特異平面曲線におけるゴナリティの研究

(On the gonality of singular plane curves)

所属・職名　大学院理工学研究科・教授

(Graduate School of Science and Engineering/Professor)

代表者　酒井文雄

(Fumio SAKAI)

研究成果

当該プロジェクト研究の究極の目的は平面曲線の次数と特異点の重複度を与えたときに，そのゴナリティを計算するということである．次数 d の平面代数曲線 C の定数でない有理関数 φ に，C の非特異モデルから射影直線への正則写像を対応させることが出来る．このような正則写像の次数（写像度）の最小の値として，C のゴナリティ G が定義される．ゴナリティは代数曲線の基本的な不変量であるが，与えられた曲線のゴナリティを求めるのは，一般には大変難しい問題である．さて，曲線 C の特異点の最大重複度を ν とすると，簡単にわかるように，$G \leq d-\nu$ が成立している．古典的な結果は C が非特異なら（$\nu=1$），$G=d-1$ が成立するというものである．その後，Coppens-Kato の論文で，$\nu=2$ の場合に等号 $G=d-2$ が成立するための必要十分条件が判明した．我々の２００４年の論文（Tokyo J. Math. Vol.27，当時博士課程の院生であった大河内正仁君との共著論文）において，等号 $G=d-\nu$ が成立するための十分条件を２種類証明した．一つは上記の Coppens-Kato の手法の拡張であり，もう一つは Serrano による曲線からの正則写像の曲線を含む局面からの写像への拡張定理を援用するものであった．

今回の研究により，上記の結果をいくつかの点において改良することに成功した．現時点における成果をプレプリントにまとめている．特に，$\nu=3$ の場合には最良と思われる結果を得ている．さらなる進展も期待され，研究を継続している．新しい観点はGの下からの評価式 $G \geq d-\nu-q$ を考察することである．また，以前の補題を再検討することにより，特異点の寄与をより細かく制御することが可能になり，結果が改良された．以下，$\nu=3$ の場合の結果を述べる．そのため，特異点のいわゆるデルタ不変量を δ で記す．また，非負整数 q は $1<d-3-q \leq d-\nu$ を満たすとする．さらに，２次関数 $Q(x)=x(d-x)$ を定めておく．

定理　次数 $d(\geq 6)$ かつ $\nu=3$ の平面曲線Cについて，条件 $\delta \leq Q([d/2])-(d-3-q)$ が満たされるならば，不等式 $G \geq d-3-q$ が成立する．