

岸本 崇 (埼玉大学大学院理工学研究科・数理電子情報部門・数理領域)

プロジェクト名: 対数的極小モデル理論およびサルキソフ・プログラムのアフィン代数幾何学への応用

研究目的・研究の進め方・研究成果: 本研究では主に3次元アフィン代数多様体の双正則的性質を, コンパクト化を経由することにより現代数学の最先端の理論である, 極小モデル理論を適用して解析することを遂行した。3次元極小モデル理論の1つの大きな副産物として, プロジェクト名にあるサルキソフ・プログラムがある。これは森ファイバー空間と呼ばれる, ある意味で幾何学的・数値的に特殊な性質を持つ3次元射影多様体の間の双有理写像を分解する為の1つの手法である。森ファイバー空間の例で, もっともオーソドックスなものとしては:

- (i) 3次元射影空間 P^3 ,
- (ii) 4次元射影空間の中の(適当な特異点を有した)次数4の超曲面,

などがある。サルキソフ・プログラムの有用性は例えば(ii)の多様体が, 双有理的に(殆ど)rigidであるという, 古典的には1970年代にロシアのV.A. Iskovskih-Yu.I. Maninにより捉えられていた事実(彼らの証明方法は, ある種の複雑な計算, もう少し正確に言うと, ある性質を充たす離散的付値の存在を重複度に関する複雑な計算により否定することによって証明していた)を簡明・概念的に証明するときに発揮される。

しかしその一方で, (i)のタイプの多様体は有理的であり, そのような場合にはサルキソフ・プログラムにはまだ不十分な点がある。例えば, 3次元アフィン空間 C^3 の自己同型は, P^3 の間の双有理写像に自然な形で延長されるが, この状況をサルキソフ・プログラムだけに依存をして考察するのはまだ厳しいように思われる。今回の我々の研究の斬新なポイントは, 少し視点を変えて, 3次元アフィン空間 C^3 の自己同型を, 1次元加法代数群 C_+ の C^3 への非自明な作用を切り取って構成するという箇所にある。1次元加法代数群 C_+ の作用は幾何学的な概念であるが, これを扱う際の1つの有用性としては, 局所冪零微分作用素 (Locally Nilpotent Derivation, 以降ではLNDと略す) という純代数的な概念に置き換えることが可能である点が挙げられる。通常, C_+ -作用は抽象的な代数多様体の幾何学的な構造を把握する際に非常に有用な情報となるのであるが, その一方で, 3次元アフィン空間 C^3 のような, 幾何学的にはシンプルな(実はそれ程までにはシンプルではないのであるが)代数多様体に対しての C_+ -作用を考察する際には, 具体的に作用を書き下すことが重要になることが多く, その観点からは C_+ -作用とともに, そのの

代数的対象物である LND も重要になってくる。3次元アフィン空間 \mathbb{C}^3 への C_+ -作用のうちで、特殊であるが重要なクラスとして homogeneous な作用がある。2000年辺りに、D. Daigle 氏によって、 \mathbb{C}^3 への homogeneous な C_+ -作用に対応する、LNDの核の特徴づけに関する結果が得られているのであるが、彼の証明の手法は純代数的なものであった。本研究では、この D. Daigle 氏の結果の別証明を、幾何学に与えることに成功した。その証明の過程で、対応する LND の核が、2次元射影平面 P^2 のある種の性質を充たす有理線型束に対応していることが implicit に分かる。実はここが、 \mathbb{C}^3 の複雑な自己同型を構成する為のキーポイントになる。例えば、1970年代初頭に永田雅宜先生によって構成された、 \mathbb{C}^3 の次数5の自己同型(通称: 永田同型)は、最近になって Shestakov-Umirbaev による結果が得られるまでの30年以上の間、tame であるかどうかさえ分かっていなかった。このように永田同型は十分に複雑な自己同型なのであるが、homogeneous C_+ -作用の視点で考えると、実は P^2 のシンプルな次数2の線型束に付随して構成することができる。この事実を考慮に入れて、本研究では黒田茂氏(首都大学東京)との共同研究によって、前述した D. Daigle の結果の別証明を得るための過程で出現する、 P^2 のある種の性質を充たす有理線型束を具体的に記述し、そこから \mathbb{C}^3 の複雑な自己同型を無限個構成することに成功した。更に、これらの自己同型は、永田同型と同じく tame ではないということも判定することができた。

一方、抽象的なアフィン代数多様体に対しても、その多様体が1次元乗法代数群 C^* の作用を有しているときには、アフィン空間 \mathbb{C}^3 のときと同じように、homogeneous C_+ -作用を考えることはできる。この方向での研究としては、M. Zaidenberg 氏(グルノーブル大学 I・フーリエ研究所)と Y. Prokhorov 氏(モスクワ大学)との共同研究で、非特異な偏極代数多様体上のアフィン錐が C_+ -作用を持つ為の必要充分条件を得ることができた(cf. [1])。例えば主結果の1つの系として、次数が4以上の反標準的に埋め込められている del Pezzo 曲面上のアフィン錐には、 C_+ -作用が存在するということが判明した。

研究成果の発表: (論文・講演・集中講義記録)

- [1] Takashi Kishimoto, Yuri Prokhorov and Mikhail Zaidenberg, *Group actions on affine cones*, arXiv:0905.4647v1 [math.AG].
- [2] Takashi Kishimoto, *An application of log minimal model program for affine algebraic threefolds*, 27 December 2008, The international conference entitled "Affine Algebraic Geometry", 22 December–28 December, 2008, held at Fireflies Intercultural Centre, Bangalore, India.
- [3] Takashi Kishimoto, 集中講義: 題目「双有理幾何学のアフィン代数幾何学への応用」(於: 首都大学東京): 実施日程: 2009年1月8日(木)・1月13日(火)~1月15日(木).