平成２１年度総合研究機構プロジェクト成果報告書
研究課題名：サルキソフ・プログラムの３次元アフィン空間の代数的自己同型群の構造解析への応用

埼玉大学大学院理工学研究科・数理電子情報部門・数理領域 (准教授)：岸本　崇

アフィン代数幾何学の起源は代数的閉体上の多項式環，特に複素数体 $\mathbb{C}$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ の代数的自己同型群 $G_n := \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, \cdots, X_n])$ の構造解析への手法を模索することにある．古典的に２変数多項式 $\mathbb{C}[x, y]$ の自己同型群 G_2 の構造は充分に把握されており，一言で言えば，G_2 は穏やか (tame) な自己同型のみから構成される．結果自体はシンプルかつ純代数的なものであるのだが，その証明方法のヴァリエーションは多岐に及んでいる．特に注目するべきは，１９７０年代後半から急速に普及し始めたアフィン曲面の理論を適応するという視点である．これは本来は純代数的な対象をその多元環を正則関数全体の集合としてもつ適当な幾何学的な対象に置き換えて，その代数幾何学的な性質を解析してから再び代数的な対象に翻訳して結果を導くという考え方である．

一方で３変数以上の多項式環に対しては，G_n $(n \geqq 3)$ の構造は現在も尚，殆ど解明されていないといってよい状態である．ただ３変数多項式環 $\mathbb{C}[x, y, z]$ の場合に限れば，G_3 の構造は依然不明ではあるが，tame ではない自己同型が存在するというブレーク・スルーな結果が２００４年頃に Umirbaev-Shestakov によって発表された．これはそれまでの予想を覆す結果であった．より正確には彼らは与えられた自己同型 $\sigma \in G_3$ が tame になる為の充分条件を与え，それを適用することによって１９７０年代前半に永田雅宜氏によって構成された自己同型 (永田同型と呼ばれている) が実は tame ではないということを証明した．彼らの手法は純代数的なものであり，２変数のときのようにその裏に隠れている幾何学的な本質が見えないという欠点がある．

前述したように，G_3 には tame ではない自己同型が存在することが判明はしたが，「果たしてどれくらい沢山の tame ではない自己同型が存在するのか？」ということすら判明していない．そこで本研究ではアフィン代数幾何学と射影幾何学を融合して，$\mathbb{C}[x, y, z]$ の tame ではない自己同型を適当な重み付き射影平面上の有理曲線から構成される線形束，及び重み付き斉次な $\mathbb{G}_a$-作用を用いて構成することを試みて成功をした．結果自体はテクニカルなので詳細に述べることはできないが，同様に平成２１年度に結果をまとめた M. Zaidenberg 教授 (フーリエ数学研究所・フランス) と Yu. Prokhorov 教授 (モスクワ大学・ロシア) との共同研究で培った $\mathbf{G}_a$-作用と $\mathbf{G}_m$-作用を持つアフィン代数多様体を適当な射影代数多様体に帰着する手法を用いた．

M. Zaidenberg 教授と Yu. Prokhorov 教授とは今後も共同研究が予定されており，上述した研究の方向性で３変数多項式環 $\mathbb{C}[x, y, z]$ の自己同型群 G_3 の構造を少しずつ解明していきたいと考えている．我々の手法は代数幾何学的であるので，どのような幾何学的な仕組みで tame でない自己同型が発生するのかという箇所が把握できる点で意義深い．