結び目および絡み目の有限デーン手術の研究

課題番号　１５５４００６１

平成１５年度～平成１７年度　科学研究費補助金

基盤研究（C）

研究成果報告書

平成１８年３月

研究代表者　　下　川　航　也

（埼玉大学理学部助教授）

は し が き

平成１５年度から平成１７年度にかけて、科学研究費補助金（基盤研究（C））の交付を受け、「結び目および絡み目の有限デーン手術」の研究を行った。

デーン手術とは、主に、３次元球面内の結び目または絡み目を用いて、３次元多様体を生成する方法である。任意の向き付け可能閉３次元多様体は３次元球面内の絡み目のデーン手術で得られることが知られている。この研究は、結び目に関してのデーン手術の特徴付けを目標にしている。

結び目は、トーラス結び目、サテライト結び目、双曲結び目の３種類に分類されることが知られている。トーラス結び目とサテライト結び目のデーン手術はある程度特徴付けが終わっており、双曲結び目の研究が中心課題となる。サーストンの研究により、双曲絡み目のデーン手術で双曲多様体以外が得られる場合（例外手術と言う）は、非常に限られることが知られている。特に、双曲結び目の場合は、各結び目に対しその数は有限になるため、その全てを数え上げることが問題となる。現在、モンテシーノス結び目に付いて、その完全な理解を目指し研究を続けている。モンテシーノス結び目の例外的デーン手術のうち、可約な多様体が得られる場合は既に知られていて、さらに最近本質的トーラスが得られる場合の分類がされたので、それ以外の場合である有限な基本群を持つ多様体が得られる場合と、ザイフェルト多様体が得られる場合について研究を行った。特に、有限な基本群をもつ多様体が得られる場合の完全な分類を目標として研究を行ってきた。具体的には、そのような例外デーン手術を持つ可能性がある結び目の系列は限られているのことが知られているので、それらについて研究を行い、その一部について結果を得た。用いた方法は、結び目の補空間の基本群のSL(2,C)への表現を用いるものである。しかし、その研究はまだ途中段階であり、その完全な理解は今後の課題となる。また、その研究過程において、モンテシーノス結び目の外部空間の本質的曲面と、その基本群のSL(2,C)への表現との関係に関する結果を得た。

この科学研究費補助金を得て、埼玉大学において「埼玉大学木曜セミナー」を開催することが出来、多くの方に講演を頂いた。その講演のタイトルと、アブストラクトを掲載する。講演頂いた方に、この場を借りてお礼を申し上げます。

最後に、３年間の研究期間、研究にご協力頂いた研究分担者の方々に、心よりお礼申し上げます。

科学研究費補助金（基盤研究（C））　研究成果報告書

研究課題

結び目および絡み目の有限デーン手術の研究

課題番号

１５５４００６１

研究組織

研究代表者　下川　航也　（埼玉大学・理学部・助教授）
研究分担者　水谷　忠良　（埼玉大学・理学部・教授）
研究分担者　阪本　邦夫　（埼玉大学・理学部・教授）
研究分担者　長瀬　正義　（埼玉大学・理学部・教授）
研究分担者　江頭　信二　（埼玉大学・理学部・助手）

研究経費

	直接経費	間接経費	合計
平成１５年度	１３００千円	０千円	１３００千円
平成１６年度	１２００千円	０千円	１２００千円
平成１７年度	１１００千円	０千円	１１００千円
計	３６００千円	０千円	３６００千円

研究発表

（1）主な発表論文等

1. Tangle sum and constructible spheres / M. Hachimori and K. Shimokawa, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004) 373-383.
2. Essential laminations and branched surfaces in the exteriors of links / M. Brittenham, C. Hayashi, M. Hirasawa, T. Kobayashi and K. Shimokawa, Japan. J. Math. **31** (2005) 25-96.
3. Foliations associated with Nambu-Jacobi structures / K. Mikami and T. Mizutani, Tokyo Journal of Mathematics **28** (2005) 33-54.
4. Integrability of plane fields defined by 2-vector fields/ K. Mikami and T. Mizutani, Internat. J. Math. **16** (2005) 197-212.
5. Variational problems of normal curvature tensor and concircular scalar fields / K. Sakamoto, Tohoku Math. J. **55** (2003) 207-254.
6. CR Einstein-Weyl structures / T. Ohkubo and K. Sakamoto, Tsukuba J. Math. **110** (2005) 309-361.

（2）主な口頭発表

1. 下川航也　「最近の Dehn surgery のいくつかの話題について」　研究集会「結び目と多様体の幾何と代数 II」, 2003 年 9 月, 甲南大学.
2. 下川航也　「Tangle sum and constructible spheres」 国際研究集会「First KOOK Seminar International for Knot Theory and Related Topics」, 2004 年 7 月, 淡路夢舞台国際会議場.
3. 下川航也　「Culler-Shalen theory and A-polynomial」 研究集会「A多項式サマーセミナー」, 2004 年 8 月, 東京工業大学.

研究経費により支援したセミナー

当研究経費を用いて、「埼玉大学木曜セミナー」の講演者の一部に対し、旅費、謝金等の支給を行った。以下、埼玉大学木曜セミナーの講演タイトルとアブストラクトを挙げる。

平成１５年度（２００３年度）

講演者 ： 山田 裕一氏 (電気通信大)
タイトル ： レンズ空間を生み出すある結び目族と平面曲線
日時 ： 2003 年 5 月 8 日(木) 午後 3 時～4 時 30 分
アブストラクト ： J. Berge 氏は 1990 年頃に 結び目の Dehn surgery で レンズ空間を生み出す例と構造を考察しました. その中のある族について, 特異点 と Framed Link の視点から考察すると, 連分数, ユークリッド互除法, 平面曲線など数学的に広がりのある現象が見えてきます.

講演者 ： 新國 亮氏 (早稲田大)
タイトル ： 境界空間グラフについて (新庄玲子氏(早大教育)との共同研究)
日時 ： 2003 年 5 月 29 日(木) 午後 3 時～4 時 30 分
アブストラクト ：境界絡み目の一般化として, グラフの 3 次元球面への境界空間埋め込みというものを考えます. どんなグラフにも境界空間埋め込みが存在するとは限りません. 本講演では, まず境界空間埋め込みを持つグラフの特徴付けを行い, 更に, 境界空間埋め込みの幾何的な性質に言及したいと思います.

講演者 ： 大久保 貴章氏 (埼玉大)
タイトル ： CR Einstein-Weyl 構造 (阪本 邦夫先生(埼大理)との共同研究)
日時 ： 2003 年 6 月 5 日(木) 午後 3 時～4 時 30 分
アブストラクト ：Einstein-Weyl 構造は, Einstein 構造の共形幾何への自然な一般化と考えられます。私たちは今回, この Einstein-Weyl 構造を CR 多様体上で考えました。ただ, CR 多様体には, hyperdistribution 上にしか自然に共形構造が入りません。本講演では, この hyperdistribution の共形構造に関する Einstein-Weyl 構造を, もともとある CR 構造に逆らわずに定義し, そのような構造を持つ多様体の例もお話しできればと思います。

講演者 ： Yacoub Ould Mohamed Abderrahmane 氏 (日本学術振興会外国人特別研究員、埼玉大滞在)
タイトル ： Kuiper-Kuo Theorerm
日時 ： 2003 年 6 月 19 日(木) 午後 3 時～4 時 30 分

アブストラクト　: C0-sufficiency problem, which I state below in real analytic case, is one of the fundamental problem in singularity theory. Consider a real analytic function with Taylor expansion

f(x)=Hk(x)+..., (x in Rn, Hi homogeneous)

Find the smallest integer r such that all terms of degree >= r+1 can be omitted without effecting the local topological picture of f.

This problem is answered by N. Kuiper and T.-C.Kuo independently at the end of 60's

Theorem. If |Grad f(x)| >=|x|(r-1), x near 0, then f and Hk+.....+Hr are topologically equivalent.

I am going to talk about generalization of this theorem, which are described by weighted Taylor expansion and Taylor expansion related with Newton filtration.

講演者 ： 石川 昌治氏 (東京工業大)

タイトル ： 平面曲線特異点と Divide

日時 ： 2003 年 7 月 24 日(木) 午後 1 時 30 分～3 時 3 時 30 分～5 時

アブストラクト ：Divide とそのリンク及びファイバー束の構成法を平面曲線特異点のミルナー束の立場から解説します.

講演者 ： 石川 昌治氏 (東京工業大)

タイトル ： Divide から構成される 3 次元多様体の正オープンブック分解について

日時 ： 2003 年 7 月 30 日(水) 午後 1 時 30 分～3 時 3 時 30 分～5 時

アブストラクト ：Stein fillable な 3 次元多様体の内の任意の結び目に対し，それを binding に含む正オープンブック分解が構成できることを divide を使って示します.

講演者 ： 本田 友美氏 (埼玉大)

タイトル ： A characterization of non-integrable Pfaffian systems for contact systems

日時 ： 2003 年 10 月 2 日(木) 午後 3 時～4 時 30 分

アブストラクト ：今回の講演の目的は Darboux theorem を一般化することで、 Pfaffian system の底空間をあるジェット空間に埋め込んで、与えられた system が接触式系あるいは偏微分方程式(系)から得られる system と局所的には同じと見なせるための条件について、考察した結果を述べたいと思います。

講演者 ： 鈴木 正明氏 (東京大)

タイトル ： 写像類群とマグナス表現

日時 ： 2003 年 10 月 23 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト ：曲面の写像類群は曲面の向きを保つ微分同相写像のイソトピー類全体として定義される。写像類群は、３次元多様体と Heegaard 分解を使うと密接に関係することや、複素解析や代数幾何の研究対象でもあるリーマン面のモジュライ空間に関係することなどから、トポロジーだけにはとどまららず、研究対象としての重要である。
この講演では、前半では写像類群の基本的な事実をサーベイ的に概観する。具体的には、写像類群の表示や、重要な部分群であるトレリ群の構造について触れる。後半では、写像類群の線形性問題に着目し、マグナス表現について話をする。

講演者 ： Goulwen Fichou 氏
タイトル ： Invariants for the blow-Nash equivalence
日時 ： 2003 年 10 月 30 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト ：We present an application of motivic integration to the study of real analytic function germs. Via the construction of the virtual Poincar¥'e polynomial of arc-symmetric sets, we define zeta functions of a real analytic function germ. They are invariants for the blow-Nash equivalence of Nash function germs. The key ingredient is the motivic integration, a theory due to M. Kontsevich, and developped essentially by J. Denef and F. Loeser.

講演者 ： Juergen Saal 氏 (北海道大)
タイトル ： H∞-calculus for the Stokes operator on Lq-spaces
日時 ： 2003 年 11 月 20 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分

講演者 ： 本田 友美氏 (埼玉大)
タイトル ： 二階偏微分方程式(系)の局所モデル
日時 ： 2003 年 11 月 27 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト ：
まず，本講演で用いる Darboux の定理の捉え方を「Pfaff 系の局所モデルが J1(Rh,R)上の接触系となるための必要十分条件を与えた定理」と解釈します．前回，この定理を Jr(Rh,Rq)に拡張した結果を与えましたが，今回はこの定理を応用して，局所モデルが二階偏微分方程式(系)から得られる Pfaff 系の場合についての性質，それから，このモデルを Pfaff 系の不変量で特徴付けた結果についてお話したいと思います．

講演者 ： 野口　明生氏 (東京工業大)
タイトル ： 力学系ゼータ関数としてのアレクサンダー多項式
日時 ： 2003 年 12 月 4 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト ：

結び目の不変量のアレクサンダー多項式は，ある特別な力学系ゼータ関数と見ることが出来ます．そこでアレクサンダー多項式をゼータ関数として研究する手法が考えられるわけです．特にヴェイユ予想との類似を考えることは非常に有効でこれによって得られる性質についてお話します．

平成１６年度（２００４年度）

講演者 ： 畠中 英里氏（東京工業大）

タイトル ： 分岐被覆表示から得られる３次元多様体の不変量

日時 ： 2004 年 5 月 20 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト ：任意の向きづけられた３次元閉多様体は，絡み目で分岐する３次元球面の 3 重分岐被覆として表されることがわかっています．このことから，分岐集合である絡み目を 3 次元多様体の一つの表示方法と見ることができます．この講演では，この表示方法を使って得られるような 3 次元多様体の不変量を構成することを考えます．なお，分岐被覆に関する基本的な知識から解説する予定です

講演者 ： 鳥巣 伊知郎氏（秋田大）

タイトル ： strongly n-trivial link について

日時 ： 2004 年 7 月 1 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト ：近年、結び目および３次元多様体の有限型不変量の研究と密接に関係するものとして strongly n-trivial link という絡み目のクラスが注目されている。 strongly n-trivial link の一般的な性質の解明はまだ始まったばかりのようであるが、例えば堤幸博氏はこれが boundary link になることを示している。本講演では strongly n-trivial link について講演者による切り貼りの３次元トポロジーを用いた研究を中心に解説する。

講演者 ： Yacoub Ould Mohamed Abderrahmane 氏（日本学術振興会外国人特別研究員、埼玉大滞在）

タイトル ： On the deformation with constant Milnor number and Newton polyhedro

日時 ： 2004 年 7 月 22 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト ：Although μ-constant families of isolated hypersurface singularities have been studied for many years, the complete answers to the following questions are still not known.

1. Is any μ-constant deformation topologically trivial?
2. Is any μ-constant deformation equimultiple?

Yet, under some additional assumptions, positive answer have been given. In particular, the Le-Ramanujan theorem answers positively the first question for all dimension except the families of isolated surface singularities. In my talk, I want to give a positive answer for families non-degenerate in the sense of Kouchnirenko.

講演者 ： 市原 一裕氏（大阪産業大）

タイトル ： Integral non-hyperbolike surgery

日時 ： 2004 年 8 月 5 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト ：It is conjectured that a hyperbolic knot admits at most ten exceptional (= non-hyperbolic) surgeries. In this talk, we will review the results about this conjecture, and report the recent result by the speaker which concerns integral non-hyperbolike surgeries on hyperbolic knots in the 3-sphere.

講演者 ： 田邊 晋氏 (モスクワ大)

タイトル ： 非退化完全交叉型多様体の周期積分

日時 ： 2004 年 9 月 24 日(金) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト ：First I would like to recall some basic facts from the theory on the classical hypergeometric functions after Gauss and the generalized hypergeometric functions after Pochhammer. It turns out that the period integrals for certain class of affine complete intersections are expressed by means of the Pochhammer's hypergeometric functions. This situation allows us to calculate concretely the monodromy of the period integrals around singular loci. In particular cases, the calculus of the monodromy representation can be applied to verify homological mirror symmetry hypothesis. As an example, we see that the projective space and a complete intersection proposed by Givental' are in mirror symmetric relation.

講演者 ： David Trotman 氏 (Mrseille, Universite' de Provence)

タイトル ： Normal cones of regular stratified sets

日時 ： 2004 年 9 月 28 日(火) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト ：With P. Orro the author showed in 2002 that the normal cones of generalised smooth Kuo-Verdier stratified sets possess good properties first obtained by Hironaka for analytic Whitney stratifications. We describe an example of a definable log-analytic Whitney stratified set without these properties, and recent related results of Ferrarotti, Fortuna and Wilson about approximating a set by its normal cone.

講演者 ：大住 真理子氏 (日本大)

タイトル ： Whitney's umbrellas in stable perturbations of a map germ from (Rn, 0)→ (R2n-1, 0)

日時 ： 2004 年 10 月 7 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト ： Let f: (Rn, 0)→ (Rp, 0) be a C∞ map-germ. We are interested in whether the number of modulo 2 of stable singular points of having codimension n that appear near the origin in a generic perturbation of f is a topological invariant. In this paper we concentrate on investigating the problem when p is 2n-1, where stable singular points of codimension n are only Whitney's umbrellas, and give a positive answer to the problem.

講演者 ：本田 友美氏 (埼玉大)
タイトル： Singularities of Truck-Trailers
日時 ： 2004 年 10 月 14(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト ：長さ r の Goursat structure とは，r+2 次元多様体上 rank 2 の distribution でブラケット積によって rank が 1 ずつ増える distribution の増加列が出来るものを指す．Goursat structure には特異点があり，r=7 まで分類可能である．一方 (r+1) 個のトレイラーを引っ張るトラックの運動において，それに付随する distribution は Goursat structure と同一視できることが知られている．本講演では，トラック-トレイラーの運動においてどのような状態が特異点になるのか分類法を与え，そこからわかる Montgomery-Zhitomirskii が得た分類法との相関関係を考察する．

講演者 ：柳井 佳奈氏(お茶の水女子大)
タイトル： Relations of formal diffeomorphisms (中居功先生(お茶大理)との共同研究)
日時 ： 2004 年 11 月 4 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト :2 つの diffeo が互いに可換ならばその間に自明でない relation はたくさんある．では，互いに非可換な 2 つの diffeo の間には自明でない relation があるだろうか? あるとしたらどのような relation か? この問題は，1991 年に R.V. Chacon と A.T. Fomenko によって定義されたリー積分の形式ベクトル場としてのテイラー展開の係数を計算することに帰着します．この講演では，リー積分の歴史的背景の解説(Campbell-Baker-Hausdorff の公式，自励系でない常微分方程式の解の表示)から始め，formal diffeo の relation について得られたいくつかの結果を紹介したいと思います．

講演者 ： 長瀬　正義氏 (埼玉大)
タイトル： Dirac の ディラック と Atiyah-Singer の ディラック
日時 ： 2004 年 11 月 25 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト ：単なる一階の楕円型偏微分作用素にすぎないディラック作用素に幾何学者は 50 年ほど注目し続けてきた。如何にもそれっぽいディラック作用素誕生物語。予備知識不要。解析系の学生諸君も聞いてみませんか！
講演者 ：Aris Daniilodis 氏 (Universitat Autonoma de Barcelona)
タイトル： The Morse-Sard theorem for non-differentiable locally Lipschitz functions, with applications to subgradient dynamical systems (joint work with J. Bolte and A. Lewis)
日時 ： 2004 年 12 月 2 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト　: In this talk, we use tools from nonsmooth analysis to study nondifferentiable locally Lipschitz continuous functions. In particular, using the notion of subdifferential, we extend the notion of "critical point" to the singular points of the function and we formulate nonsmooth versions of the Morse-Sard theorem and the Lojasiewicz gradient inequality, provided the graphs of functions are semialgebraic or subanalytic sets. We illustrate explicitely the case of convex functions, for which the convergence of maximal trajectories of the corresponding subgradient differential inclusion follows. This fact yields an explicit estimation for the rate of convergence of the steepest descent algorithm.

日時　:　2005 年 2 月 18 日(金)15 時より
講演者およびタイトル　:
15:10---16:00　森吉仁志氏(慶應大学)
IIIλ型フォン・ノイマン環に関連する葉層の特性類
16:10---17:00　三上健太郎氏(秋田大学)
Foliations in pre-Poisson geometry

平成１７年度（２００５年度）

講演者 ：Carles Bivia-Ausina 氏（Universitat Politecnica de Valencia)

タイトル： Lojasiewicz exponents at infinity and Newton polyhedra

日時 ： 2005 年 4 月 7 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト ：Given a real polynomial map F：Rn→Rn we show a method to give a lower bound for the ÃLojasiewicz exponent at infinity of F, denoted by L1(F), via Newton polyhedra and a suitable non-degeneracy condition imposed on F. The mentioned lower bound will be positive in some cases and it will reach the number L1(F) for a signi¯cant class of polynomial maps. One of the motivations of our task is that the condition L1(F) > 0 is equivalent to the properness of F, moreover by a result of Hadamard, if F is a proper local diffeomorphism then F is a global diffeomorphism. Then giving a positive lower bound for L1(F) forces the map F to be a diffeomorphism if the Jacobian determinant is non-zero everywhere.

講演者 ：Nicolas Dutertre 氏（Universite de Provence)

タイトル： Curvature integrals of the real Milnor fibre

日時 ： 2005 年 4 月 21 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分

講演者 ：久保井 啓成氏 （埼玉大学)

タイトル： Absolute total curvature for polyhedral 2-knots

日時 ： 2005 年 4 月 28 日 (木) 午後 4 時～5 時 30 分

アブストラクト ： In Milnor's paper[1], he defined the total curvature for polygonal closed curves in $\mathbf{R}^n$, and proved it can be estimated by the bridge number.

Kuiper[2] defined the superbridge number and proved the total curvature can be estimated by the superbridge number. These estimates are the following.

Theorem (Milnor, Kuiper)

Let K be a classical knot, b(K) the bridge number and s(K) the superbridge number. Then $2\pi b(K) \leqq \kappa(K) \leqq 2\pi s(K)$.

We will define the absolute total curvature of polyhedral 2-knots, generalize the concept of the bridge number and the superbridge number and give similar estimates.

A *polyhedral 2-knot* K is a 2-sphere embedded in $\mathbf{R}^4$ with a finite cell complex structure such that any edges are line segments in $\mathbf{R}^4$, and that any faces are subsets of some 2-dimensional Euclidian subspace in $\mathbf{R}^4$.

The *crookedness* cr(K,**u**) of K is the number of connected components of critical points of the orthogonal projection $K \to \mathbf{R}\mathbf{u}$ where **u** is a unit vector of $\mathbf{R}^4$.
The minimal number of the crookedness and the maximal number of the crookedness of K are respectively defined to be $b(K)=\min_u cr(K,u)$ and $s(K)=\max_u cr(K,u)$, where **u** ranges over all the unit vectors of $\mathbf{R}^4$.
Let $\alpha_{v,i}$ be angles between e_i and e_{i+1} measured on K_i where e_i and e_{i+1} are adjoint edges incident to a vertex v of K.
The *deficiency at v*, denoted by d_v, is define to be $d_v=2\pi-\Sigma\alpha_{v,i}$ and the *absolute total curvature* $\kappa(K)$ of K are defined to be $\kappa(K)=\Sigma_v|d_v|$.

Main Theorem
Let K be a polyhedral 2-knot with valency three at each vertex. Then $2\pi b(K) \leqq \kappa(K) \leqq 2\pi s(K)$.

The following Corollary can be proved by using Scharlemann's theorem[3].

Corollary
Let K be a polyhedral 2-knot with valency three at each vertex. If K is nontrivial, $\kappa(K)$ is grater than or equal to 12π.

To prove Main Theorem and Corollary, we will prove following Theorem A.

Throrem A
For any polyhedral 2-knot K with valency three at each vertex, the following equality for the Lebesgue integral holds:
$\int_{S^3} cr(K,u)dV=\mu(S^3)\kappa(K)/2\pi$, where dV is the volume form of S^3 and $\mu(\cdot)$ is the volume of the subset of S^3

References
[1] J. Milnor, On the total curvature of knots, Ann. of Math. 52 (1950), 248--260.
[2] N. H. Kuiper, A new knot invariant, Math. Ann. 278 (1987), 193--209.
[3] M. Scharlemann, Smooth spheres in $\mathbf{R}^4$ with four critical points are standard, Invent. Math. 79 (1985), No.1, 125--141.

講演者 ：佐藤 隆夫氏（東京大学数理科学研究科）
タイトル：自由群の自己同型群のねじれ係数１次元ホモロジー群

日時 ： 2005 年 5 月 12 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト ： 自由群の自己同型群は曲面の写像類群と関連して、位相幾何学的にも興味深い群である。講演では、特に、そのねじれ係数 1 次元(コ)ホモロジー群に関して得られた結果を紹介したい。また、森田茂之先生による、写像類群の（コ）ホモロジー群についての結果との関係についても述べる。講演では、一般的に、群の表示を用いて 1 次元の(コ)ホモロジー群が計算できることなども述べたい。

講演者 ：石原　海氏 (埼玉大学)
タイトル： Dehn surgeries on tunnel number one links yielding the 3-sphere
日時 ： 2005 年 6 月 23 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト ： Gordon and Luecke showed that knots are determined by their complements. So a non-trivial Dehn surgery on a non-trivial knot does not yield the 3-sphere. But the case of links is different. Berge constructed some examples of 2-component links with interesting properties.
By extending Berge's method, we construct infinitely many mutually distinct examples of tunnel number one links, such that their components are non-trivial, that the exteriors do not contain essential annuli and non-trivial Dehn surgeries on them yield the 3-sphere.

講演者 ：大久保 貴章氏 (埼玉大学)
タイトル： CR Einstein-Weyl 構造と canonical bundle の接続について
日時 ： 2005 年 7 月 14 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト ： 非退化 CR 多様体は，hyperdistribution 上に Levi form と呼ばれるエルミート形式の自然な共形類をもちます．したがって，古くから CR 多様体上の幾何は，通常の Riemann 計量からなる共形類をもつ共形多様体上の幾何と対比されてみられてきています．共形幾何で，そうであるように，CR 幾何においても，Levi form の選択に不変である対象を研究することが有意義なのです．このような対象の 1 つである CR Einstein-Weyl 構造について，講演者は存在問題を考え，そして 1 つの結果を得ましたので，それをお話します．この結果には，CR 多様体上の canonical bundle の接続が深く関係しており，そのことから，興味深い例をいくつか得ましたので，それも含めてお話したいと思います.

講演者 ：新田 洋平氏 (埼玉大学)
タイトル：複素空間型に於ける複素部分多様体の法曲率テンソルに関する変分問題
日時 ： 2005 年 12 月 1 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト ： 複素多様体から複素空間型への Kaehler immersion を変形することで,

法バンドルに於ける Yang-Mills 積分の変分問題を考察し, Euler-Lagrange 方程式を与える. 更に, Euler-Lagrange 方程式を満たす複素射影空間内のコンパクトな複素超曲面は, 複素超平面と complex hyperquadric に限ることを示す.
尚, 同内容の講演を 12 月 19～21 日に埼玉大学で行なわれる研究集会「曲線と曲面の非線型解析」に於いても, 発表する予定です.

講演者 ：竹内　潔氏 (筑波大学)
タイトル：位相的ラドン変換と射影双対性について（東京大学院生、松井優氏との共同研究）
日時 ： 2005 年 12 月 15 日(木) 午後 4 時～5 時 30 分
アブストラクト ： 本講演では、代数幾何における射影双対性を代数解析的手法を用いて調べるアプローチについてお話したい。D加群、交叉コホモロジーなどの発展を契機として整備された、構成可能層の理論が証明に用いられる。この理論の概説とともに、時間が許せば特異多様体の特性類理論との関係にも言及したい。

日時 ： 2006 年 2 月 7 日(火) 午後 4 時～5 時 30 分
講演者 ：久保井 啓成氏 (埼玉大学)
タイトル： Classification of alternating links with tunnel number one
アブストラクト ： Alternating links and tunnel number one links have studied for a long time. The classification of unknotting tunnels for 2-bridge link is done by Adams-Raid and Kuhn, and for 2-bridge knot is done by Kobayashi.
In this talk, we will gave a classification of tunnel number one alternating links and their unknotting tunnels. This is an extension for the link case of a Lackenby's theorem. We extend Lackenby's argumets to prove our theorem. Main ideas used here are theories about normal surfaces, Heegaard splittings and Menasco's technique.
講演者 ：石原 海氏 (埼玉大学)
タイトル： On hyperbolic knots with two small Seifert fibered Dehn surgeries
アブストラクト ： We construct infinitely many examples of tunnel number one hyperbolic knots which have two successive integral slopes of small Seifert fibered Dehn surgeries.

研究成果

1. Tangle sum and constructible spheres / M. Hachimori and K. Shimokawa, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004) 373-383.

2. Essential laminations and branched surfaces in the exteriors of links / M. Brittenham, C. Hayashi, M. Hirasawa, T. Kobayashi and K. Shimokawa, Japan. J. Math. **31** (2005) 25-96.

3. 下川　航也　「最近の Dehn surgery のいくつかの話題について」、研究集会「結び目と多様体の幾何と代数 II」報告集, 2003 年 12 月.

4. 下川　航也　「解かれつつあるポアンカレ予想」、講演スライド　（これは、本研究課題の理解のために有用であると思われるため収録した。）

最近の DEHN SURGERY のいくつかの話題について

下川 航也

1. Introduction

この報告では、最近の Dehn surgery のいくつかの話題を取りあえげ、紹介したいと思う。今回の内容は、大きく分けると二つで、一つめが、hyperbolic knot の exceptional surgery の特徴付けに関しての話題 (§2) で、もう一つが、link の Dehn surgery についての話題 (§3) である。

2. Exceptional surgery and boundary slopes

この章では、hyperbolic knot の exceptional surgery について、それをどのように特徴付けることが出来るか?という問題に対して、S^3 の場合についての一つのアプローチを紹介する。(ここでは簡単のため、S^3 として話しをしているが、ほとんどは homotopy S^3 で構わない。) まず、Dehn surgery の定義と記号の導入をする。

K を S^3 の knot とし、$E(K) = S^3 - \mathrm{int}N(K)$ でその exterior を表すとする。いま、primitive class $\gamma \in H_1(\partial E(K);\mathbb{Z})$ を取る (つまり、他の元の整数倍でかけないもの)。m、ℓ を K の meridian と longitude とし、γ が $a\,m + b\ell$ と表されているとする。このとき、γ に対し $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \cup \{\frac{1}{0}\}$ を対応させることを考え、それを *slope* と呼ぶことにする。knot K と slope r が与えられると、$K(r) = E(K) \cup_{\gamma = (\partial D^2 \times \{*\})} (D^2 \times S^1)$ により、新しい 3-manifold が考えることが出来る。この操作を *Dehn surgery* と言う。link の場合も同様に考えることが出来る。ただし、link の場合には、slope の変わりに *slope row* と呼ばれる slope の組を取る必要がある。この章では、hyperbolic knot の Dehn surgery について考える。

Definition 2.1. K を S^3 の hyperbolic knot (つまり $S^3 - K$ に完備有限体積双曲構造が入る) とするとき、$K(r)$ が non-hyperbolic となるとき、この Dehn surgery を *exceptional surgery* といい、r を *exceptional slope* という。

hyperbolic knot の Dehn surgery に関しては、まず、次の結果がある。

Theorem 2.2 (Thurston). 各 *hyperbolic knot* に対し、*exceptional slopes* の数は有限である。

そうすると、問題は、この例外を調べることになる。つまり、

Problem 2.3. *hyperbolic knot* の *exceptional surgery* を特徴付けよ。

となるわけだが、「どの様に特徴付けるか」も問題になって来る。その問題は、「どのような hyperbolic knot が、どのような type の exceptional surgery を持つか」、そして、「どんな slope が exceptional slope となるか」、という (相互に関係した) 2つの問題になるが、ここでは、後者を考え、それに関しての一つの考察を行う。exceptional surgery の特徴付けは、Kirby の問題集 [20] の Problem 1.77、[3]、[13]、[14]、[24] などが詳しい。

その問題について、次の問題を考えてみる。

Question 2.4. *small hyperbolic knot* の *exceptional slope* は、実数直線上で、ある *2* つの *separating essential surface* の *boundary slope* の間に見つかるか?

This research is partially supported by the Japan Society for the Promotion of Science, Grant-in-Aid for Scientific Research (C)(2) 15540061.

ただし、exceptional slope が boundary slope の場合は、命題は成立していると考えることにする。その exterior に境界に平行でない incompressible closed surface を持たないとき、knot を *small* と言う。また、$E(K)$ の essential surface で、その境界の各成分の slope が r となるものが存在するとき、r を K の *boundary slope* という。knot の boundary slope の計算については、[19]、[18]、[10] 等がある。

2.1. **Examples.** Question 2.4 の答えが Yes ではないか、ということの状況証拠を挙げてみる。(しかし、現在のところ、答えが Yes であるということの理論的根拠は無い。No となるような knot の存在の可能性も多いにありえることを注意しておく。)

以下の表では、tor を toroidal slope ($K(r)$ に essential torus あり)、cyc を cyclic slope ($\pi_1(K(r))$ が有限巡回群)、fin を finite slope ($\pi_1(K(r))$ が有限群で巡回群ではない)、Seifert を Seifert slope (または、Seifert fibering slope、Seifert fibered slope。ここでは、$\pi_1(K(r))$ が無限群で、$K(r)$ が Seifert fibered space の構造を持つとする。下の場合は、S^2 上の Seifert fibered space で、exceptional fiber が 3 本のものとなる。)、bdry を boundary slope とする。

pretzel knot と twist knot を例に取り、考察してみる。([25, Section 4] 参照。)

まず、$(-2,3,7)$ pretzel knot については、次を得る。

slopes	16	17	18	$\frac{37}{2}$	19	20
types	tor	fin	cyc	tor	cyc	tor

TABLE 1. Exceptional slopes and boundary slopes of the $(-2,3,7)$ pretzel knot

ただし、ここで、$K(18) = L(18,5)$ であり、$K(19) = L(19,7)$ である。さらに、slope 0 は non-strict boundary slope (i.e. fibration の fiber の boundry slope) であり、separating surface の boundary slope ではない。([20, Problem 1.77] 他参照。) また、K が hyperbolic より、toroidal slope は、boundary slope である。

さらに、$(-2,3,9)$ pretzel knot について。

slopes	16	22	$\frac{67}{3}$	23	24
types	bdry	fin	bdry	fin	bdry

TABLE 2. Exceptional slopes and boundary slopes of the $(-2,3,9)$ pretzel knot

また、$(-2,3,n)$ pretzel knot $(n \neq 1,3,5,7,9)$ については、Seifert slope が存在する。

slopes	16	$2n+4$	$2n+5$	$2n+6$	$\frac{n^2-n-5}{\frac{n-3}{2}}$
types	bdry	Seifert	Seifert	bdry	bdry

TABLE 3. Exceptional slopes and boundary slopes of the $(-2,3,n)$ pretzel knot $(n \geq 11)$

slopes	$\frac{2(n+1)^2}{n}$	$2n+4$	$2n+5$	$2n+6$	10
types	bdry	Seifert	Seifert	bdry	bdry

TABLE 4. Exceptional slopes and boundary slopes of the $(-2,3,n)$ pretzel knot $(n < 0)$

次に、twist knot K_n $(n \neq 0,1)$ について見てみる。

slopes	$-(4n+2)$	-4	-3	-2	-1	0
types	bdry	bdry	Seifert	Seifert	Seifert	bdry

TABLE 5. Exceptional slopes and boundary slopes of K_n $(n \geq 2)$

slopes	-4	-3	-2	-1	0	$-4n$
types	bdry	Seifert	Seifert	Seifert	bdry	bdry

TABLE 6. Exceptional slopes and boundary slopes of K_n $(n \leq -1)$

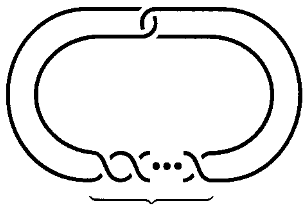


FIGURE 1. The twist knot K_n.

と言うわけで、これらの例については Question 2.4 の答えは Yes である。Question 2.4 の一般的な解答はまだ知られていない。

2.2. **Known results.** 次に、slope の type を特定したときに、どのような範囲に収まるかを考えてみる。

Theorem 2.5 (Dunfield[9]). *K を small hyperbolic knot とし、r を cyclic slope とする。このとき、開区間 $(r-1, r+1) \subset \mathbb{R}$ に separating surface の boundary slope あり。*

この定理を言い替えると、次のようになる。

Corollary 2.6 (Dunfield). *K を small hyperbolic knot とし、r を cyclic slope とする。s_1 と s_2 を separating essential suface の boundary slope のうち、$\mathbb{Q}$ 上で最小と最大のものとする。このとき、$s_1 - 1 < r < s_2 + 1$ である。*

この Corollary は、最近 Mattman により改良されている。

Theorem 2.7 (Mattman[29]). *K を S^3 の small hyperbolic knot とし、r を cyclic slope とする。s_1 と s_2 を separating essential suface の boundary slope のうち、$\mathbb{Q}$ 上で最小と最大のものとする。このとき、$s_1 - \frac{1}{2} \leq r \leq s_2 + \frac{1}{2}$ である。*

証明は、Culler-Shalen norm(後述) の fundamental polygon の初等幾何的考察による。
次に、finite slope について。

Theorem 2.8 (Ishikawa-Mattman-Shimokawa[25]). *K を S^3 の small hyperbolic knot とし、r を finite slope とする。s_1 と s_2 を separating essential suface の boundary slope のうち、$\mathbb{Q}$ 上で最小と最大のものとする。このとき、$s_1 - 3 \leq r \leq s_2 + 3$ である。*

ここでは我々は、trace function(後述) と呼ばれる関数の、ideal point(後述) での極の次数の計算を用いた。

さて、hyperbolic knot の exceptional surgery の予想で、これ以外の重要な問題を、ここでは 2 つだけ挙げておく。

Conjecture 2.9 (Gordon[20]). *K を S^3 の hyperbolic knot とし、$\frac{a}{b}$ を exceptional slope とする。このとき、$|b| \leq 2$ で、$|b| = 2$ のときは toroidal。*

Conjecture 2.10 (Goda-Teragaito[12]). *K を S^3 の hyperbolic knot とし、$K(r)$ が lens space であるとする。このとき、K は fibered knot で、$2g(K)+8 \leq |r| \leq 4g(K)-1$。*

3. Dehn surgery on links

ここでは link の Dehn surgery について、いくつかの問題を挙げる。特に、ここでは次の 3 つの問題を考える。

(1) Boundary slopes of links (Dehn surgeries yielding essential surfaces)
(2) Dehn surgery on links in S^3 yielding S^3
(3) Exceptional surgery on hyperbolic links

3.1. Boundary slopes of links.

ここでは、link の boundary slope rows について考察する。link の場合には、essential surface に対し、各 $\partial E(K)$ の成分で slope が定まる。それを並べたものを、ここでは Zhang[38] の用語を用いて *boundary slope row* と言うことにする。link の boundary slope row については、Hatcher の以下の結果がある。

Theorem 3.1 (Hatcher[17]). *link の boundary slope rows のなす空間の次元は、link の component の数より少ない。*

knot を一つ固定すると、その boundary slope の数は有限個であったが、link の場合には、無限個出てくる可能性がある。

link の boundary slope rows については Floyd-Hatcher[11] が 2-bridge link の boundary slope rows のなす空間の決定をしている。また、Zhang[38] は boundary slope rows に沿った Dehn surgery の研究をしている。

3.1.1. *Culler-Shalen* 理論.

ここでは、Culler-Shalen 理論を用いると、いくつかの link の boundary slope の計算が行えることを紹介する。Culler-Shalen 理論は、[8]、[7]、[34] を参照して欲しい。

言葉を準備する。この章では、M を 3-manifold とする。$\pi_1(M)$ は有限表示群であるとし、その $SL_2(\mathbb{C})$ への表現全体のなす空間を $R(M)$ とかく。つまり、$R(M) = Hom(\pi_1(M), SL_2(\mathbb{C})) = \{\rho : \pi_1(M) \to SL_2(\mathbb{C})\}$ であり、これを *representation variety* という。また、$SL_2(\mathbb{C})$ への表現の指標全体の空間 $X(M) = \{\chi_\rho : \pi_1(M) \to \mathbb{C}\}$ を *character variety* という。Culler-Shalen[8] により、character variety は閉代数的集合であることが示されている。

$\gamma \in \pi_1(M)$ に対し、$I_\gamma : X(M) \to \mathbb{C}$ を、$\chi_\rho \mapsto I_\gamma(\chi_\rho) = \mathrm{trace}(\rho(\gamma))$ で定義し、*trace function* という。$X(M)$ 内に (複素) 曲線 X_0 を取る。(これは、既約な成分として取っても良いし、2 次元以上の既約な成分の代数的部分集合でも良い。) 例えば、M が hyperbolic knot exterior の場合には、Thurston により、discrete faithful representation の指標を含む既約な成分は、曲線となる。([7] 参照。) X_0 に対し、滑らかな射影的曲線で、X と双有理同値なものを $\tilde{X}_0$ とする。M の *ideal point* とは、$\tilde{X}_0$ の元で、X_0 から来ていないものとする。(つまり、ideal point 全体の空間を $\mathcal{I}$ で書くことにすると、(大雑把に書くと) $\mathcal{I} = \tilde{X}_0 - X_0$ となる。)

Theorem 3.2 (Culler-Shalen[8]). *M の ideal point から、M 内の essential separating surface を構成できる。*

逆に、essential surface は、ideal point から構成できるのだろうか? それに関しては、次の問いがある。

Question 3.3 (Cooper-Long[6], Schanuel-Zhang[33]). *hyperbolic knot の exterior の essential separating surface の boundary slope は、ideal point から構成される essential separating surface のものか?*

この問いに関しては、“hyperbolic knot の exterior” という条件は大事である。それ以外については、Motegi[32] により graph manifold の essential torus、Boyer-Zhang[4] により hyperbolic 3-manifold 内の closed surface、Schanuel-Zhang[33] により境界が torus の irreducible 3-manifold の essential surface の boundary slope で、それぞれ ideal point から得られないものが存在することが示されている。

ここでは用いないが、Culler-Shalen norm の定義も見ておく。ここでは ∂M は torus とする。まず、$\gamma \in \pi_1(\partial M) \cong H_1(\partial M;\mathbb{Z})$ に対し、写像 $f_\gamma = I_\gamma^2 - 4 : \tilde{X}_0 \to \mathbb{C}P^1$ を考える。このとき、γ の *Culler-Shalen norm* $\|\cdot\|$ を、$\gamma \in H_1(\partial M;\mathbb{Z})$ に対し、$\|\gamma\| = \deg f_\gamma = \sum_{x\in\mathcal{I}} \Pi_x(f_\gamma)$ で定義し、それを $H_1(\partial M;\mathbb{R})$ に拡張したもの、とする。ここで、$\Pi_x(f_\gamma)$ は、ideal point x での f_γ の極の次数とする。

Theorem 3.4 (Culler-Shalen[7]). $\|\cdot\|$ は $H_1(\partial M;\mathbb{R})$ 上の *norm* である。

cyclic slope や finite slope については、その norm が小さくなる、ということを用いて、それらについての研究がされている。

3.1.2. *Whitehead link の boundary slope row* について. link の場合についても、Culler-Shalen の手法で Whitehead link の boundary slope row が計算されている。Whitehead link は 2-bridge link であるので、Floyd-Hatcher[11] の方法で、boundary slope row を計算することが出来る。(計算結果は、[23] を参照。) 以下の結果は、Culler-Shalen 理論 (を拡張したもの) を用いて計算すると、それと一致する、というものである。

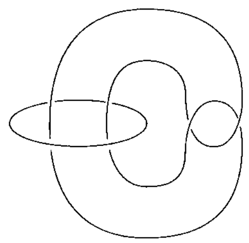


FIGURE 2. Whitehead link

Theorem 3.5 (Lash[23]). *Whitehead link の全ての boundary slope row は、link group の* $SL_2(\mathbb{C})$ *への表現の退化から構成できる。*

Theorem 3.6 (Kishi[21]). *Whitehead link の全ての boundary slope row は、ideal tetrahedra decomposition で与えられた hyperbolic structure の退化から構成できる。*

link の場合は、$X(M)$(や、hyperbolic の場合の discrete faithful representation の指標を含む既約な成分) の次元が 1 ではないので、“ideal point” をとることが難しくなる。そのために、例えば、うまい曲線を持ってくることや、曲線の ideal point に依らずに tree への作用を構成する等の工夫が必要になって来る。

尚、Lash の手法は、Cooper[5] による手法の具体的な計算であり、Kishi による結果は、knot の場合の Yoshida[37] による手法を、link の場合に拡張し計算したものである。

3.2. **Dehn surgery on links in S^3 yielding S^3.** S^3 の non-trivial knot の non-trivial Dehn surgery では S^3 を作ることは出来ないことが、Gordon-Luecke によって示されている。

Theorem 3.7 (The knot complement theorem by Gordon-Luecke[16]). *K を S^3 の non-trivial knot とする。このとき、$K(r) \cong S^3$ とすると、$r = \frac{1}{0}$ (trivial surgery) である。*

しかし link については、non-trivial surgery で S^3 に帰って来る場合がある。よってそれを特徴付けよ、と言うのが問題となる。

3.2.1. *Examples.* 例を挙げる。まずは、“trivial” な例から。

Example 3.8 (twist type). *Figure 3* の *2-component link* を $L = K_1 \cup K_2$ とする。ただし、K_1 は *trivial knot component* とする。K_1 で *slope* $\frac{p_1}{q_1}$、K_2 で *slope* $\frac{p_2}{q_2}$ で *Dehn surgery* して得られる *3-manifold* を、$L(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2})$ と書くことにする。このとき、$p \in \mathbb{Z}$ に対して、$L(\frac{-1}{1}, \frac{1}{p}) \cong S^3$ となる。

これは、K_1 に沿って、まず *slope* $\frac{-1}{1}$ の *Dehn surgery* をすると、$K_1(\frac{-1}{1}) \cong S^3$ であり、さらに、K_2 の *Dehn sugery* による像が $K_1(\frac{-1}{1})$ において *trivial knot* となるからである。

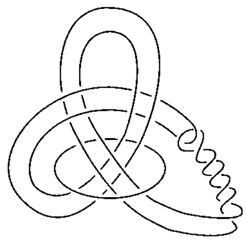


FIGURE 3. Trivial type

Example 3.9 (Berge[2]). *Figure 4* の *2-component link* を $L = K_1 \cup K_2$ とする。ただし、K_1 は 4_1、K_2 は 9_{42} とする。このとき、L は *hyperbolic link* であり、K_1 と K_2 は *hyperbolic knot* である。ここで、$L(\frac{0}{1}, \frac{4}{1}) \cong L(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}) \cong L(\frac{1}{2}, \frac{3}{1}) \cong S^3$.

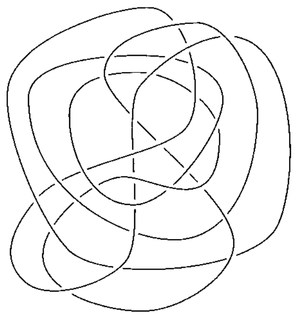


FIGURE 4. Example of Berge

また、Teragaito[35] により、次の条件を満たす例が具体的に挙げられている。(ここでは定義は省略する。) “$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n \subset S^3$ は non-split link で、各 component K_i は hyperbolic knot であり、さらに、$t(L) = n - 1$ である。このとき、整数 $r_1, \cdots, r_n$ が存在し、$L(r_1, \cdots, r_n) \cong S^3$”。また、Kawauchi による imitation theory により、そのような例が構成されることが知られている。

3.2.2. *Some characterizations and restrictions.* ここでは、いくつかの場合についてなされている特徴付けを紹介する。

Theorem 3.10 (Ochiai[26]). *$L \subset S^3$ を non-trivial 2-bridge link とする。整数 r_1 と r_2 に対し、$L(r_1, r_2) \cong S^3$ とすると、L は $(2, 2p)$-torus link である。*

Theorem 3.11 (Mangum-Stanford[27]). *$L = K_1 \cup K_n \subset S^3$ を HTB link (homologically trivial かつ Brunnian) とし、ある $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ $(i = 1, \cdots, n,\ q_i \neq 0)$ に対し、$L(r_1, \cdots, r_n) \cong S^3$ とすると、L は trivial link である。*

Theorem 3.12 (Matsuda-Ozawa-Shimokawa[30]). $L = K_1 \cup K_2 \subset S^3$ を *non-simple 2-component link* (i.e. $E(K)$ に essential torus あり) とする。$T \subset E(L)$ を essential torus とし、$E(L) = M_1 \cup_T M_2$, $K_i \subset M_i$, $[K_i] = 0$ in $H_1(M_i; \mathbb{Z})$ とする。ある $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ $(i = 1, 2,\ q_i \neq 0)$ に対し、$L(r_1, r_2) \cong S^3$ とすると、L は twist type である。

因みに、Figure 3 はこの定理の仮定を満たしている。

次は、slope につく制限について。

Theorem 3.13 (Gordon[15]). $L \subset S^3$ を *n-component link* とし、各 *component* は *non-trivial knot* で、さらに各 2-*component sublink* は *coaxial* (ある *component* が他の *component* の *tubular neighborhood* の境界に *non-meridional* に載らない) とする。このとき、$L(r_1, \cdots, r_n) \cong S^3$ となる *slope* $(r_1, \cdots, r_n)$ の数は、$n!(38)^{n-1}$ 以下。

Theorem 3.14 (Mayrand[31]). $L = K_1 \cup K_2 \subset S^3$ を 2-*component generic link* (*i.e.* K_i は *non-trivial* で、$E(L)$ に 2つの境界を結ぶ *essential annulus* なし。) とし、$r_i = \frac{p_i}{q_i}$ $(i = 1, 2,\ q_i \neq 0)$ に対し $L(r_1, r_2) \cong S^3$ とする。さらに、*surgery* の *core* も $L(r_1, r_2)$ で *generic* と仮定する。このとき、$i = 1$ または 2 に対し、$\Delta(r_i, \mu_i) < \frac{10(b(L)^2-4)}{3}$ (ここで μ_i は K_i の *meridian*)

3.3. **Exceptional surgery on hyperbolic links.** ここでは、hyperbolic link の exceptional surgery の特徴付けを考える。

Theorem 3.15 (Thurston's hyperbolic surgery theorem, See Theorem E.5.1 in [1]). L を *closed orientable* 3-*manifold* の *hyperbolic link* とする。このとき、L の各 *component* に対し、有限個の r_i を除くと、$L(r_1, \cdots, r_n)$ は *hyperbolic*。

よって、やはり問題は、その例外の場合の特徴付けとなる。link の場合には、この特徴付けはそれほど進んでいない。Martelli-Petronio[28] は、3-component からなる chain link (Figure 5) について完全な解答を与えている。その系として、Whitehead link の exceptional surgery の特徴付けも得られる。

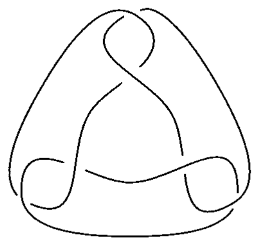


FIGURE 5. 3-component chain link

また、Lackenby は、alternating link についての次の結果を得ている。

Theorem 3.16 (Lackenby[22]). S^3 の *link* L が、*connected prime alternating diagram* D を持つとする。そのとき、$|q_i| > \frac{8}{t(K,D)}$ $(i = 1, \cdots, n)$ に対し、$L(\frac{p_1}{q_1}, \cdots, \frac{p_n}{q_n})$ は、*irreducible* かつ *atoroidal* であり、*Seifert fibered space* の構造を持たず、$\pi_1(L(\frac{p_1}{q_1}, \cdots, \frac{p_n}{q_n}))$ は *infinite word hyperbolic group* である。

ここで $t(K, D)$ は、D から計算されるある自然数である。

また、Thurston は、S^3 の hyperbolic link の Dehn surgery を研究すれば、3-manifold 全体を研究することになることも示している。

Theorem 3.17 (Thurston, See Theorem E.7.10 in [1]). 任意の *closed orientable* 3-*manifold* は、S^3 の *hyperbolic link* の *Dehn surgery* で得られる。

ここで、imitation theoryを用いると、そのlinkを各sublinkもhyperbolicという条件を付けて取れることを、堤氏によって指摘して頂いた。よって、あるnon-hyperbolic 3-manifoldが、そのようなlinkのsurgeryでどの位得られるかを調べることは、興味深い問題である。また、上の定理は、3-manifoldの分類を行うためには、hyperbolic structureの退化の様子を調べれば良い、ということも言っている。

References

[1] R. Benedetti and C. Petronio, Lectures on hyperbolic geometry. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[2] J. Berge, Embedding the exterior of one-tunnel knots and links in the 3-sphere, preprint.

[3] S. Boyer, Dehn surgery on knots. Handbook of geometric topology, 165–218, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[4] S. Boyer and X. Zhang, On Culler-Shalen seminorms and Dehn filling, Ann. of Math. **148** (1998), 737–801.

[5] D. Cooper, Degenerations of representations and thin triangles, preprint.

[6] D. Cooper and D.D. Long, Remarks on the A-polynomial of a knot, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), 609–628.

[7] M. Culler, C.McA. Gordon, J. Luecke and P.B. Shalen, Dehn surgery on knots, Ann. of Math. **125** (1987), 237–300.

[8] M. Culler and P.B. Shalen, Varieties of group representation and splittings of 3-manifolds, Ann. of Math. **117**(1983), 109–146.

[9] N. Dunfield, Cyclic surgery, degrees of maps of character curves, and volume rigidity for hyperbolic manifolds, Invent. Math. **136** (1999), 623–657.

[10] N. Dunfield, A table of boundary slopes of Montesinos knots, Topology **40** (2001), 309–315.

[11] Floyd and A. Hatcher, The space of incompressible surfaces in a 2-bridge link complement, Trans. Amer. Math. Soc. **305** (1988), 575–599.

[12] H. Goda and M. Teragaito, Dehn surgeries on knots which yield lens spaces and genera of knots, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **129** (2000), 501–515.

[13] C.McA. Gordon, Dehn surgery on knots. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Kyoto, 1990), Springer, Tokyo, (1991), 631-642.

[14] C.McA. Gordon, Dehn filling: a survey. Knot theory (Warsaw, 1995), 129–144, Banach Center Publ., 42, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998.

[15] C.McA. Gordon, Links and their complements, Contemp. Math. **314** (2002), 71–82.

[16] C.McA. Gordon and J. Luecke, Knots are determined by their complements, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 371–415.

[17] A. Hatcher, On the boundary curves of incompressible surfaces, Pacific J. Math. **99** (1982), 373–377.

[18] A. Hatcher and U. Oertel, Boundary slopes for Montesinos knots, Topology **28** (1989), 453–480.

[19] A. Hatcher and W. Thurston, Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements, Invent. Math. **79** (1985), 225–246.

[20] R. Kirby, Problems in low-dimensional topology, Geometric Topology, Volume 2, editor W. Kazez, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 1996.

[21] 岸 明弘, Whitehead linkの補空間の双曲構造とboundary slopeの計算, 2002年度東北大学大学院情報科学研究科修士論文.

[22] M. Lackenby, Word hyperbolic Dehn surgery, Invent. Math. **140** (2000), 243–282.

[23] A.E. Lash, Boundary curve space of the Whitehead link complements, Ph.D. thesis, University of California, Santa Barbara, 1993.

[24] J. Luecke, Dehn surgery on knots in the 3-sphere. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, (1995), 585–594.

[25] M. Ishikawa, T.W. Mattman and K. Shimokawa, Exceptional surgery and boundary slopes, preprint(math.GT/0211147).

[26] M. Ochiai, Heegaard diagrams of 3-manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 863–879.

[27] B. Mangum and T. Stanford, Brunnian links are determined by their complements. Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 143–152.

[28] B. Martelli and C. Petronio, Dehn filling of the "magic" 3-manifold, preprint(math.GT/0204228).

[29] T.W. Mattman, private communication.
[30] H. Matsuda, M. Ozawa and K. Shimokawa, On non-simple reflexive links. J. Knot Theory Ramifications **11** (2002), 787–791.
[31] E. Mayrand, Distances between the surgery slopes yielding S^3 on a generic link, preprint.
[32] K. Motegi, Haken manifolds and representations of their fundamental groups in $\mathrm{SL}(2, C)$, Topology Appl. **29** (1988), 207–212.
[33] S. Schanuel and X. Zhang, Detection of essential surfaces in 3-manifolds with SL_2-trees. Math. Ann. **320** (2001), 149–165.
[34] P.B. Shalen, Representations of 3-manifold groups. Handbook of geometric topology, 955–1044, North-Holland, Amsterdam, 2002.
[35] M. Teragaito, Links with surgery yielding the 3-sphere. J. Knot Theory Ramifications **11** (2002), 105–108.
[36] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture notes, Princeton University, 1978.
[37] T. Yoshida, On ideal points of deformation curves of hyperbolic 3-manifolds with one cusp. Topology **30** (1991), 155–170.
[38] X. Zhang, Dehn filling with non-degenerate boundary slope rows. Topology Appl. **99** (1999), 99–110.

埼玉大学理学部数学科 〒338-8570　埼玉県さいたま市桜区下大久保 255
E-mail address: `kshimoka@rimath.saitama-u.ac.jp`

解かれつつある！ポアンカレ予想

数学の世界 –どうなる？１００万ドル問題–

下川航也

kshimoka@rimath.saitama-u.ac.jp

埼玉大学理学部数学科

ミレニアム問題

クレイ数学研究所 (Clay Mathematical Institute) は、２０００年のミレニアム会議において、

ミレニアム問題 (Millenium Problems)

という７つの問題に、それぞれ１００万ドルの懸賞金を懸けることを発表した。

その一つに、今回お話しする

ポアンカレ予想 (Poincaré Conjecture)

も含まれている。

ポアンカレ予想

ポアンカレ予想は、ポアンカレが1895年に発表した論文

"Analysis situs"(位置解析)

の5つ目の補足として1904年に発表された論文

"Cinquième complément à l’Analysis situs"

の中に挙げられている、次のような予想である。

ポアンカレ予想

「コンパクトで境界のない
３次元多様体の基本群が自明なら、
その多様体は３次元球面である。」

ポアンカレ

ポアンカレ (Henri Poincaré, 1854–1912)

最後の万能学者と言われている。
彼の研究は、ポアンカレ自身の分類によると、

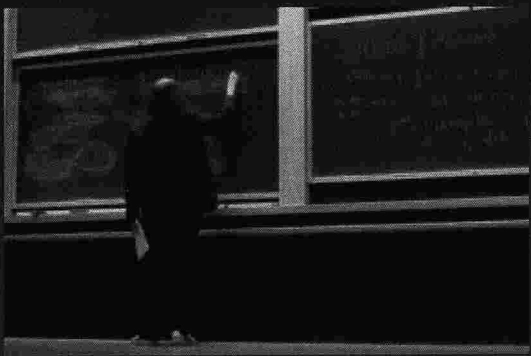
- 微分方程式
- 関数の一般論
- 純粋数学のいろいろな問題
- 天体力学
- 数理物理学
- 科学の哲学
- 教育的なもの、啓蒙的なもの

に渡る。

ペレルマン

ペレルマン
(Grisha Perelman, ロシア人, ４０歳前後？)

2003 年 4 月 15 日の New York Times に、
「ペレルマンがポアンカレ予想を解いたようだ。」
との記事が載る。
噂は、2002 年の終わりから流れていた。



３次元多様体の幾何学化予想
（ポアンカレ予想を含む予想）
の肯定的解決について講演する
ペレルマン

ペレルマンの論文

ペレルマンの論文は現在３つプレプリントとして、
公開されている。

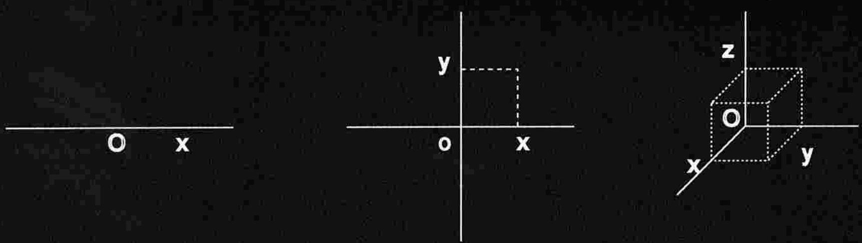
- The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications (2002)
- Ricci flow with surgery on three-manifolds (2003)
- Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds (2003)

これらの論文は、まだプレプリントの段階であり、
数学の専門雑誌には掲載されていない。
（投稿もまだ？）

ポアンカレ予想の意味

- ポアンカレ予想は、３次元の一つの世界（３次元球面）の特徴付け。
- ある３次元の世界が３次元球面であるかどうかは、基本群というものを調べるだけで分かるということ。

次元について



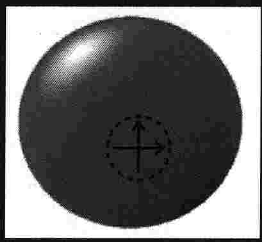
?

1次元	2次元	3次元	4次元
x	(x, y)	(x, y, z)	(x, y, z, w)

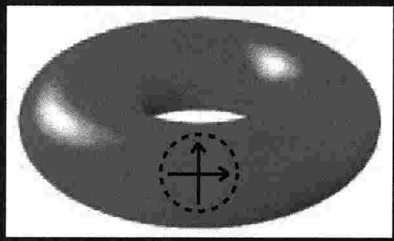
これらの空間は、ユークリッド空間といわれている標準的な空間である。

多様体とは？

多様体とは、「局所的にはユークリッド空間と区別がつかない空間」のこと。



２次元球面
(ボールの表面)

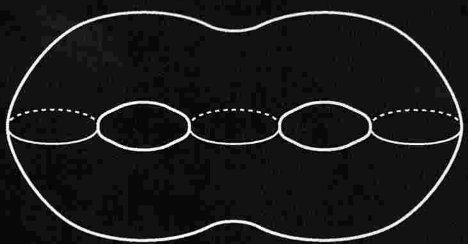


トーラス
(ドーナツの表面)

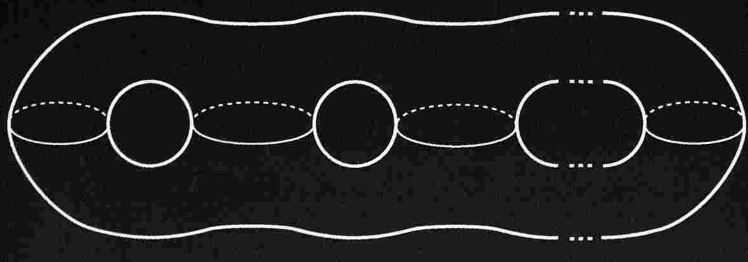
２次元球面とトーラスは、局所的に見ると２次元ユークリッド空間と同じ。

これらは２次元多様体の例である。 

ほかの２次元多様体の例



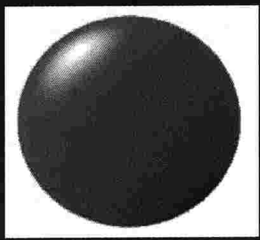
種数２の曲面

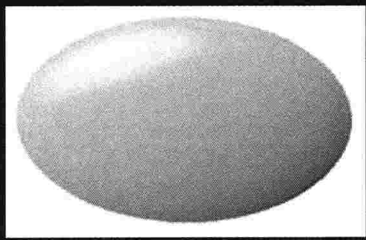


種数 n の曲面

トポロジーの考え方

トポロジー（位相幾何学）の観点では、連続的に動かして同じ形になるものは同じ（同相）と思う。





この２つの空間は、同相である。
(両方とも、トポロジー的には２次元球面である。)

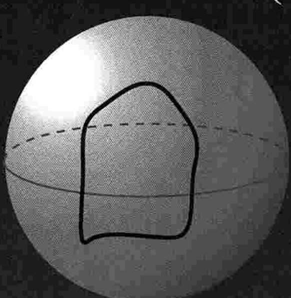
これらの空間と、トーラスは同相ではない。

基本群

基本群とは、
「空間にどれ位引っ掛かりがあるか」
を表すもの。

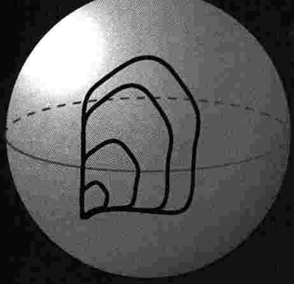
それは、例えば、その空間に「紐」をいろいろ配置することにより調べることが出来る。

２次元球面(ボールの表面)の基本群は？



２次元球面の上の紐

2次元球面の基本群



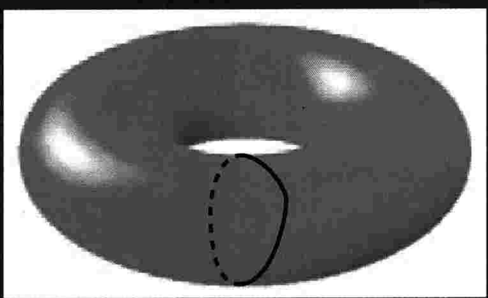
2次元球面の上の紐は、
1点に縮めることが出来る。

どの紐も1点に縮めることが出来るとき、
基本群が自明であるという。

2次元球面は、基本群が自明である。

トーラスの基本群

トーラス(ドーナツの表面)には、1点に縮めることが出来ない紐の置き方がある。

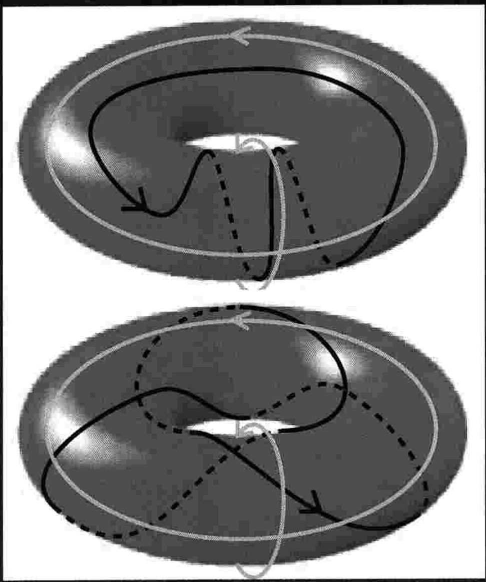


1点に縮めることが出来ない
紐の置き方　その(2)

トーラスは基本群は非自明。
(数学的に証明出来る事実。)

2次元球面とトーラスは、基本群により区別できる。

トーラスの基本群(2)



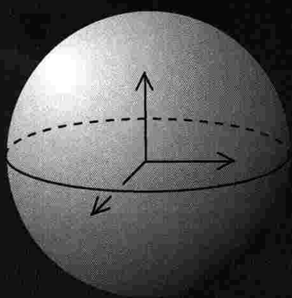
1 点に縮めることが出来ない
紐の置き方　その(3)

(2, 1)-loop

1 点に縮めることが出来ない
紐の置き方　その(4)
(−3, 2)-loop

トーラスの紐の置き方は、２つのパラメータにより決定される。

３次元多様体



３次元球体
(中身の詰まったボール)

３次元球体は、境界を持つ３次元多様体の例

私たちの住んでいる宇宙は３次元多様体の例

今まで見てきた２次元多様体は、全て境界が無かった。

3次元球面

３次元球面とは、
「４次元ユークリッド空間内の
原点から距離が１の空間」。

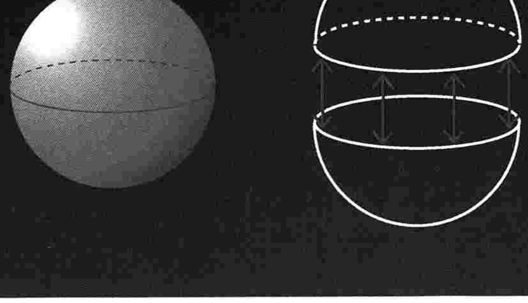
つまり、「$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$を満たす点
(x, y, z, w)の集合」。

これは、２次元球面が、
「３次元ユークリッド空間内で
原点から距離が１の空間」、
つまり、「$x^2 + y^2 + z^2 = 1$を満たす点(x, y, z)の
集合」
であったことを思い出してほしい。

3次元球面(2)

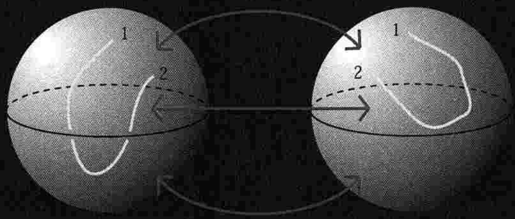
３次元球面は、２つの３次元球体を境界で貼りあわせると得られる。

これは、２次元球面は、２つの２次元球体(円板)を境界で貼りあわせると得られることと同じ。



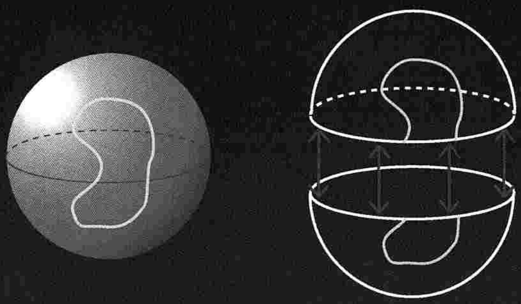
3次元球面の基本群

３次元球面内の紐はどう見えるか？



３次元球面内の紐は、
どちらかの３次元球体に
入れることが出来る。

○参考：２次元球面の場合

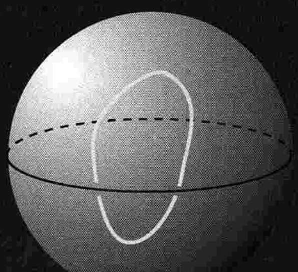


２次元球面内の紐は、
どちらかの２次元球体に
入れることが出来る。

3次元球面の基本群(2)

３次元球面内の紐は、どちらかの３次元球体に入れることが出来る。

３次元球体の基本群は自明。



よって、３次元球面の基本群は自明。

ポアンカレ予想

ポアンカレ予想は、この逆を問うている。

ポアンカレ予想

コンパクトで境界のない３次元多様体の基本群が自明なら、その多様体は３次元球面である。

ここで、コンパクトとは、だいたい「有限の大きさである」ということ。

２次元の場合

２次元の場合は、ポアンカレ予想は成り立つ。
つまり、

２次元版ポアンカレ予想

コンパクトで境界のない２次元多様体の基本群が自明なら、その多様体は２次元球面である。

は正しい。
これはこれまでの観察からも分かる。

ペレルマンの方法

ペレルマンは、ポアンカレ予想を、トポロジー的手法ではなく、微分幾何的手法で考察した。

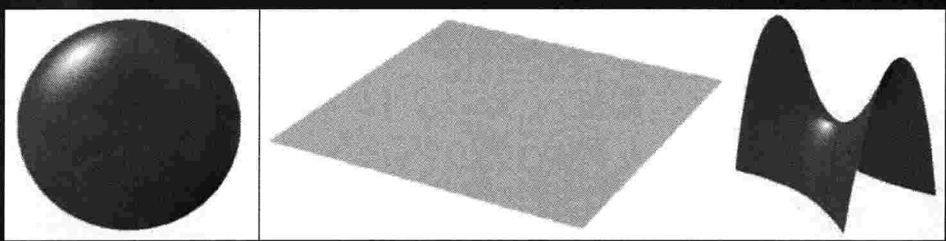
トポロジー的な観点
長さや角度は気にせず、連続的に動かしても変わらない形を研究

微分幾何的な観点
長さや角度を気にする研究
ある空間にどのような長さや角度の入れ方があるか等

長さや角度のような構造を幾何構造という。

2次元の幾何学

２次元の幾何学には３つの種類がある。



180度超　　180度　　180度未満

サーストンの幾何学化予想

サーストンの幾何学化予想

３次元多様体は、よく知られている幾何構造をもつ幾つかの部分に分けることが出来る。

William P. Thurston (1946–)
1982 年フィールズ賞受賞
３次元多様体の研究に、幾何、解析、代数全てを使うような手法を導入し、３次元多様体の研究を新しいステージへと導く。

ペレルマンの戦略

- サーストンの幾何学化予想を肯定的に解決。
- よく知られている幾何構造の中では、基本群が自明なものは３次元球面のみ。
- よって、基本群が自明なら、それ以上は分解せず、それ自身が３次元球面となる。

宇宙の形

- 最近、宇宙の基本群は自明でないらしいという研究がある。
- これは、宇宙の背景放射の研究や、最近の電波望遠鏡の進化により判明した宇宙の巨大構造の研究により、宇宙のトポロジーの構造や幾何構造の候補が絞れてきたため。
- それによると、宇宙は、最も簡単な３次元多様体である３次元球面では無いようである。
- つまり、宇宙には手元に引き寄せることが出来ない紐の置き方があるらしい。

参考文献

- ポアンカレの贈り物 / 南みや子 永瀬輝男, ブルーバックス１３２２, 講談社 (900 円+税)
- ポアンカレトポロジー (Analysis Situs) / ポアンカレ 齋藤利弥訳, 朝倉書店 (5700 円+税)
- 数学七つの未解決問題, 森北出版 (2800 円+税)
- ポアンカレ予想物語 / 本間龍雄, 日本評論社