実対称固有値問題に対する多分割の分割統治法の改良と応用

Improvement and Application of Multiple Division Divide-and-Conquer for Real Symmetric Eigenproblem

所属・職名: 情報メディア基盤センター・教授
Information Technology Center, Professor
代表者氏名: 重原孝臣
SHIGEHARA Takaomi

計算機の高速化・大容量化の進展に伴い、理工系諸分野に数値シミュレーション技術が浸透するなか、連立1次方程式、固有値問題、特異値分解をはじめとする線形代数に関わる諸問題を、数値的に高速かつ安定に解くための技法の確立の必要性がますます高まってきている。

本研究は最新の実対称固有値問題数値解法アルゴリズムの一つである分割統治法 [1, 2] の拡張を行い、従来2であった分割数を3以上に拡張可能なアルゴリズムを構築して演算量の大幅な削減を図るとともに、精度・性能両面で満足のいく実装を行い、さらに、特異値分解等の数値線形代数の他分野への応用を図るものである。アルゴリズムの構築については、平成17年度中に提案した再直交化法を発展させ、2倍精度演算の範囲で固有ベクトルの直交性を高速に保証するアルゴリズムを確立し、従来の2分割分割統治法に基づくLAPACK (Linear Algebra PACKage) 中の実対称固有値問題解法ルーチンを上回る性能、同等の精度を実現した [3, 4, 5]。

また、提案アルゴリズムの特異値分解への応用、共有メモリ型並列計算機への実装を行い、前者については従来の2分割分割統治法に基づくLAPACK中の特異値分解ルーチンと同等の性能・精度を実現した [6]。後者についてはSGI Onyx 3400上でプレリミナリな実装を行い、コンパイラの自動並列化は有効ではなく、共有メモリ並列プログラミングの標準 API である OpenMP 用いたアルゴリズムレベルでの並列化が高速化に必須であることを明らかにした [7]。

本研究テーマに関して今後重要になる課題は、行列の性質と減次の発生率の相関の解明、固有ベクトルの直交性保証法の更なる改良の2点である。

なお、本研究に関連し、特異な一般固有値問題の新たな数値解法およびその一般化を考察するなかで、任意に与えられた2つの線形写像 $f, g : V \longrightarrow W$ (V, W は有限次元線形空間) に対するクロネッカ基底の存在に関する新たな証明法について着想を得た。クロネッカ基底の存在については、これまで代数的な証明 [8]、幾何学的な証明 [9] の二つが知られているが、新たな証明はこれとは異なる幾何学的、構成的な証明になっている。現在、原稿を準備中で、証明の精査、一般化、簡素化を図ったのち、専門誌に投稿する予定である [10] 。

なお、本研究の一部は科学研究費補助金 (課題番号: 16656033) の支援の下で行われた。

参考文献

[1] J. J. M. Cuppen, ‘A divide and conquer method for the symmetric tridiagonal eigenproblem’, Numerische Mathematik, Vol.36, pp.177–195, 1981.

[2] M. Gu and S. C. Eisenstat, ‘A divide-and-conquer algorithm for the symmetric tridiagoal eigenproblem’, SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol.16, pp.172–191, 1995.

[3] 桑島豊, 重原孝臣, ‘実対称三重対角固有値問題の分割統治法の拡張’, 日本応用数理学会論文誌, Vol.15, No.2, pp.89–115, 2005.

[4] 桑島豊, 重原孝臣, ‘実対称三重対角固有値問題に対する多分割の分割統治法の改良’, 日本応用数理学会論文誌, Vol.16, No.4, pp.453–480, 2006.

[5] 桑島豊, ‘実対称固有値問題に対する多分割の分割統治法に関する研究’, 埼玉大学大学院理工学研究科 情報数理科学専攻 博士論文, 2007.

[6] 大石和也, ‘特異値分解における多分割の分割統治法の実装’, 埼玉大学工学部 情報システム工学科 卒業論文, 2007.

[7] 坪谷怜, ‘実対称固有値問題に対する多分割の分割統治法の共有メモリ型並列計算機への実装’, 埼玉大学工学部 情報システム工学科 卒業論文, 2007.

[8] F. R. Gantmacher, ‘The theory of matrices’, Vol.II, Chap.XII, Chelsea Publishing Company, New York, 1977.

[9] X. Puerta, F. Puerta and J. Ferrer, ‘Global reduction to the Kronecker canonical form of a C^r-family of time-invariant linear systems’, Linear Algebra and its Applications, Vol.346, Issues 1–3, pp.27–45, 2002.

[10] Kazuyuki Hiraoka, Hiroki Hashiguchi and Takaomi Shigehara, in preparation.