平成 20 年度総合研究機構研究プロジェクト研究成果報告書

平面曲線族のモジュライ空間と不変式論

(Moduli and Invariant theory for families of plane curves)

所属・職名　**大学院理工学研究科・教授**

(Graduate School of Science and Engineering/Professor)

代表者　**酒井文雄**

(Fumio SAKAI)

研究成果

当該プロジェクト研究の研究対象はピカール曲線上のワイエルシュトラス点の分布である．

次のような平面曲線の 2-パラメータ族を考察する．

$$C_{a,b} : y^3 = x(x-1)(x-a)(x-b) \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C}).$$

ここで，パラメータ空間 U は 5 直線の補空間とする．

$$U = \{(a,b) \mid ab(a-1)(b-1)(a-b) \neq 0\} \subset \mathbf{C}^2.$$

このような曲線 $C_{a,b}$ を**ピカール曲線**という．以下，$U \subset \mathbf{P}^2$ としても考察し，同時座標 (a,b,c) を用いる．基点 $O_1 = [1:0:0]$, $O_2 = [0:1:0]$, $O_3 = [0:0:1]$, $O_4 = [1:1:1]$ を定義しておく．

定義 1 重み 2 のワイエルシュトラス点の個数を n で表す．

定理 1 パラメータ空間内の曲線 18 次曲線 $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$ が存在して，$n(C_{a,b}) \geq 4$ となる必要十分条件は $(a,b) \in \Gamma \cap U$ である．さらに，$\mathrm{Sing}(\Gamma) = \{O_1, O_2, O_3, O_4\} \cup \{24$ 個のノード $\}$ であり，

$$n(C_{a,b}) = \begin{cases} 1 & (a,b) \notin \Gamma \cap U \text{ の場合} \\ 4 & (a,b) \notin \Gamma \cap U \setminus \{24 \text{ 個のノード}\} \text{ の場合} \\ 7 & (a,b) \text{ が } \Gamma \text{ のノードの場合} \end{cases}$$

が成立する．

定義 2 整数行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

で定義された射影変換を σ, τ, ρ で表し，$G = \langle \sigma, \tau, \rho \rangle$ とすると，$G \cong S_4$ である．群 G はパラメータ空間 U に作用し，ピカール曲線のモジュライ空間は商空間 $M = U/G \subset \mathbf{P}^2/G$ になる．

定理 2 パラメータ空間内の２次曲線 $\Delta : 3(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+ac+bc) = 0$ を定義する．このとき，$U \setminus \Delta$ でパラメトライズされたピカール曲線のモジュライ空間は複素平面 $\mathbf{C}^2$ における尖点３次曲線 D_0 の補集合と同一視される．すなわち，

$$\{U \setminus \Delta\}/G \cong \mathbf{C}^2 \setminus D_0.$$

が成立している．

定理 3 一方，$\Delta \cap U$ でパラメトライズされたピカール曲線のモジュライ空間は $\mathbf{C}$ と同一視される．すなわち，

$$(\Delta \cap U)/G \cong \mathbf{C}.$$

が成立している．

定理 4 (主定理) 曲線 Γ のモジュライ空間における像 Γ_0 は尖点有理４次曲線であり，定義方程式

$$186624\Big(12X - Y - \frac{1}{9}\Big)^3 + \Big(629856X - 59049Y - 3645\Big)\Big(Y - \frac{1}{3}\Big)^3 = 0,$$

で与えられ，２重接線: $X = 0$ を有する．

(a) 曲線 Γ_0 の尖点 S の重複度は 3 である．曲線 Γ の特異点 $O_1, \ldots, O_4$ は尖点 S に移される．

(b) 曲線 Γ_0 の２重接線の接点を T_+, T_- とする．24 個のノードは T_+ か T_- のどちらかに移る．

$$\{P_1^+, \ldots, P_{12}^+\} \to T_+, \quad \{P_1^-, \ldots, P_{12}^-\} \to T_-.$$

注意 1 ４次曲線 Γ_0 にはパラメータ表示

$$X = \frac{(t^2 - 48t + 384)^2}{9t^3(3t - 32)},$$
$$Y = \frac{-229t^3 + 8928t^2 - 110592t + 442368}{27t^2(3t - 32)}.$$

が存在する．