プロジェクト名
ジーゲルモジュラ形式と半整数の重さのモジュラ形式のフーリエ係数の研究

代表者：氏名（所属・職名）小嶋久祉　大学院理工学研究科・教授

（１）研究の目的

・我々は３つの研究課題を解明したい。

第一について述べる。Kohnen 氏は次 Siegel モジュラ形式の池田の持ち上げの像が次数 n の Siegel モジュラ形式の Maass 空間と一致すると予想した。この問題は多くの人々の強い興味を引いたが、我々は Kohnen と共同研究で初めて４｜n, 4|n－1 の場合を肯定的に解決した。私は残りの場合の解決を目指す。

次に第２の問題について述べる。一般代数体上の表現付き半整数の重さの Hilbert-Maass 波動形式 f から偶数の重さの Hilbert-Maass 波動形式 F への Hecke 作用素と可換になる対応をテータ関数を用いて構成し,F のフーリエ係数を f のフーリエ係数を用いて具体的に表示することを目指す。また f の平方因子の無い整数におけるフーリエ係数の平方を整数の重さの Hilbert-Maass 波動形式 F に付随するゼータ関数の特殊値を用いて具体的に表示し、志村の総実な代数体上の半整数の重さの Hilbert モジュラ形式のフーリエ係数とゼータ関数の特殊値の結果を、一般代数体上の表現付き半整数の重さの Hilbert-Maass 波動形式の場合に拡張し『志村—小嶋』の公式の構築を目指す。

第３に総実代数体上のヤコビ形式から Hilbert モジュラ形式への対応を構成し Hilbert モジュラ形式のフーリエ係数をヤコビ形式のフーリエ係数を用いて表示することを目指す。また総実代数体上のヤコビ形式のフーリエ係数の平方を Hilbert モジュラ形式に付随するゼータ関数の中心値を用いて表すことを目指す。

（２）研究の進め方

一般代数体上の表現付き半整数の重さの Hilbert-Maass 波動形式 f から,偶数の重さの Hilbert-Maass 波動形式 F への Hecke 作用素と可換な対応 L を，テータ関数を核とする積分作用素を用いて構成し，f の対応 L の像 F＝L(f)のフーリエ係数を f のフーリエ係数を用いて具体的に表示した。この際，志村の一般代数体上のテータ関数の変換公式の結果と Poisson 和公式を用いて，テータ関数を Poincare 級数の形に分解した。次にアデール的手法，テータ級数の変換公式とガウス和の計算を用いて,f のある定数倍を,対応 L の像 L(f)とテータ関数との積の積分の形で表示した。対応 L の積分表示を用い,この定数の本質的な部分が,f の平方因子が無い整数におけるフーリエ係数と一致することを示した。 また,あるアイゼンシュタイン級数とテータ級数の積の対応 L の像が,本質的にあるアイゼンシュタイン級数の平方になることを示した。 以上の結果とランキンの方法を用い，一般代数体上の半整数の重さの Hilbert-Maass 波動形式 f の平方因子が無い整数におけるフーリエ係数の平方を, f の対応 L による像 L(f)に付随するゼータ関数の特殊値を用いて,具体的に表示する問題を解明した。この研究を遂行するためには，志村の方法　(G.Shimura,On the Fourier coefficients of Hilbert modular forms of half integral weight, Duke

Math.J.）を一層精密化し拡張及び発展させることが必要であつた。

研究課題である総実代数体上の Jacobi 形式の Fourier 係数について述べる。Hecke 作用素の跡公式を用いて, Skoruppa と Zagier は,index m の Jacobi 形式 p からレベル m の楕円モジュラ形式 f への Hecke 作用素と可換なる全単射な対応の存在を証明した。Gross-Kohnen-Zagier は,この対応を核関数を用いて定式化し,f のフーリエ係数を p のフーリエ係数を用いて具体的に表示した。また p のフーリエ係数の平方は, f に付随し２次指標で絞ったゼータ関数の中心値と本質的に一致することを証明した。我々はこの結果を,総実代数体 F 上の Jacobi 形式について一般化した。

（３）研究の成果

一般代数体上の半整数の重さの Hilbert-Maass 波動形式 f から,偶数の重さの Hilbert-Maass 波動形式 F への Hecke 作用素と可換な対応 L を, テータ関数を核とする積分作用素を用いて構成し, f の対応 L の像 F＝L(f)のフーリエ係数を f のフーリエ係数を用いて具体的に表示した。また f のフーリエ係数の平方を Hilbert-Maass 波動形式 f　の対応 L による像 L(f)に付随するゼータ関数の特殊値を用いて,具体的に表示した。

また２次形式の空間に付随する核関数を用いて, 総実代数体 F 上の index N　の Jacobi 形式 p から F 上のレベル N の Hilbert モジュラ形式 f への対応を構成し, f のフーリエ係数を p のフーリエ係数を用いて具体的に記述した。また, p のフーリエ係数の平方を, f に付随し２次の Hecke 指標で絞った L 関数の中心値を用いて表示した。

以上の成果は２つの論文で出版される。

（１）H. Kojima, On the Fourier coefficients of Hilbert modular forms of half-integral weight over Arbitrary algebraic number fields, to appear in Tsukuba J. of Math. 37(2013).

（２）H. Kojima, On the Fourier coefficients of Jacobi forms of index N over totally real number fields, Tohoku Math. J. 64(2012), 361-385