比べると、$\ell_1\to\infty$ のとき、

$$\frac{j}{\ell_1}\sim z,\quad \ell_1^p\Delta_j^p\sim\frac{d^p}{dz^p}$$

という関係にある。従って、

$$R(\ell_1,j+1)^2\Delta_j^2\sim(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2},$$

$$\left[2\left\{n\ell_1-(m+1)j\right\}+R(\ell,m)^2-R(m-1,n-1)^2\right]\Delta_j\sim2\left\{n-(m+1)z\right\}\frac{d}{dz}$$

となる。ゆえに、(1.47) において、形式的に $\ell_1\to\infty$ とすると、(1.43) が得られる。

2 微分方程式の解の漸近展開

(1.47) を用いて、$\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$ の漸近展開を示す事がこのノートの目的であるが、その予備的考察として、この節では、対応する微分方程式 (1.43) の実数解のある漸近展開を考察する。独立変数も実数とするので z の代わりに t を用いる。微分方程式

$$(1-t^2)\frac{d^2u}{dt^2}(t)+2\{n-(m+1)t\}\frac{du}{dt}(t)+R(\ell,m)^2u(t)=0 \tag{2.1}$$

の実数解の漸近展開を考える。但し、

$$R(p,q)=\sqrt{(p-q)(p+q+1)}$$

である。

以後、$'=\dfrac{d}{dt}$ とする。非自明な実数解 $u=u(t;\ell,m,n)$ を考える。$\ell>m$ とし、

$$v(t;\ell,m,n)=\left[u(0;\ell,m,n)^2+\left\{\frac{u'(0;\ell,m,n)}{R(\ell,m)}\right\}^2\right]^{-\frac{1}{2}}u\left(\frac{t}{R(\ell,m)};\ell,m,n\right)$$

とおく。これは、

$$\begin{aligned}&\left\{R(\ell,m)^2-t^2\right\}v''(t;\ell,m,n)\\&+2\{nR(\ell,m)-(m+1)t\}v'(t;\ell,m,n)+R(\ell,m)^2v(t;\ell,m,n)=0\end{aligned} \tag{2.2}$$

の解で、

$$v(0;\ell,m,n)^2+\left(v'(0;\ell,m,n)\right)^2=1$$

を満たす。$\lambda=\lambda(\ell,m,n)\in\mathbb{R}$ を

$$v(0;\ell,m,n)=\cos\lambda,\quad v'(0;\ell,m,n)=\sin\lambda \tag{2.3}$$

を満たす定数とする。

仮に、

$$v(t;\ell,m,n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_k(t,\ell,m,n)}{R(\ell,m)^k}$$

が成り立ったとする。形式的に項別微分したものを (2.2) に代入すると、

$$\begin{aligned}&\left\{R(\ell,m)^2-t^2\right\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_k''(t;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^k}\\&+2\{nR(\ell,m)-(m+1)t\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_k'(t;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_k(t;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^{k-2}}=0\end{aligned}$$

を得る。$v_{-2}(t;\ell,m,n)=v_{-1}(t;\ell,m,n)\equiv 0$ とおく。形式的に和の順序交換をすると、

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left\{1-\frac{t^2}{R(\ell,m)^2}\right\}\frac{v_k''(t;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^{k-2}}+\frac{2nv_k'(t;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^{k-1}}\right.$$

$$\left.-\frac{2(m+1)tv_k'(t;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^k}+\frac{v_k(t;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^{k-2}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left\{\begin{array}{l}v_k''(t;\ell,m,n)+v_k(t;\ell,m,n)\\ -t^2v_{k-2}''(t;\ell,m,n)+2nv_{k-1}'(t;\ell,m,n)-2(m+1)tv_{k-2}'(t;\ell,m,n)\end{array}\right\}}{R(\ell,m)^{k-2}}$$

となる。そこで、$\{v_k\}$ を

$$\begin{aligned}&v_k''(t;\ell,m,n)+v_k(t;\ell,m,n)\\ &\quad=t^2v_{k-2}''(t;\ell,m,n)-2nv_{k-1}'(t;\ell,m,n)+2(m+1)tv_{k-2}'(t;\ell,m,n)\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$v_k(0;\ell,m,n)=\delta_{k0}\cos\lambda,\quad v_k'(0;\ell,m,n)=\delta_{k0}\sin\lambda\tag{2.5}$$

を満たすものとして定義する。ここで、δ は Kronecker の delta である。これより、v_k は ℓ には依らない。以後、$v_k(t;m,n)$ で表す。(2.4) – (2.5) の解は、

$$\begin{aligned}&v_k(t;m,n)=\delta_{k0}\cos(t-\lambda)\\ &\quad+\int_0^t\sin(t-\tau)\left\{\tau^2v_{k-2}''(\tau;m,n)-2nv_{k-1}'(\tau;m,n)+2(m+1)\tau v_{k-2}'(\tau;m,n)\right\}d\tau\end{aligned}\tag{2.6}$$

で与えられる。部分積分によって、

$$\int_0^t\tau^2v_{k-2}''(\tau;m,n)\sin(t-\tau)\,d\tau$$

$$=-\int_0^t\left\{2\tau\sin(t-\tau)-\tau^2\cos(t-\tau)\right\}v_{k-2}'(\tau;m,n)\,d\tau$$

$$=t^2v_{k-2}(t;m,n)$$

$$+\int_0^t\left\{2\sin(t-\tau)-4\tau\cos(t-\tau)-\tau^2\sin(t-\tau)\right\}v_{k-2}(\tau;m,n)\,d\tau$$

$$=t^2v_{k-2}(t;m,n)+\int_0^t\left\{-4\tau\cos(t-\tau)-\left(\tau^2-2\right)\sin(t-\tau)\right\}v_{k-2}(\tau;m,n)\,d\tau,$$

$$\int_0^t v_{k-1}'(\tau;m,n)\sin(t-\tau)\,d\tau=-v_{k-1}(0;m,n)\sin t+\int_0^t v_{k-1}(\tau;m,n)\cos(t-\tau)\,d\tau$$

$$\int_0^t\tau v_{k-2}'(\tau;m,n)\sin(t-\tau)\,d\tau=-\int_0^t\{\sin(t-\tau)-\tau\cos(t-\tau)\}v_{k-2}(\tau;m,n)\,d\tau$$

$$=\int_0^t\{\tau\cos(t-\tau)-\sin(t-\tau)\}v_{k-2}(\tau;m,n)\,d\tau$$

が成り立つ。これらを (2.6) に代入すると、

$$v_k(t;m,n) = \delta_{k0}\cos(t-\lambda) + t^2 v_{k-2}(t;m,n) + 2nv_{k-1}(0;m,n)\sin t$$
$$+ \int_0^t \Big[\big\{2(m-1)\tau\cos(t-\tau) - \big(\tau^2+2m\big)\sin(t-\tau)\big\}\, v_{k-2}(\tau;m,n)$$
$$- 2nv_{k-1}(\tau;m,n)\cos(t-\tau)\Big]\, d\tau$$

を得る。特に、

$$v_0(t;m,n) = \cos(t-\lambda),$$
$$v_1(t;m,n) = 2n\left(\cos\lambda\sin t - \int_0^t v_0(\tau;m,n)\cos(t-\tau)\, d\tau\right),$$
$$v_k(t;m,n) = t^2 v_{k-2}(t;m,n) \tag{2.7}$$
$$+ \int_0^t \Big[\big\{2(m-1)\tau\cos(t-\tau) - \big(\tau^2+2m\big)\sin(t-\tau)\big\}\, v_{k-2}(\tau;m,n)$$
$$- 2nv_{k-1}(\tau;m,n)\cos(t-\tau)\Big]\, d\tau \qquad (k \geq 2)$$

となる。これより、

$$|v_0(t;m,n)| \leq 1, \quad |v_1(t;m,n)| \leq 2|n|(1+|t|)$$

が成り立つ。

$$C_2(t,m,n) = 1$$
$$+ \max_{|\tau|\leq|t|}\Big\{\big|2(m-1)\tau\cos(t-\tau) - \big(\tau^2+2m\big)\sin(t-\tau)\big| + |2n\cos(t-\tau)|\Big\}$$

とおく。n にのみ依存する定数 $C_1(n)$ を十分大きくとると、$k=0,1$ に対し、

$$|v_k(t;m,n)| \leq C_1(n)\sum_{j=0}^{k}\frac{2^k}{j!}\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}(1+|t|)^{2(k-j)}\left\{C_2(t,m,n)\,(1+|t|)\right\}^j \tag{2.8}$$

が成り立つ。$k \geq 1$ に対し、k まで上の不等式が正しいとする。(2.7) と $C_2(t, m, n)$ の定義より、

$$\frac{|v_{k+1}(t;m,n)|}{C_1(n)} \leq \frac{t^2|v_{k-1}(t;m,n)|}{C_1(n)} + \frac{C_2(t;m,n)}{C_1(n)} \int_0^{|t|} (|v_k(\tau;m,n)| + |v_{k-1}(\tau;m,n)|)\, d\tau$$

$$\leq t^2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{k-1}}{j!} \begin{pmatrix} k-1 \\ j \end{pmatrix} (1+|t|)^{2(k-1-j)} \{C_2(t,m,n)\,(1+|t|)\}^j$$

$$+ C_2(t,m,n) \int_0^{|t|} \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{2^k}{j!} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (1+\tau)^{2(k-j)} \{C_2(\tau,m,n)(1+\tau)\}^j \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{k-1}}{j!} \begin{pmatrix} k-1 \\ j \end{pmatrix} (1+\tau)^{2(k-1-j)} \{C_2(\tau,m,n)(1+\tau)\}^j \right] d\tau$$

$$\leq t^2 \sum_{j=0}^{k} \frac{2^k}{j!} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (1+|t|)^{2(k-j)} \{C_2(t,m,n)\,(1+|t|)\}^j$$

$$+ C_2(t,m,n) \int_0^{|t|} \sum_{j=0}^{k} \frac{2^{k+1}}{j!} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (1+\tau)^{2(k-j)} \{C_2(\tau,m,n)(1+\tau)\}^j\, d\tau$$

と評価される。$|\tau| \leq |t|$ であれば、$C_2(\tau,m,n) \leq C_2(t,m,n)$ であるので、更に上から、

$$t^2 \sum_{j=0}^{k} \frac{2^{k+1}}{j!} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (1+|t|)^{2(k-j)} \{C_2(t,m,n)\,(1+|t|)\}^j$$

$$+ C_2(t,m,n)^{j+1} (1+|t|)^{2(k-j)} \int_0^{|t|} \sum_{j=0}^{k} \frac{2^{k+1}}{j!} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (1+\tau)^j d\tau$$

$$\leq t^2 \sum_{j=0}^{k} \frac{2^{k+1}}{j!} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (1+|t|)^{2(k-j)} \{C_2(t,m,n)\,(1+|t|)\}^j$$

$$+ \sum_{j=0}^{k} \frac{2^{k+1}}{(j+1)!} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (1+|t|)^{2(k-j)} \{C_2(t,m,n)\,(1+|t|)\}^{j+1}$$

と評価出来る。従って、

$$
\begin{aligned}
&\frac{|v_{k+1}(t;\mu,\nu)|}{2^{k+1}C_1(n)}\\
&\leq t^2\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}(1+|t|)^{2(k-j)}\{C_2(t,m,n)(1+|t|)\}^j\\
&\quad+\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(j+1)!}\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}(1+|t|)^{2(k-j)}\{C_2(t,m,n)(1+|t|)\}^{j+1}\\
&\leq (1+|t|)^{2(k+1)}+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j!}\left\{\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k \\ j-1 \end{pmatrix}\right\}(1+|t|)^{2(k+1-j)}\{C_2(t,m,n)(1+|t|)\}^j\\
&\quad+\frac{\{C_2(t,m,n)(1+|t|)\}^{k+1}}{(k+1)!}\\
&= (1+|t|)^{2(k+1)}+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j!}\begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix}(1+|t|)^{2(k+1-j)}\{C_2(t,m,n)(1+|t|)\}^j\\
&\quad+\frac{\{C_2(t,m,n)(1+|t|)\}^{k+1}}{(k+1)!}\\
&= \sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{j!}\begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix}(1+|t|)^{2(k+1-j)}\{C_2(t,m,n)(1+|t|)\}^j
\end{aligned}
$$

となって、(2.8) は $k+1$ のときにも成立する事が分かる。

従って、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|v_k(t;m,n)|}{R(\ell,m)^k}\leq C_1(n)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4(1+|t|)^2}{R(\ell,m)}\right)^k L_k\left(-\frac{C_2(t,m,n)}{1+|t|}\right)$$

となる。Laguerre の多項式の母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty}y^k L_k(x)=\frac{\exp\left(-\dfrac{xy}{1-y}\right)}{1-y}$$

の収束半径は 1 であるので、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_k(t;m,n)}{R(\ell,m)^k}$ は、区間

$$I=\left\{t\in\mathrm{IR}\;\middle|\;|t|<\frac{\sqrt{R(\ell,m)}}{2}-1\right\}$$

上で広義一様かつ絶対収束する事が分かる。但し、$I\neq\emptyset$ となるためには、ℓ が大きくなくてはならない。収束先が $v(t;\ell,m,n)$ である事を示す。そのために、

$$z_k(t;\ell,m,n)=v(t;\ell,m,n)-\sum_{k=0}^{K}\frac{v_k(t;m,n)}{R(\ell,m)^k}$$

とおく。(2.2), (2.3), (2.4), (2.5) から、z_K は、

$$z_K''(t;\ell,m,n) + z_K(t;\ell,m,n)$$

$$= \frac{\{t^2 z_{K-2}''(t;\ell,m,n) - 2nR(\ell,m)z_{K-1}'(t;m,n) + 2(m+1)tz_{K-2}'(t;\ell,m,n)\}}{R(\ell,m)^2},$$

$$z_K(0;\ell,m,n) = z_K'(0;\ell,m,n) = 0$$

を満たす事が分かる。よって、

$$z_K(t;\ell,m,n) = \frac{1}{R(\ell,m)^2}\Bigg(t^2 z_{K-2}(t;m,n)$$

$$+ \int_0^t \left[\left\{2(m-1)\tau\cos(t-\tau) - \left(\tau^2+2m\right)\sin(t-\tau)\right\} z_{K-2}(\tau;\ell,m,n)\right.$$

$$\left. - 2nR(\ell,m)z_{K-1}(\tau;\ell,m,n)\cos(t-\tau)\right] d\tau\Bigg)$$

となる。$t \in I$ とすると、z_K はある関数 z に広義一様収束するので、上の式で $K \to \infty$ とすると、

$$\left(1 - \frac{t^2}{R(\ell,m)^2}\right) z(t;\ell,m,n)$$

$$= \int_0^t \left[\left\{2(m-1)\tau\cos(t-\tau) - \left(\tau^2+2m\right)\sin(t-\tau)\right\}\right.$$

$$\left. - 2nR(\ell,m)\cos(t-\tau)\right] z(\tau;\ell,m,n)\, d\tau$$

なる関係式が得られる。Gronwall の補題によって、$z \equiv 0$ が分かる。

$t \in I$ であるとき、

$$|z_K(t;\ell,m,n)| \le \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{|v_k(t;m,n)|}{R(\ell,m)^k} \le C_1(n) \sum_{k=K+1}^{\infty} \left\{\frac{4\,(1+|t|)^2}{R(\ell,m)}\right\}^k L_k\left(-\frac{C_2(t,m,n)}{1+|t|}\right)$$

である。以後しばらく、

$$x = -\frac{C_2(t,m,n)}{1+|t|}, \quad y = \frac{4\,(1+|t|)^2}{R(\ell,m)}, \quad f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k L_k(x) = \frac{\exp\left(-\dfrac{xy}{1-y}\right)}{1-y}$$

とおく。

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} y^k L_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k L_k(x) - \sum_{k=0}^{K} y^k L_k(x)$$

$$= f(x,y) - \sum_{k=0}^{K} \frac{y^k}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x,0) = \frac{y^{K+1}}{(K+1)!}\frac{\partial^{K+1} f}{\partial y^{K+1}}(x,\theta y)$$

となる。θ は t, ℓ, m, n に依存するが、0 と 1 の間にある。t, m, n が有界な範囲を動き、かつ、$\ell \to \infty$ のとき、$y \to 0$ となるので、

$$\limsup_{\ell\to\infty} R(\ell,m)^{K+1}|z_K(t;\ell,m,n)| \le \frac{C_1(n)2^{K+1}(1+|t|)^{2(K+1)}}{(K+1)!}\frac{\partial^{K+1}f}{\partial y^{K+1}}(x,0)$$

$$= 2^{K+1}C_1(n)(1+|t|)^{2(K+1)}L_{K+1}(x)$$

$$= 2^{K+1}C_1(n)(1+|t|)^{2(K+1)}L_{K+1}\left(-\frac{C_2(t,m,n)}{1+|t|}\right)$$

が成り立つ。

$n=0$ の場合は、より良い評価式が得られる。(2.7) より、$v_{2k+1}\equiv 0$ である事が分かる。そこで v_{2k} を改めて v_k と書く事にする。このとき、

$$C_2(t,m,n) = \max_{|\tau|\le|t|}\left|2(m-1)\tau\cos(t-\tau) - \left(\tau^2+2m\right)\sin(t-\tau)\right|$$

に対して、

$$|v_k(t;m,n)| \le \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}(C_2(t,m,n)|t|)^j$$

である事が帰納的に証明できる。これより、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|v_k(t;m,n)|}{R(\ell,m)^{2k}} \le \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^2}{R(\ell,m)^2}\right)^k L_k\left(-\frac{C_2(t,m,n)}{|t|}\right)$$

が得られる。従って、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_k(t;m,n)}{R(\ell,m)^{2k}}$ は、

$$I = \left\{t\in\mathbb{R} \,|\, t^2 < R(\ell,m)^2\right\}$$

なる区間で $v(t;\ell,m,n)$ に広義一様絶対収束する事が分かる。誤差評価

$$\limsup_{\ell\to\infty} R(\ell,m)^{2K+2}\left|v(t;\ell,m,n) - \sum_{k=0}^{K}\frac{v_k(t;m,n)}{R(\ell,m)^{2k}}\right| \le t^{2(K+1)}L_{K+1}\left(-\frac{C_2(t,m,n)}{|t|}\right)$$

も得られる。

3 Clebsch-Gordan 係数の漸近展開

Clebsch-Gordan 係数 $C(\ell_1,\ell_1-n,\ell;j,m-j,m)$ を少し変形した $\mathfrak{C}^{\ell}_{mn}(j)$ が満たす差分方程式

$$\begin{aligned}&\left\{R(\ell_1,m)^2 - R(j+1,m)^2\right\}\Delta_j^2 v(j;\ell_1,\ell,m,n)\\ &+\left[2\left\{n\ell_1-(m+1)j\right\}+R(\ell,m)^2-R(m-1,n-1)^2\right]\Delta_j v(j;\ell_1,\ell,m,n)\\ &+R(\ell,m)^2 v(j;\ell_1,\ell,m,n) = 0\end{aligned} \tag{3.1}$$

を考える。Clebsch-Gordan 係数の意味から、

$$|j| \leq \ell_1, \quad |m-j| \leq \ell_1 - n, \quad |m| \leq \ell$$

である。ここでは、

$$0 \leq m \leq \ell, \quad n \leq \ell_1, \quad m \leq j \leq \ell_1$$

で考える。

3.1 $\ell_1 = \ell$, $n = 0$ の場合

差分方程式

$$R(\ell, j+1)^2 \Delta_j^2 u(j)$$

$$+ \left\{-2(m+1)j + R(\ell,m)^2 - R(m-1,-1)^2\right\} \Delta_j u(j) + R(\ell,m)^2 u(j) = 0$$

の非自明実数解 $u(j) = u(j;\ell,m)$ の漸近展開を考える。

$$v(j;\ell,m) = \left\{u(m;\ell,m)^2 + (\Delta_j u(m;\ell,m))^2\right\}^{-\frac{1}{2}} u(j;\ell,m)$$

とおく。これは、

$$\left\{R(\ell,m)^2 - R(j+1,m)^2\right\} \Delta_j^2 v(j;\ell,m)$$

$$+ \left\{-2(m+1)j + R(\ell,m)^2 - R(m-1,-1)^2\right\} \Delta_j v(j;\ell,m) \tag{3.2}$$

$$+ R(\ell,m)^2 v(j;\ell,m) = 0$$

の解で、

$$v(m;\ell,m)^2 + (\Delta_j v(m;\ell,m))^2 = 1$$

を満たす。$v(j;\ell,m) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k(j;\ell,m)}{R(\ell,m)^{2k}}$ を形式的に代入すると、

$$\Delta_j^2 v_k + \Delta_j v_k + v_k = R(j+1,m)^2 \Delta_j^2 v_{k-1} + \left\{2(m+1)j + R(m-1,-1)^2\right\} \Delta_j v_{k-1}$$

となる。特に、v_k は ℓ に依らない。以後、$v_k(j;m)$ と書く。$\Delta_j v_k = w_k$ とおくと、

$$\Delta_j \begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ R(j+1,m)^2 \Delta_j w_{k-1} + \left\{2(m+1)j + R(m-1,-1)^2\right\} w_{k-1} \end{pmatrix}$$

となる。右辺の第 2 行を $b_k(j;m)$ とおく。

$$\Psi = I - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} v_k(j) \\ w_k(j) \end{pmatrix} = \Psi^{j-m} \begin{pmatrix} v_k(m) \\ w_k(m) \end{pmatrix} + \sum_{p=m}^{j-1} \Psi^{j-p-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b_k(p) \end{pmatrix}$$

となる。

$$\Psi^{j-p-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sin\frac{j-p}{3}\pi & \sin\frac{j-p-1}{3}\pi \\ -\sin\frac{j-p-1}{3}\pi & \sin\frac{j-p+1}{3}\pi \end{pmatrix}$$

であるので、

$$v_k(j) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(v_k(m)\sin\frac{j-m+1}{3}\pi + w_k(m)\sin\frac{j-m}{3}\pi + \sum_{p=m}^{j-1} b_k(p)\sin\frac{j-p-1}{3}\pi \right)$$

となる。Abel 変換により、

$$\sum_{p=m}^{j-1} R(p+1,m)^2 \Delta_p w_{k-1}(p)\sin\frac{j-p-1}{3}\pi$$

$$= -R(m+1,m)^2 w_{k-1}(m)\sin\frac{j-m-1}{3}\pi$$

$$- \sum_{p=m+1}^{j-1} w_{k-1}(p)\Delta_p\left\{R(p,m)^2\sin\frac{j-p}{3}\pi\right\}$$

$$= -R(m+1,m)^2 w_{k-1}(m)\sin\frac{j-m-1}{3}\pi$$

$$- \sum_{p=m+1}^{j-1} \Delta_p v_{k-1}(p)\Delta_p\left\{R(p,m)^2\sin\frac{j-p}{3}\pi\right\}$$

$$= -R(m+1,m)^2 w_{k-1}(m)\sin\frac{j-m-1}{3}\pi$$

$$+ v_{k-1}(m+1)\ \Delta_p\left\{R(p,m)^2\sin\frac{j-p}{3}\pi\right\}\Bigg|_{p=m+1}$$

$$+ \sum_{p=m+2}^{j-1} v_{k-1}(p)\Delta_p^2\left\{R(p-1,m)^2\sin\frac{j-p+1}{3}\pi\right\}$$

$$- v_{k-1}(j)\ \Delta_p\left\{R(p,m)^2\sin\frac{j-p}{3}\pi\right\}\Bigg|_{p=j-1}$$

$$\sum_{p=m}^{j-1}\{2(m+1)p+R(m-1,-1)^2\}w_{k-1}(p)\sin\frac{j-p-1}{3}\pi$$

$$=\sum_{p=m}^{j-1}\{2(m+1)p+R(m-1,-1)^2\}\Delta_p v_{k-1}(p)\sin\frac{j-p-1}{3}\pi$$

$$=-\{2(m+1)m+R(m-1,-1)^2\}v_{k-1}(m)\sin\frac{j-m-1}{3}\pi$$

$$-\sum_{p=m+1}^{j-1}v_{k-1}(p)\Delta_p\left[\left\{2(m+1)(p-1)+R(m-1,-1)^2\right\}\sin\frac{j-p}{3}\pi\right]$$

となる。

$$v_k(m)=w_k(m)=0 \quad (k\geq 1)$$

と

$$\Delta_p\left\{R(p,m)^2\sin\frac{j-p}{3}\pi\right\}\Bigg|_{p=j-1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}R(j-1,m)^2$$

に注意すると、

$$v_0(j)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(v_0(m)\sin\frac{j-m+1}{3}\pi+w_0(m)\sin\frac{j-m}{3}\pi\right),$$

$$v_k(j)=R(j-1,m)^2v_{k-1}(j)+\sum_{p=m}^{j-1}\Phi(j,p;m)v_{k-1}(p) \quad (k\geq 1)$$

となる。

$$C_2(j;m)=\max_{m\leq p\leq j-1}|\Phi(j,p;m)|$$

とおく。$j\geq m+1$ に対し、

$$|v_k(j)|\leq\sum_{q=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j\\q\end{pmatrix}C_2(j;m)^qR(j-1,m)^{2(k-q)}$$

を示す。明らかに $k=0$ のときは正しい。k のときに正しいとする。便宜上、$0\leq p\leq m-1$ に対し、$v_k(p)=0$ とおく。

$$|v_{k+1}(j)|\leq R(j-1,m)^2|v_k(j)|+\sum_{p=m}^{j-1}C_2(j;m)|v_k(p)|$$

$$\leq\sum_{q=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j\\q\end{pmatrix}C_2(j;m)^jR(j-1,m)^{2(k+1-q)}$$

$$+\sum_{p=m}^{j-1}\sum_{q=0}^{k}C_2(j;m)^{j+1}\begin{pmatrix}k\\q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}R(p,m)^{2(k-q)}$$

となる。$m \le p \le j-1$ のとき、$R(p,m)^2 \le R(j-1,m)^2$ に注意すると、

$$|v_{k+1}(j)| \le \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \binom{j}{q} C_2(j;m)^j R(j-1,m)^{2(k+1-q)}$$

$$+ \sum_{p=0}^{j-1} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \binom{p}{q} C_2(j;m)^{j+1} R(j-1,m)^{2(k-q)}$$

となる。更に、

$$\sum_{p=0}^{j-1} \binom{p}{q} = \sum_{p=q}^{j-1} \binom{p}{q} = \binom{j}{q+1}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
|v_{k+1}(j)| \le & \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \left\{ \binom{j}{q} C_2(j;m)^j R(j-1,m)^{2(k+1-q)} \right. \\
& \left. + \binom{j}{q+1} C_2(j;m)^{j+1} R(j-1,m)^{2(k-q)} \right\} \\
= \ & R(j-1,m)^{2(k+1)} \\
& + \sum_{q=1}^{k} \left\{ \binom{k}{q} + \binom{k}{q-1} \right\} \binom{j}{q} C_2(j;m)^j R(j-1,m)^{2(k+1-q)} \\
& + \binom{j}{k+1} C_2(j;m)^j R(j-1,m)^{2(k+1)} \\
= & \sum_{q=0}^{k+1} \binom{k+1}{q} \binom{j}{q} C_2(j;m)^j R(j-1,m)^{2(k+1-q)}
\end{aligned}$$

となる。更に、

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \binom{j}{q} C_2(j;m)^q R(j-1,m)^{2(k-q)} \\
& = R(j-1,m)^{2k} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \binom{j}{q} \left(\frac{C_2(j;m)}{R(j-1,m)^2} \right)^q \\
& \le R(j-1,m)^{2k} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \frac{C_2(j;m)^q}{q!} \\
& = R(j-1,m)^{2k} L_k\left(-C_2(j;m)\right)
\end{aligned}$$

と評価される事から、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|v_k(j;m)|}{R(\ell,m)^{2k}} \le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R(j-1,m)}{R(\ell,m)} \right)^{2k} L_k\left(-C_2(j;m)\right)$$

となる。Laguerre 多項式の母関数の収束半径は 1 である事から、上の級数は $0 \leq j \leq \ell$ において収束する事が分かる。$j = m$ のときは、$v_k(m) = 0\ (k \geq 1)$ であるので、明らかに $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|v_k(m;m)|}{R(\ell,m)^{2k}}$ は収束する。

次に、

$$z_K(j;\ell,m) = v(j;\ell,m) - \sum_{k=0}^{K} \frac{v_k(j;m)}{R(\ell,m)^{2k}}$$

とおく。これは、

$$\begin{aligned}
&\Delta_j^2 z_K + \Delta_j z_K + z_K \\
&= \frac{1}{R(\ell,m)^2}\left[R(j+1,m)^2 \Delta_j^2 z_{K-1} + \left\{2(m+1)j + R(m-1,-1)^2\right\}\Delta_j z_{k-1}\right],
\end{aligned}$$

$$z_K(m;\ell,m) = \Delta_j z_K(m;\ell,m) = 0$$

を満たす。従って、

$$z_K(j;\ell,m) = \frac{1}{R(\ell,m)^2}\left(R(j-1,m)^2 z_{K-1}(j;\ell,m) + \sum_{p=m}^{j-1} \Phi(j,p;m) z_{K-1}(p)\right)$$

となる。$K \to \infty$ のとき、$z_K(j;\ell,m)$ は、ある $z(j;\ell,m)$ に収束するので、上の式で $K \to \infty$ とすると、

$$\left(1 - \frac{R(j-1,m)^2}{R(\ell,m)^2}\right) z(j;\ell,m) = \frac{1}{R(\ell,m)^2} \sum_{p=0}^{j-1} \Phi(j,p;m) z(p;\ell,m)$$

となる事が分かる。差分版 Gronwall の補題を用いると、$z(j;\ell,m) \equiv 0$ が分かる。

また、$j \geq m+1$ のとき、

$$|z_K(j;\ell,m)| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{|v_k(j;m)|}{R(\ell,m)^2} \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \left(\frac{R(j-1,m)}{R(\ell,m)}\right)^{2k} L_k\left(-C_2(j;m)\right)$$

となる。以後しばらく、

$$x = -C_2(j;m), \quad y = \frac{R(j-1,m)^2}{R(\ell,m)^2}, \quad f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k L_k(x) = \frac{\exp\left(-\dfrac{xy}{1-y}\right)}{1-y}$$

とおく。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=K+1}^{\infty} y^k L_k(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} y^k L_k(x) - \sum_{k=0}^{K} y^k L_k(x) \\
&= f(x,y) - \sum_{k=0}^{K} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x,0) = \frac{y^{K+1}}{(K+1)!} \frac{\partial^{K+1} f}{\partial y^{K+1}}(x,\theta y)
\end{aligned}$$

となる。θ は j, ℓ, m に依存するが、0 と 1 の間にある。j, m が有界な範囲を動き、かつ、$\ell \to \infty$ のとき、$y \to 0$ となるので、

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\ell\to\infty} R(\ell,m)^{2K+2} |z_K(j;\ell,m)| \leq \frac{R(j-1,m)^{2(K+1)}}{(K+1)!} \frac{\partial^{K+1} f}{\partial y^{K+1}}(x,0) \\
&= R(j-1,m)^{2(K+1)} L_{K+1}(x) = R(j-1,m)^{2(K+1)} L_{K+1}\left(-C_2(j;m)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。$j=m$ のときは、$z_K(m;\ell,m)=0\ (k\geq 1)$ である。

定理 3.1

1. $|v_k(j;m)|\leq R(j-1,m)^{2k}L_k\left(-C_2(j;m)\right)$ が成立する。
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_k(j;m)}{R(\ell,m)^{2k}}$ は $m\leq j\leq \ell$ において、$v(j;\ell,m)$ に絶対収束する。
3. 任意に固定された $J\in\mathbb{N}\setminus\{1,\ \cdots,m-1\}$ に対し、

$$\limsup_{\ell\to\infty}\max_{m\leq j\leq J}R(\ell,m)^{2k+2}\left|v(j;\ell,m)-\sum_{k=0}^{K}\frac{v_k(j;m)}{R(\ell,m)^{2k}}\right|$$

$$\leq R(J-1,m)^{2(K+1)}L_{K+1}\left(-C_2(J;m)\right)$$

が成り立つ。

3.2 $\ell_1=\ell$ であるが必ずしも $n=0$ ではない場合

差分方程式

$$R(\ell,j+1)^2\Delta_j^2u(j)$$

$$+\left[2\{n\ell-(m+1)j\}-2(m+1)j+R(\ell,m)^2-R(m-1,n-1)^2\right]\Delta_ju(j)$$

$$+R(\ell,m)^2u(j)=0$$

の非自明実数解 $u(j)=u(j;\ell,m,n)$ の漸近展開を考える。

$$v(j;\ell,m,n)=\left\{u(0;\ell,m,n)^2+(\Delta_ju(0;\ell,m,n))^2\right\}^{-\frac{1}{2}}u\left(j;\ell,m,n\right)$$

とおく。これは、

$$\left\{R(\ell,m)^2-R(j+1,m)^2\right\}\Delta_j^2v(j;\ell,m,n)$$

$$+\left[2\{n\ell-(m+1)j\}+R(\ell,m)^2-R(m-1,n-1)^2\right]\Delta_jv(j;\ell,m,n) \tag{3.3}$$

$$+R(\ell,m)^2v(j;\ell,m,n)=0$$

の解で、

$$v(m;\ell,m,n)^2+\left(\Delta_jv(m;\ell,m,n)\right)^2=1$$

を満たす。

補題 3.1 正項数列 $\{a_k\}$ を

$$a_0=1,\quad a_k=\sum_{r=1}^{k}a_{r-1}a_{k-r}$$

で定義する。$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}$ は、$|x| \leq \frac{1}{4}$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

に絶対収束し、$|x| > \frac{1}{4}$ のとき発散する。

証明. $a_k|x|^{k+1} = \sum_{r=1}^{k} a_{r-1}|x|^r a_{k-r}|x|^{k-r+1}$ であるので、

$$\sum_{k=1}^{K} a_k|x|^{k+1} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{r=1}^{k} a_{r-1}|x|^r a_{k-r}|x|^{k-r+1} \leq \left(\sum_{k=0}^{K-1} a_k|x|^{k+1}\right)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{K} a_k|x|^{k+1} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{r=1}^{k} a_{r-1}|x|^r a_{k-r}|x|^{k-r+1} \geq \left(\sum_{k=0}^{[\frac{K}{2}]-1} a_k|x|^{k+1}\right)^2$$

となる。すなわち、$A_K = \sum_{k=0}^{K} a_k|x|^{k+1}$ と置くと、

$$A_{[\frac{K}{2}]-1}^2 \leq A_K - |x| \leq A_K^2$$

となる。$\{A_K\}$ は非減少列であるので、∞ も許せば、$A_\infty = \lim_{K\to\infty} A_K$ は存在する。上の不等式より、A_∞ は $y-|x| = y^2$ の実根であるか ∞ である。

$|x| \leq \frac{1}{4}$ のとき、$y-|x|=y^2$ は正の実根を持つ。そのうち大きくない方を α と置く。すなわち、$\alpha = \frac{1+\sqrt{1-4|x|}}{2}$ である。$|x| < \alpha$ であるので、$A_0 = |x| < \alpha$ となる。$A_{K-1} < \alpha$ と仮定すると、

$$A_K < |x| + A_{K-1}^2 \leq |x| + \alpha^2 = \alpha$$

となる。従って、$A_\infty = \alpha$ を得る。

$|x| > \frac{1}{4}$ のとき、$y-|x|=y^2$ は実根を持たないので、$A_\infty = \infty$ である。

整級数は、その収束域に内部では絶対収束し、収束域外では発散するので、$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}$ の収束域は、$\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ である事が分かる。また、$0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

である事が上の議論より分かる。両辺の解析性より、これは、$|x| \leq \frac{1}{4}$ のとき成立する。 □

命題 3.1 $4\ell(\ell+1) \geq 8m(m+1)+1$ のとき、

$$\ell = R(\ell,m) - \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2m+1)^{2k+2}a_k}{2^{4k+3}R(\ell,m)^{2k+1}}$$

が成立する。右辺は、絶対収束する。$4\ell(\ell+1) < 8m(m+1)+1$ のとき、右辺は発散する。

証明. $x=-\dfrac{(2m+1)^2}{2^4R(\ell,m)^2}$ とおく。$4\ell(\ell+1)\geq 8m(m+1)+1$ は、$|x|\leq\dfrac{1}{4}$ と同値である。補題 3.1 より、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2m+1)^{2k+2}a_k}{2^{4k+3}R(\ell,m)^{2k+1}}=-2R(\ell,m)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}=-R(\ell,m)\left(1-\sqrt{1-4x}\right)$$

が成立する。この収束は絶対収束である。

$$\begin{aligned}R(\ell,m)\left(1-\sqrt{1-4x}\right)&=R(\ell,m)\left\{1-\sqrt{1+\frac{(2m+1)^2}{2^2R(\ell,m)^2}}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{2R(\ell,m)-\sqrt{2^2R(\ell,m)^2+(2m+1)^2}\right\}\\&=\frac{1}{2}\{2R(\ell,m)-(2\ell+1)\}=R(\ell,m)-\ell-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

$4\ell(\ell+1)<8m(m+1)+1$ のときは、$|x|>\dfrac{1}{4}$ であるので、級数は発散する。 □

注意 3.1 命題 3.1 の証明に、補題 3.1 を用いたが、初めからこの補題に思い当たったのではない。命題の主張は、次の様にして導いた。簡単のため、$R(\ell,m)=R$, $R(m,0)=m(m+1)=M$ とおく。$R^2=\ell(\ell+1)-M$ に、$\ell=\displaystyle\sum_{p=-1}^{\infty}\frac{\ell_p}{R^p}$ を形式的に代入すると、

$$R^2=R^2\ell_{-1}^2+(2\ell_{-1}\ell_0+\ell_{-1})R+2\ell_{-1}\ell_1+\ell_0^2+\ell_0-M+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{R^p}\left(\sum_{q=-1}^{p+1}\ell_q\ell_{p-q}+\ell_p\right)$$

となる。R^2, R, R^0, R^{-1} の係数を比較して、

$$\ell_{-1}^2=1,\quad 2\ell_{-1}\ell_0+\ell_{-1}=0,\quad 2\ell_{-1}\ell_1+\ell_0^2+\ell_0-M,\quad 2(\ell_{-1}\ell_2+\ell_0\ell_1)+\ell_1=0$$

となる。$\dfrac{R}{\ell}\to 1$ $(\ell\to\infty)$ を考慮すると、$\ell_{-1}=1$ となる。これより、

$$\ell_{-1}=1,\quad \ell_0=-\frac{1}{2},\quad \ell_1=\frac{4M+1}{2^3},\quad \ell_2=0$$

を得る。

まず、2 以上の偶数 k に対し、$\ell_k=0$ である事を帰納法で示す。$p\geq 3$ を奇数とする。$k=2,4,\cdots,p-1$ に対し、$\ell_k=0$ と仮定する。これは、$p=3$ の場合には正しい。ℓ_{-1}, ℓ_0 の値より、

$$0=\sum_{q=-1}^{p+1}\ell_q\ell_{p-q}+\ell_p=2\left(\ell_{-1}\ell_{p+1}+\ell_0\ell_p+\sum_{q=1}^{\frac{p+1}{2}}\ell_q\ell_{p-q}\right)+\ell_p=2\ell_{p+1}+\sum_{q=1}^{\frac{p+1}{2}}\ell_q\ell_{p-q}$$

となる。$\dfrac{p+1}{2}\leq p-1$ であるので、1 から $\dfrac{p+1}{2}$ までの各 q に対し、q と $p-q$ のどちらか一方は $p-1$ 以下の偶数である。従って、帰納法の仮定から $\displaystyle\sum_{q=1}^{\frac{p+1}{2}}\ell_q\ell_{p-q}=0$ である事が分かる。ゆえに、$\ell_{p+1}=0$ となる。

次に $p=2k$ は偶数とする。上で示した事から、

$$0=\sum_{q=-1}^{p+1}\ell_q\ell_{p-q}+\ell_p=\ell_{-1}\ell_{2k}+\sum_{q=1}^{2k+1}\ell_q\ell_{2k-q}+\ell_{2k+1}\ell_{-1}=2\ell_{2k+1}+\sum_{r=1}^{k}\ell_{2r-1}\ell_{2k-2r+1},$$

すなわち、$\ell_{2k+1}=b_k$ とおくと、

$$b_k=-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}b_{r-1}b_{k-r}$$

となる。特に、

$$b_1=-\frac{1}{2}b_0^2=-\frac{1}{2}\ell_1^2=-\frac{(4M+1)^2}{2^7},$$

$$b_2=-\frac{1}{2}\left(b_0b_1+b_1b_0\right)=-b_0b_1=-\ell_1\ell_3=\frac{(4M+1)^3}{2^{10}}$$

となる。

そこで、$b_k=(-1)^k2^{-4k-3}(4M+1)^{k+1}a_k$ とおくと、

$$\begin{aligned}(-1)^k2^{-4k-3}(4M+1)^{k+1}a_k &= -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}2^{-4(r-1)-3}(4M+1)^r a_{r-1}\\ &\qquad\times(-1)^{k-r}2^{-4(k-r)-3}(4M+1)^{k-r+1}a_{k-r}\\ &= (-1)^k2^{-4k-3}(4M+1)^{k+1}\sum_{r=1}^{k}a_{r-1}a_{k-r}\end{aligned}$$

となる。また、

$$a_0=\frac{2^3b_0}{4M+1}=\frac{2^3\ell_1}{4M+1}=1$$

である。よって、

$$\ell\sim R-\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{R^{2k+1}}=R-\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4M+1)^{k+1}a_k}{2^{4k+3}R^{2k+1}}$$

となる。

級数が絶対収束性すれば、これまでの形式的な計算はすべて正当化され、$R^2=\ell_\infty(\ell_\infty+1)-M$ が満たされる。すなわち、

$$\ell(\ell+1)=\ell_\infty(\ell_\infty+1)$$

となる。これより、$\ell_\infty=\ell$ または、$-\ell-1$ となる。$\ell_1=1$ としたので、後者はありえない。 □

$\ell=\sum_{p=-1}^{\infty}\frac{\ell_p(m)}{R(\ell,m)^p}$ と $v(j;\ell,m,n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_k(j;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^k}$ を形式的に (3.3) に代入すると、

$$\begin{aligned}&\left\{R(\ell,m)^2-R(j+1,m)^2\right\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_j^2v_k(j;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^k}\\ &+\left[2\left\{n\sum_{p=-1}^{\infty}\frac{\ell_p(m)}{R(\ell,m)^p}-(m+1)j\right\}-R(m-1,n-1)^2\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_jv_k(j;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^k}\\ &+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_jv_k(j;\ell,m,n)+v_k(j;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^{k-2}}=0\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\sum_{p=-1}^{\infty} \frac{\ell_p(m)}{R(\ell,m)^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta_j v_k(j;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=-1}^{k-2} \frac{\ell_p(m)\Delta_j v_{k-2-p}(j;\ell,m,n)}{R(\ell,m)^{k-2}}$$

であるので、$v_{-2}(j;\ell,m,n) \equiv v_{-1}(j;\ell,m,n) \equiv 0$ と置けば、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R(\ell,m)^{k-2}} \Bigg[\Delta_j^2 v_k + \Delta_j v_k + v_k - R(j+1,m)^2 \Delta_j^2 v_{k-2}$$

$$+ 2n \sum_{p=-1}^{k-1} \ell_p(m)\Delta_j v_{k-2-p} - \left\{2(m+1)j + R(m-1,n-1)^2\right\} \Delta_j v_{k-2} \Bigg] = 0,$$

すなわち、形式的には、

$$\Delta_j^2 v_k + \Delta_j v_k + v_k$$

$$= R(j+1,m)^2 \Delta_j^2 v_{k-2} + \left\{2(m+1)j + R(m-1,n-1)^2\right\} \Delta_j v_{k-2}$$

$$- 2n \sum_{p=-1}^{k-1} \ell_p(m) \Delta_j v_{k-2-p}$$

となる。特に、v_k は ℓ に依存しない。以後、$v_k(j;m,n)$ と書く。右辺を $b_k(j;m,n)$ とおくと、

$$v_k(j) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(v_k(m) \sin \frac{j-m+1}{3}\pi + w_k(m) \sin \frac{j-m}{3}\pi + \sum_{q=m}^{j-1} b_k(q) \sin \frac{j-q-1}{3}\pi \right)$$

となる。Abel 変換により、

$$\sum_{q=m}^{j-1} R(q+1,m)^2 \Delta_q^2 v_{k-2}(p) \sin \frac{j-q-1}{3}\pi$$

$$= -R(m+1,m)^2 w_{k-2}(m) \sin \frac{j-m-1}{3}\pi$$

$$+ v_{k-2}(m+1)\ \Delta_q \left\{ R(q,m)^2 \sin \frac{j-q}{3}\pi \right\} \Bigg|_{q=m+1}$$

$$+ \sum_{q=m+2}^{j-1} v_{k-2}(q) \Delta_q^2 \left\{ R(q-1,m)^2 \sin \frac{j-q+1}{3}\pi \right\} + \frac{\sqrt{3}}{2} R(j-1,m)^2 v_{k-2}(j)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} R(j-1,m)^2 v_{k-2}(j) + \sum_{q=m}^{j-1} \Phi_1(j,q;m) v_{k-2}(q)$$

$$\sum_{q=m}^{j-1}\{2(m+1)q+R(m-1,n-1)^2\}\Delta_q v_{k-2}(q)\sin\frac{j-q-1}{3}\pi$$

$$=-\{2(m+1)m+R(m-1,n-1)^2\}v_{k-2}(m)\sin\frac{j-m-1}{3}\pi$$

$$-\sum_{q=m+1}^{j-1}v_{k-2}(q)\Delta_q\left[\left\{2(m+1)(q-1)+R(m-1,n-1)^2\right\}\sin\frac{j-q}{3}\pi\right]$$

$$=\sum_{q=m}^{j-1}\Phi_2(j,q;m,n)v_{k-2}(q),$$

$$-2\sum_{q=m}^{j-1}\sum_{p=-1}^{k-1}\ell_p(m)\Delta_q v_{k-2-p}(q)\sin\frac{j-q-1}{3}\pi$$

$$=2\sum_{p=-1}^{k-1}\ell_p(m)\left\{v_{k-2-p}(m)\sin\frac{j-m-1}{3}\pi+\sum_{q=m+1}^{j-1}v_{k-2-p}(q)\Delta_q\sin\frac{j-q-2}{3}\pi\right\}$$

$$=\sum_{p=-1}^{k-1}\ell_p(m)\sum_{q=m}^{j-1}\Phi_3(j,q;m)v_{k-2-p}(q)$$

となる。

$$\Phi(j,q,p;m,n)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{-2\delta_{p0}\left(\Phi_1(j,q;m)+\Phi_2(j,q;m,n)\right)+n\Phi_3(j,q;m)\right\}$$

と置くと、

$$v_0(j)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(v_0(m)\sin\frac{j-m+1}{3}\pi+\Delta_j v_0(m)\sin\frac{j-m}{3}\pi\right),$$

$$v_k(j)=R(j-1,m)^2v_{k-2}(j)+\sum_{p=-1}^{k-1}\sum_{q=m}^{j-1}\ell_p(m)\Phi(j,q,p;m,n)v_{k-p-2}(q)\quad(k\geq 1)$$

となる。

$$V_K(j,m,n)=\sum_{k=0}^{K}\frac{|v_k(j;m,n)|}{R(\ell,m)^k},\quad \bar{V}_K(J,m,n)=\max_{0\leq j\leq J}V_K(j,m,n)$$

とおく。$\Phi(j,q,p;m,n)$ は p に関しては一様有界である。そこで、$m+1$ 以上の自然数 J に対し、

$$C_2(J,m,n)=\max\left\{\,|\Phi(j,q,p;m,n)|\;\middle|\;m\leq q\leq\max\{0,j-1\},\,0\leq j\leq J,\ p\geq -1\right\}$$

とおく。また、$\displaystyle\sum_{p=-1}^{\infty}\frac{\ell_p(m)}{R(\ell,m)^p}$ が絶対収束するように ℓ を大きくとり、

$$C_3(\ell,m)=\sum_{p=-1}^{\infty}\frac{|\ell_p(m)|}{R(\ell,m)^p}$$

とおく。$m+1 \leq j \leq J$ なるとき、

$$V_K(j,m,n) - V_0(j,m,n) = \sum_{k=1}^{K} \frac{|v_k(j;m,n)|}{R(\ell,m)^k}$$

$$\leq \frac{R(j-1,m)^2}{R(\ell,m)^2} \sum_{k=1}^{K} \frac{|v_{k-2}(j;m,n)|}{R(\ell,m)^{k-2}}$$

$$+ \frac{C_2(J,m,n)}{R(\ell,m)^2} \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=-1}^{k-1} \sum_{q=0}^{j-1} \frac{|\ell_p(m)|}{R(\ell,m)^p} \frac{|v_{k-p-2}(q;m,n)|}{R(\ell,m)^{k-p-2}}$$

$$\leq \frac{R(j-1,m)^2}{R(\ell,m)^2} V_{K-2}(j,m,n) + \frac{C_2(J,m,n)C_3(\ell,m)}{R(\ell,m)^2} \sum_{q=0}^{j-1} V_{K-1}(q,m,n)$$

$$\leq \frac{R(J-1,m)^2}{R(\ell,m)^2} \bar{V}_{K-2}(J,m,n) + \frac{C_2(J,m,n)C_3(\ell,m)J}{R(\ell,m)^2} \bar{V}_{K-1}(J,m,n)$$

となる。よって、

$$\bar{V}_K(J,m,n) \leq \bar{V}_0(J,m,n) + \frac{R(J-1,m)^2}{R(\ell,m)^2} \bar{V}_{K-2}(J,m,n)$$

$$+ \frac{C_2(J,m,n)C_3(\ell,m)J}{R(\ell,m)^2} \bar{V}_{K-1}(J,m,n)$$

を得る。$C_3(\ell,m) = \mathcal{O}(\ell)$, $R(\ell,m)^2 = \mathcal{O}(\ell^2)$ $(\ell \to \infty)$ に注意すると、ある $\ell_* = \ell_*(J,m,n)$ が存在して、$\ell \geq \ell_*$ であれば、

$$x = \bar{V}_0(J,m,n) + \frac{R(J-1,m)^2}{R(\ell,m)^2} x + \frac{C_2(J,m,n)C_3(\ell,m)J}{R(\ell,m)^2} x$$

は、唯一つの正の根 $x_* > \bar{V}_0(J,m,n)$ を持つ事が分かる。$\bar{V}_{K-2}(J,m,n) \leq x_*$, $\bar{V}_{K-1}(J,m,n) \leq x_*$ とする。これらは、$K=1$ のとき正しい。また、

$$\bar{V}_K(J,m,n) \leq \bar{V}_0(J,m,n) + \frac{R(J-1,m)^2}{R(\ell,m)^2} x_* + \frac{C_2(J,m,n)C_3(\ell,m)J}{R(\ell,m)^2} x_* = x_*$$

となる。ゆえに、全ての $K \in \mathbb{N}$ に対し、$\bar{V}_K(J,m,n) \leq x_*$ となる。すなわち、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k(j;m,n)}{R(\ell,m)^k}$ は絶対収束する。$j=m$ のときは、$v_k(m;m,n) = 0$ $(k \geq 1)$ であるので、明らかに $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k(m;m,n)}{R(\ell,m)^k}$ は絶対収束する。

$$z_K(j;\ell,m,n) = v(j;\ell,m,n) - \sum_{k=0}^{K} \frac{v_k(j;m,n)}{R(\ell,m)^k}$$

とおく。これは、

$$\Delta_j^2 z_K + \Delta_j z_K + z_K$$

$$= \frac{1}{R(\ell,m)^2}\Big[R(j+1,m)^2\Delta_j z_{K-2} + \left\{2(m+1)j + R(m-1,n-1)^2\right\}\Delta_j z_{K-2}$$

$$-2n\left\{\sum_{p=-1}^{K-1}\frac{\ell_p(m)}{R(\ell,m)^p}\Delta_j z_{k-p-1} + \sum_{p=K}^{\infty}\frac{\ell_p(m)}{R(\ell,m)^p}\Delta_j v\right\}\Big],$$

$$z_K(m;\ell,m,n) = \Delta_j z_K(m;\ell,m,n) = 0$$

を満たす。従って、

$$z_K(j;\ell,m,n) = \frac{R(j-1,m)^2}{R(\ell,m)^2} z_{K-2}(j;\ell,m,n)$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}R(\ell,m)^2}\sum_{q=m}^{j-1}\left(\Phi_1(j,q,m)+\Phi_2(j,q,m)\right) z_{K-2}(q;\ell,m,n)$$

$$+\frac{2n}{\sqrt{3}R(\ell,m)^2}\sum_{p=1}^{K-1}\frac{\ell_p(m)}{R(\ell,m)^p}\sum_{q=m}^{j-1}\Phi_3(j,q,m) z_{K-p-1}(q;\ell,m,n)$$

$$-\frac{4n}{\sqrt{3}R(\ell,m)^2}\sum_{q=m}^{j-1}\sum_{p=K}^{\infty}\frac{\ell_p(m)}{R(\ell,m)^p}\Delta_q v(q;\ell,m,n)\sin\frac{j-q-1}{3}\pi$$

となる。$K\to\infty$ とすると、$z_K(j;\ell,m,n)$ はある $z(j;\ell,m,n)$ に収束するので、上の式で $K\to\infty$ とすると、

$$\left(1-\frac{R(j-1,m)^2}{R(\ell,m)^2}\right) z(j;\ell,m,n) = \frac{1}{R(\ell,m)^2}\sum_{q=m}^{j-1}\tilde{\Phi}(j,q;\ell,m,n) z(q;\ell,m,n)$$

となる事が分かる。差分版 Gronwall の補題を用いると、$z(j;\ell,m,n)\equiv 0$ が分かる。

3.3 $\ell_1 \neq \ell$ の場合

差分方程式

$$R(\ell_1,j+1)^2\Delta_j^2 u(j)$$

$$+\left[2\{n\ell_1-(m+1)j\} - 2(m+1)j + R(\ell,m)^2 - R(m-1,n-1)^2\right]\Delta_j u(j)$$

$$+R(\ell,m)^2 u(j) = 0$$

の非自明実数解 $u(j) = u(j;\ell_1,\ell,m,n)$ の漸近展開を考える。

$$v(j;\ell_1,\ell,m,n) = \left\{u(0;\ell_1,\ell,m,n)^2 + (\Delta_j u(0;\ell_1,\ell,m,n))^2\right\}^{-\frac{1}{2}} u(j;\ell_1,\ell,m,n)$$

とおく。これは、(3.1) の解で、

$$v(m;\ell_1,\ell,m,n)^2+(\Delta_j v(m;\ell_1,\ell,m,n))^2=1$$

を満たす。

$\ell_1=\sum_{p=-1}^{\infty}\dfrac{\ell_p(m)}{R(\ell_1,m)^p}$ と $v(j;\ell_1,\ell,m,n)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{v_k(j;\ell_1,\ell,m,n)}{R(\ell_1,m)^k}$ を形式的に (3.1) に代入すると

$$\begin{aligned}&\left\{R(\ell_1,m)^2-R(j+1,m)^2\right\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_j^2 v_k(j;\ell_1,\ell,m,n)}{R(\ell_1,m)^k}\\&+\left[2\left\{n\sum_{p=-1}^{\infty}\frac{\ell_p(m)}{R(\ell_1,m)^p}-(m+1)j\right\}-R(m-1,n-1)^2\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_j v_k(j;\ell_1,\ell,m,n)}{R(\ell_1,m)^k}\\&+R(\ell,m)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_j v_k(j;\ell_1,\ell,m,n)+v_k(j;\ell_1,\ell,m,n)}{R(\ell_1,m)^k}=0\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\sum_{p=-1}^{\infty}\frac{\ell_p(m)}{R(\ell_1,m)^p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_j v_k(j;\ell_1,\ell,m,n)}{R(\ell_1,m)^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=-1}^{k-2}\frac{\ell_p(m)\Delta_j v_{k-2-p}(j;\ell_1,\ell,m,n)}{R(\ell_1,m)^{k-2}}$$

であるので、$v_{-2}(j;\ell,m,n)\equiv v_{-1}(j;\ell,m,n)\equiv 0$ と置けば、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{R(\ell_1,m)^{k-2}}\Bigg[&\Delta_j^2 v_k+R(\ell,m)^2\left(\Delta_j v_{k-2}+v_{k-2}\right)-R(j+1,m)^2\Delta_j^2 v_{k-2}\\&+2n\sum_{p=-1}^{k-1}\ell_p(m)\Delta_j v_{k-2-p}-\left\{2(m+1)j+R(m-1,n-1)^2\right\}\Delta_j v_{k-2}\Bigg]=0,\end{aligned}$$

すなわち、形式的には、

$$\begin{aligned}\Delta_j^2 v_k=&-R(\ell,m)^2\left(\Delta_j v_{k-2}+v_{k-2}\right)\\&+R(j+1,m)^2\Delta_j^2 v_{k-2}+\left\{2(m+1)j+R(m-1,n-1)^2\right\}\Delta_j v_{k-2}\\&-2n\sum_{p=-1}^{k-1}\ell_p(m)\Delta_j v_{k-2-p}\end{aligned}$$

となる。特に、v_k は ℓ_1 に依存しない。以後、$v_k(j;\ell,m,n)$ と書く。右辺を $b_k(j;\ell,m,n)$ とおくと、

$$v_k(j)=v_k(m)+(j-m)w_k(m)+\sum_{q=m}^{j-1}(j-q-1)b_k(q)$$

となる。Abel 変換により、

$$\sum_{q=m}^{j-1}(j-q-1)\Delta_q v_{k-2}(q)=-(j-m-1)v_{k-2}(m)+\sum_{q=m+1}^{j-1}v_{k-2}(q),$$

$$\sum_{q=m}^{j-1} R(q+1,m)^2(j-q-1)\Delta_q^2 v_{k-2}(q)$$

$$= -R(m+1,m)^2(j-m-1)\Delta_q v_{k-2}(m) - \sum_{q=m+1}^{j-1} \Delta_q \left\{R(q,m)^2(j-q)\right\} \Delta_q v_{k-2}(q)$$

$$= -R(m+1,m)^2(j-m-1)w_{k-2}(m) + \Delta_q \left\{R(q,m)^2(j-q)\right\}\Big|_{q=m+1} v_{k-2}(m)$$

$$+ \sum_{q=m+2}^{j-1} v_{k-2}(q)\Delta_q^2 \left\{R(q-1,m)^2(j-q+1)\right\}$$

$$- \Delta_q \left\{R(q,m)^2(j-q)\right\}\Big|_{q=j-1} v_{k-2}(j),$$

$$\sum_{q=m}^{j-1} \left\{2(m+1)q + R(m-1,n-1)^2\right\}(j-q-1)\Delta_q v_{k-2}(q)$$

$$= -\{2(m+1)m + R(m-1,n-1)^2\}(j-m-1)v_{k-2}(m)$$

$$- \sum_{q=m+1}^{j-1} \Delta_q \left[\left\{2(m+1)(q-1) + R(m-1,n-1)^2\right\}(j-q)\right] v_{k-2}(q),$$

$$\sum_{q=m}^{j-1}\sum_{p=-1}^{k-1} \ell_p(m)(j-q-1)\Delta_q v_{k-2-p}(q)$$

$$= -\sum_{p=-1}^{k-1} \ell_p(m) \left\{(j-m-1)v_{k-2-p}(m) + \sum_{q=m+1}^{j-1} v_{k-2-p}(q)\right\}$$

となる。ここで、

$$\Delta_q \left\{R(q,m)^2(j-q)\right\}\Big|_{q=j-1} = -R(j-1,m)^2$$

に注意すると、

$$v_0(j) = v_0(m) + (j-m)w_0(m),$$

$$v_k(j) = R(j-1,m)^2 v_{k-2}(j) + \sum_{p=-1}^{k-1}\sum_{q=m}^{j-1} \ell_p(m)\Phi(j,q,p;\ell,m,n)v_{k-p-2}(q) \quad (k \geq 1)$$

と表される事が分かる。以後は、§ 2.2 と同様にして、ℓ_1 が j, ℓ, m, n に比べて十分大きいとき、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k(j;\ell,m,n)}{R(\ell_1,m)^k}$ は、$v(j;\ell,m,n)$ に絶対収束する事が示される。

4 具体例

この節では、注意 1.2 で述べた $\{q_\ell^j\}$ の $\ell \to \infty$ における漸近展開を具体的に計算する。これは、$\mathfrak{C}_{00}^\ell(j)$ に関する計算に相当する。

$$q_\ell^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k^j}{\ell^k(\ell+1)^k},$$

とおく $u_{-1}^j = 0$ とおくと形式的に、

$$\left\{\ell(\ell+1) - 2j^2\right\} q_\ell^j = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{u_{k+1}^j - 2j^2 u_k^j}{\ell^k(\ell+1)^k}$$

となる。同様に $u_{-1}^{j\pm1} = 0$ とおくと、

$$\{\ell(\ell+1) - j(j\pm1)\} q_\ell^{j\pm1} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{u_{k+1}^{j\pm1} - j(j\pm1)u_k^{j\pm1}}{j^k(j+1)^k}$$

となる。これらを、(1.35) に形式的に代入すると、

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{\ell^k(\ell+1)^k}\left[\left\{u_{k+1}^{j+1} - j(j+1)u_k^{j+1}\right\}\right.$$

$$\left. - u_{k+1}^j + 2j^2 u_k^j + \left\{u_{k+1}^{j-1} - j(j-1)u_k^{j-1}\right\}\right] = 0$$

を得る。そこで、$\{u_k^j\}$ を

$$\left\{u_{k+1}^{j+1} - j(j+1)u_k^{j+1}\right\}$$

$$- u_{k+1}^j + 2j^2 u_k^j + \left\{u_{k+1}^{j-1} - j(j-1)u_k^{j-1}\right\} = 0$$

の解として定義する。

$$v_k^j = \Delta_j u_k^j$$

で v_k^j を定義する。これらは、

$$\Delta_m \begin{pmatrix} u_k^j \\ v_k^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k^j \\ v_k^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{k-1}^{j+1} \end{pmatrix}$$

を満たす。ここで b_k^j は、

$$b_k^j = j(j+1)u_k^{j+1} - 2j^2 u_k^j + j(j-1)u_k^{j-1} = j\Delta_j^2\left\{(j-1)u_k^{j-1}\right\}$$

である。また、$q_\ell^0 = 2,\ q_\ell^1 = 1$ である ([1]) ので、

$$u_k^0 = \begin{cases} 2 & (k=0), \\ 0 & (k \geq 1), \end{cases} \qquad v_k^0 = \begin{cases} -1 & (k=0), \\ 0 & (k \geq 1). \end{cases}$$

となる。

行列 R を

$$R = I - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、定数変化公式より、解は、

$$\begin{pmatrix} u_k^j \\ v_k^j \end{pmatrix} = R^j \begin{pmatrix} u_k^0 \\ v_k^0 \end{pmatrix} + \sum_{p=0}^{j-1} R^{j-p-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b_{k-1}^{p+1} \end{pmatrix}$$

と表示される。ここで、

$$R^{j-p-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sin\frac{(j-p)\pi}{3} & \sin\frac{(j-p-1)\pi}{3} \\ -\sin\frac{(j-p-1)\pi}{3} & \sin\frac{(j-p+1)\pi}{3} \end{pmatrix}$$

であるので、Abel 変換を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} u_k^j = & \; u_k^0 \cos\frac{j\pi}{3} + j(j-1)u_{k-1}^j \\ & - \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{p=0}^{j-1} p \left\{ p \sin\frac{(j-p)\pi}{3} + \sqrt{3}\cos\frac{(j-p)\pi}{3} \right\} u_{k-1}^p \end{aligned}$$

が得られる。ここで、$j = 0$ のとき、$\sum_{p=0}^{j-1} \cdots = 0$ と解釈する。特に、

$$u_0^j = 2\cos\frac{j\pi}{3}$$

である。また、$k \geq 1$ のとき、

$$u_k^j = j(j-1)u_{k-1}^j - \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{p=0}^{j-1} p \left\{ p \sin\frac{(j-p)\pi}{3} + \sqrt{3}\cos\frac{(j-p)\pi}{3} \right\} u_{k-1}^p$$

となる。従って、特に、次が得られる。

系 4.1 $j \geq 2$ に対して

$$q_\ell^j = 2\cos\frac{j\pi}{3} + \frac{2j^2}{3\sqrt{3}\ell(\ell+1)} \left(\sqrt{3}\cos\frac{j\pi}{3} - j\sin\frac{j\pi}{3} \right) + \mathcal{O}(\ell^{-4})$$

が成立する。特に、$\ell \to \infty$ のとき、

$$q_\ell^j \to \begin{cases} 2+0 & (j \equiv 0 \mod 6), \\ 1-0 & (j \equiv 1 \mod 6), \\ -1-0 & (j \equiv 2 \mod 6), \\ -2-0 & (j \equiv 3 \mod 6), \\ -1+0 & (j \equiv 4 \mod 6), \\ 1+0 & (j \equiv 5 \mod 6) \end{cases}$$

が成立する。

参考文献

[1] Nagasawa, T. & I. Takagi, *Bifurcating critical points of bending energy under constraints related to the shape of red blood cells*, Calc. Var. Partial Differential Equations **16** (1) (2003), 63–111.

[2] Vilenkin, N. J., "Special Functions and the Theory of Group Representations", Trans. Math. Monographs **22**, Amer. Math. Soc., Providence, 1968.

小研究集会「曲線と曲面の非線型解析」

日程 2004 年 12 月 16 日（木）– 18 日（土）

場所 埼玉大学大宮ソニックシティカレッジ
〒330-8669　さいたま市大宮区桜木町 1-7-5
ソニックシティビル５階
(tel & fax 048-647-4323)
JR 各線「大宮」駅西口下車徒歩３分
詳細は、http://www.saitama-u.ac.jp/koho/area/satellite/index.ht
をご覧下さい。
（埼玉大学のキャンパス内ではありませんのでご注意下さい。）

12 月 16 日（木）

14:00–14:50　川久保 哲 (福岡大理)
３次元空間形内の Kirchhoff 弾性棒

15:00–15:50　剱持 勝衛 (東北大理)
平均曲率を保つ周期的回転超曲面の変形について

16:00–16:50　阪本 邦夫 (埼玉大理)
法曲率テンソルに関する変分問題に付いて

12 月 17 日 (金)

10:00–10:50　岡部 真也 (東北大理)
囲む面積が一定な平面弾性閉曲線の運動

11:00–11:50　渡辺 宏太郎 (防衛大情報工)
弾性エネルギーの変分問題とラプラシアンの
固有値問題の関連について

（裏面に続く）

14:00–14:50　村井 実 (龍谷大理工)
回転数一般の場合の最小曲率エネルギー曲線方程式の大域的解構造

15:00–15:50　高坂 良史 (室蘭工業大工)
Linearized stability analysis of three phase boundary motion by surface diffusion

16:00–16:50　長澤 壯之 (埼玉大理)
Helfrich 変分問題の非軸対称解

12 月 18 日 (土)

10:00–10:50　立川 篤 (東京理科大理工)
Harmonic maps into Finsler manifolds

11:00–11:50　坂元 国望 (広島大理)
Curvature flows and reaction-diffusion systems on manifolds

尚、本研究集会は、

- 科学研究費補助金基盤研究 C（2）15540195（研究代表者：長澤 壯之）
- 21 世紀総合研究機構研究プロジェクト A04-52（研究代表者：長澤 壯之）

の援助を受けております。