

プロジェクト名： 葉層構造と力学系の複雑さに関する研究

代表者： 江頭 信二 (大学院理工学研究科・助教)

1 研究の目的

古くから知られている結果として Denjoy の定理、すなわち S^1 からそれ自身への C^2 級微分同相写像は、例外型極小集合をもたないが、 C^1 級では例外型極小集合をもち得るという結果がある。このような 1 次元の力学系の微分可能性に応じた幾何学的な性質について様々な研究、例えば微分可能性を弱めることや力学を多様にするといった拡張がなされてきた。コンパクト多様体上の余次元 1 葉層構造の定性的理論も、このような拡張の一方向で、 C^2 級の余次元 1 葉層では、Cantwell と Conlon の結果によって定性的性質がかなり明らかにされた。

本研究代表者は、これまでコンパクト多様体上の余次元 1 葉層の定性的理論を C^2 級より弱い微分可能性で試みることを行った。その成果としては、本研究代表者は横断的に区分滑らかな葉層 S^1 -束については、 C^2 級の場合と同じ定性的構造をもつという結果を得ている。

本研究では、研究の学術的背景の延長線上にある事柄として、以下の 5 つの研究を行う。各研究において、コンピューターを利用し、解析する。解析結果を基に、系の有する諸性質を導き、仮説を立て、その理論的裏づけを行う。

【研究A】コンパクト多様体上の余次元 1 葉層構造の定性的理論について

【研究B】葉層構造の特性類と定性的理論との関係について

【研究C】葉層構造のエントロピーや拡大度と定性的理論との関係について

【研究D】余次元 1 葉層構造の例外型局所極小集合の横断的なハウスドルフ次元

【研究E】閉曲面上の例外型極小集合を持つ力学系

2 研究の進め方

【研究A】コンパクト多様体上の余次元 1 葉層構造の定性的理論について

研究Aでは、コンパクト多様体上の余次元 1 葉層構造の定性的理論を C^2 級より弱い微分可能性で試みる。本研究代表者はコンパクト多様体上の横断的に区分滑らかな (piecewise- C^{1+bv} 級の) 葉層 S^1 -束が持つ定性的構造を明らかにしたが、それを一般の余次元 1 葉層に拡張していく。また「区分滑らか」という微分可能性の仮定を弱くした場合どうなるかについても研究を行なう。Denjoy の定理が成立するような微分可能性では、余次元 1 葉層構造の定性的理論が同じように展開できることが期待されるが、異なる現象が現れないかどうかを確かめるために、コンピューターでグラフィック表示し、その表示結果を基に理論的裏づけを行う。

【研究B】葉層構造の特性類と定性的理論との関係について

研究Bに関連することとして、コンパクト多様体上の滑らかな余次元 1 葉層に対して、Godbillon-Vey 不変量 (GV 不変量) が定義されたが、この GV 不変量については、GV 不変量が非自明ならば弾性葉が存在するという Duminy の結果がある。この結果は葉層構造の特性類と定性論を結びつける関係を表

している。コンピューターによって特性類を計算し、定性的性質との関連を調べる。

【研究C】葉層構造のエントロピーや拡大度と定性的理論との関係について

研究Cに関して、コンパクト多様体上の葉層構造に対しても力学系と同様にして、Ghys-Langevin-Walczak によって、エントロピーという量が定義されている。葉層構造のエントロピーの計算は、手計算による手法はなじまず、コンピューターを用いた方が良い。計算結果を基に重要な性質を見つけ出し、理論的裏づけを行う。

【研究D】余次元1葉層構造の例外型局所極小集合の横断的なハウスドルフ次元

研究Dについて、例外型局所極小集合の横断的なハウスドルフ次元について、解決されたのは C^2 級マルコフ型例外型極小集合の場合のみであり、マルコフ型でない場合について解くことは重要なテーマとなっている。与えられた例外型局所極小集合の横断的なハウスドルフ次元の計算を手計算で行うことはできないに等しいので、それをコンピューターに計算させることによって次元を予測し、マルコフ型という仮定をさらに弱めることが可能かどうか検証する。

【研究E】閉曲面上の例外型極小集合を持つ力学系

研究Eは、余次元が2の例外型極小集合について取り組むものである。閉曲面上の力学系において、例外型極小集合がシェルピンスキーカーペット型のものやシェルピンスキーガasket型のものについては、最近研究が行われている。しかし、それとは異なって“形”がきれいでない例外型極小集合については、大きな成果は得られていない現状がある。コンピューターによって多数の例外型極小集合の様子を描くことで、新しい成果を見出すことを期待する。

3 研究の成果

研究Aについて、コンパクト多様体上の横断的に区分滑らかな余次元1葉層構造に対し、以下の事柄が成立する見込みが得られた。

- (1) 葉層充満開集合はその集合における極小集合を含む。
- (2) 全真葉は有限レベルにあり、その葉の増大度はレベル次数の多項式の増大度に等しい。
- (3) 各局所極小集合は有限レベルにある。
- (4) 例外型局所極小集合は弾性葉を含む。
- (5) 有限レベルの葉の和集合は多様体においてちょう密である。
- (6) 無限レベルにある葉に関する幾つかの性質（略）が成立する。
- (7) 葉層の拡大度は葉のレベルと弾性葉の有無によって決定できる。
- (8) 葉層のエントロピーが正であることと弾性葉が存在することは同値である。

現在、この結果について証明を完成させようとしている段階である。

また、研究Dについて、例外型局所極小集合の横断的なハウスドルフ次元について、マルコフ型を弱めた準マルコフ型でも成立する見込みが得られ、証明を完成させようとしている段階である。

なお、研究B、研究C、研究Eについては、プロジェクト研究期間が短かったため、平成25年度以降に持ち越しとなった。