クロネッカ基底の存在に対する構成的・幾何学的証明および数値計算への応用

情報メディア基盤センター[1]
重 原 孝 臣

V, W を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の有限次元線形空間、$f, g : V \longrightarrow W$ を線形写像の対 (束) としたとき、以下の 5 つの型の鎖 (chain) から成る V, W の基底 (クロネッカ基底) を構成できることが知られている。

$$
\begin{array}{ll}
(R) & 0 \xleftarrow{f-\mu g} x_1 \xrightarrow{g} y_1 \xleftarrow{f-\mu g} x_2 \xrightarrow{g} \cdots \xleftarrow{f-\mu g} x_l \xrightarrow{g} y_l \quad (\mu \neq 0) \\
(S1) & 0 \xleftarrow{f} x_1 \xrightarrow{g} y_1 \xleftarrow{f} x_2 \xrightarrow{g} \cdots \xleftarrow{f} x_l \xrightarrow{g} 0 \\
(S2) & 0 \xleftarrow{f} x_1 \xrightarrow{g} y_1 \xleftarrow{f} x_2 \xrightarrow{g} \cdots \xleftarrow{f} x_l \xrightarrow{g} y_l \\
(S3) & y_0 \xleftarrow{f} x_1 \xrightarrow{g} y_1 \xleftarrow{f} x_2 \xrightarrow{g} \cdots \xleftarrow{f} x_l \xrightarrow{g} 0 \\
(S4) & y_0 \xleftarrow{f} x_1 \xrightarrow{g} y_1 \xleftarrow{f} x_2 \xrightarrow{g} \cdots \xleftarrow{f} x_{l-1} \xrightarrow{g} y_{l-1}
\end{array}
$$

ここで、(R) は正則鎖 (regular chain)、$(S1)$–$(S4)$ は特異鎖 (singular chain) で、正整数 l は鎖の長さである。特に、$V = W$, $g = i$ (恒等変換) の場合、クロネッカ基底はジョルダン基底に一致する。よく知られているように、ジョルダン基底は (R), $(S2)$ 型の鎖だけから構成される。V, W のクロネッカ基底に関する $f - \lambda g$ (λ は複素パラメータ) の表現行列を対 f, g のクロネッカ標準形という。

所与の線形写像の対 f, g に対するクロネッカ基底を決定する問題は制御理論をはじめとして種々の応用分野を持つ。たとえば、一般固有値問題 $(f - \lambda g)(x) = 0$ は、(R) 型の鎖に応じて固有値 $\lambda = \mu$、固有ベクトル $x = x_1$ を、$(S2)$ 型の鎖に応じて固有値 $\lambda = 0$、固有ベクトル $x = x_1$ を、また、$(S1)$ 型の鎖に応じて任意の $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して固有ベクトル $x = \sum_{j=1}^{l} \lambda^{j-1} x_j$ (多項式解) を持ち、逆にこれらで解が全て尽くされることを容易に確かめることができる。

線形写像の対に対するクロネッカ基底の存在は 19 世紀後半から知られている古典的な事実で、いくつかの証明が知られているが、いずれも非構成的、ないしは、構成的であっても演算量や数値精度や実装上の難点から、計算機を用いた数値計算のためのアルゴリズムの構築には適していなかった。これまでに開発された最も信頼のおけるクロネッカ標準形 (クロネッカ基底ではない) を計算するためのアルゴリズムは、数値線形代数プログラムライブラリ集として世界的に著名な LAPACK (Linear Algebra Package) でも採用された所謂 GUPTRI アルゴリズムである。GUPTRI アルゴリズムは理論面、実装面で世界最先端をいき、クロネッカ標準形を高速かつ高精度に計算するが、他方、クロネッカ基底自身を計算することはできない。この事情は、正方行列に対して、シューア標準形を求めるだけでは、固有値は決定できるが、固有ベクトルは決定できないことと似ている。正方行列をユニタリー行列で上三角行列に同値変形する問題と可逆行列でジョルダン標準形に同値変形する問題が別次元の問題であるのと同様に、線形写像の対 f, g のクロネッカ標準形を決定する問題とクロネッカ基底を決定する問題は別次元の問題である。後者はより豊富な幾何学的情報を含む。

本プロジェクトは以上の背景をベースに開始したプロジェクトで、任意に与えられた線形写像の対 f, g のクロネッカ基底を求めるアルゴリズムの構築を目的とした。これまでに

[1] 平成 20 年 4 月以降の所属は理工学研究科数理電子情報部門情報領域

以下の成果を上げた。

1. クロネッカ基底の存在に対して新たな構成的・幾何学的証明を与えた [1]。証明に従うと、計算機上で数値計算可能な実用的なアルゴリズムが得られる。証明のアイディアをまとめると以下のとおり。所与の線形写像の対 $f, g : V \longrightarrow W$ に対し、線形写像の対 $f', g' : V' \longrightarrow W'$ を以下のように定義する。

$$V' \equiv R(f) \cap R(g), \quad W' \equiv V/(N(f) + N(g)),$$
$$f' \equiv p_g \circ d_g^{-1} \circ i_g, \quad g' \equiv p_f \circ d_f^{-1} \circ i_f$$

ここで $h = f, g$ の各々に対し、$R(h)$, $N(h)$ は h の像および核、$i_h : V' \longrightarrow R(h)$ は包含写像、$d_h : V/N(h) \ni x + N(h) \mapsto y = h(x) \in R(h)$ $(x \in V)$ は自然な同型、また、$p_h : V/N(h) \ni x + N(h) \mapsto x + N(f) + N(g) \in W'$ $(x \in V)$ である。このとき、以下の 2 つを示すことができる。

(1) f', g' と f, g のクロネッカ基底の構造を比較すると、前者に含まれる特異鎖の長さが後者に含まれる特異鎖より 1 だけ短くなることを除くと、鎖の種類や個数を含めて両者は完全に一致する。(正則鎖は長さも一致する。) 特に、f, g のクロネッカ基底に含まれる長さ 1 の特異鎖は f', g' では消滅する。

(2) f', g' のクロネッカ基底が一つわかると、適切な連立 1 次方程式を解くことにより f, g のクロネッカ基底を構成できる。

f, g から f', g' を定義する手順を逐次的に繰り返して f, g から特異鎖を消滅させた正則な線形写像の対を生成し、そのクロネッカ基底 (ジョルダン基底) を元に (2) を再帰的に用いて f, g のクロネッカ基底を構成する。これが証明の基本的なアイディアである。

2. 1. の証明をベースに、一般固有値問題 $(f - \lambda g)(x) = 0$ の多項式解を含む全ての解を求めるためのアルゴリズムを構築し、実装後、数値実験によって有効性を検証した [2]。

3. 1. の証明をベースに、クロネッカ基底を求めるためのアルゴリズムを構築し、実装後、数値実験によって有効性を検証した [3]。

現在は、数値精度の向上を検討中で [4]、専門誌への投稿も準備している。

本研究は理工学研究科数理電子情報部門情報領域の橋口博樹講師、平岡和幸助教と共同で遂行した。

参考文献

[1] 平岡和幸, 重原孝臣, 「クロネッカー基底の存在に関する構成的証明」, 日本応用数理学会 2007 年度年会 講演予稿集, pp.58–59.

[2] 古岡佑也, Kyi Min Htut, 重原孝臣, 平岡和幸, 「特異な一般固有値問題に対する新たな解法の提案」, 日本応用数理学会 2007 年度年会 講演予稿集, pp.134–135.

[3] 柿沼芳昭, 平岡和幸, 橋口博樹, 重原孝臣, 「クロネッカ基底計算アルゴリズムの実装」, 第 37 回数値解析シンポジウム 講演予稿集, pp.1-4.

[4] 柿沼芳昭, 平岡和幸, 橋口博樹, 重原孝臣, 「クロネッカ基底計算アルゴリズムの計算精度について」, 日本応用数理学会 2008 年度年会 講演予稿集.