プロジェクト名： **接触リーマン多様体上の Kohn-Rossi Laplacian と一般断熱展開理論**

プロジェクト代表者： 長瀬 正義（理工学研究科・教授）

１．トウィスター空間上のディラック作用素の無限小変形カイラルアノマリーの研究

Spin^q-構造を持つリーマン多様体 $M=(M,g^M)$ 上の $\mathbb{C}P^1$-ファイブレーションの全空間 $Z=(Z,g^Z)$ は自然に Spin-構造を持つ。その構造に付随するディラック作用素を $\partial\!\!\!/_{g^Z}$ と記す。M 上の別のリーマン計量 h^M は Z 上の別のディラック作用素を $\partial\!\!\!/_{h^Z}$ を導くが，当代表者は，特に g^M のある特殊な変形 $g^M_{(u)}=g+uX$ の導く g^Z の変形 $g^Z_{(u)}$ に着目している。それの与える $\partial\!\!\!/_{g^Z}$ の無限小変形部分 $\delta_X\partial\!\!\!/_{g^Z}\equiv\frac{d}{du}\Big|_{u=0}\partial\!\!\!/_{g^Z_{(u)}}$ に付随する不変量 ($\delta_X\partial\!\!\!/_{g^Z}$ の無限小変形カイラルアノマリーと呼ぶ)

$$\log\det\left(\delta_X\partial\!\!\!/_{g^Z}\right)^{\pm}=\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s\,\mathrm{Tr}_\pm\Big(\partial\!\!\!/_{g^Z}\,\delta_X\partial\!\!\!/_{g^Z}\,e^{-t\partial\!\!\!/^2_{g^Z}}\Big)\,dt,$$
$$\text{with the equality }\mathrm{Tr}_\pm\Big(\partial\!\!\!/_{g^Z}\,\delta_X\partial\!\!\!/_{g^Z}\,e^{-t\partial\!\!\!/^2_{g^Z}}\Big)=\mathrm{Tr}_\mp\Big(\delta_X\partial\!\!\!/_{g^Z}\,\partial\!\!\!/_{g^Z}\,e^{-t\partial\!\!\!/^2_{g^Z}}\Big)$$

が興味の対象であり，これの被微分関数部分 $\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s\,\mathrm{Tr}_\pm\Big(\partial\!\!\!/_{g^Z}\,\delta_X\partial\!\!\!/_{g^Z}\,e^{-t\partial\!\!\!/^2_{g^Z}}\Big)\,dt$ は $\mathrm{Re}(s)>n/2+2$ の場合絶対積分可能であり $s=0$ で analytic な $\mathbb{C}$ 上の meromorphic function に解析接続されること，それの極や留数の計算，それらと他の不変量との関係を明らかにした。

２．接触リーマン多様体上の Kohn-Rossi Laplacian に付随する熱核の研究

この研究に関しては全体を発表できる段階にはない。一部を以下紹介する。

M を $2n+1$ 次元接触多様体として，接触 1-形式 θ, i.e., $\theta\wedge(d\theta)^n\neq 0$, が付随しているとする。よって Reeb ベクトル場 ξ が unique に取れる。この時，リーマン計量 g と $(1,1)$-形式 J で

$$g(\xi,X)=\theta(X),\quad g(X,JY)=-d\theta(X,Y),\quad J^2X=-X+\theta(X)\xi$$

を満たすものが存在するとして良い。こうして得た接触リーマン多様体 $M=(M,\theta,\xi,g,J)$ において，(p,q)-形式に作用する Kohn-Rossi ラプラシアン $\Box_H=\bar\partial_H^*\bar\partial_H+\bar\partial_H\bar\partial_H^*$ に付随する熱核 $e^{-t\Box_H}$ が興味の対象である。

J が可積分である場合 (この場合 M は強擬凸 CR-多様体と呼ばれる)，$0<q<n$ であれば，熱核 $e^{-t\Box_H}$ が確かに存在し，それの pointwise trace は $t\to 0$ のとき漸近展開

$$\mathrm{tr}\,e^{-t\Box_H}(P,P)\sim t^{-(n+1)}a_0(P)+t^{-(n+1)+1}a_1(P)+\cdots$$

を持ち

$$a_0(P)=\binom{n}{q}\binom{n}{p}\int_{-\infty}^{\infty}ds\,\Phi^{n-2q}(s),\quad \Phi^{n-2q}(s)\equiv\frac{e^{-(n-2q)s}}{(2\pi)^{n+1}}\Big(\frac{s}{\sinh s}\Big)^n$$

と書けることは N. Stanton 等によって証明されている。

当代表者は，こうした結果を (J の可積分性を仮定しない) 接触リーマン多様体にまで拡張しようとしている。(2-1) 接触リーマン多様体においても，$0<q<n$ であれば，熱核 $e^{-t\Box_H}$ は存在する，(2-2) 接触リーマン多様体上のその熱核 $e^{-t\Box_H}$ の pointwise trace も $t\to 0$ のとき漸近展開を持

ち漸近展開係数 $a_0(P^0)$, $a_1(P^0)$, $\cdots$ の具体的な計算方法がある，(2-3) それら係数達の具体的表示をMathematica を使っていくつか書き下した，などの結果を得た。手段は，当代表者の開発した一般断熱展開理論である。