

上面加熱下面冷却される偏平回転だ円体状介在物を有する厚板の
定常熱応力*鄭 穎^{*1}, 土田 栄一郎^{*2}, 荒居 善雄^{*2}Thermal Stresses in a Thick Plate Containing an Oblate Spheroidal
Inhomogeneity with the Circle Regions of
both Plate Surfaces being Heated and CooledYing ZHENG, Eiichiro TSUCHIDA^{*3} and Yoshio ARAI^{*3} Department of Mechanical Engineering, Saitama University,
255 Shimo Ohkubo, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

In this paper, we investigate the steady state thermal stresses in an elastic thick plate containing an oblate spheroidal inhomogeneity, when the circle regions of radius d of the upper surface is heated and the one of lower surface is cooled. The solution is deduced with using thermoelastic displacement potential and Papkovitch-Neuber displacement potentials. Numerical results are presented for different heat areas, inclusion shapes and sizes, and the stress distributions in the vicinity of the inhomogeneity are illustrated graphically.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Micromechanics, Thick Plate, Oblate Spheroidal Inhomogeneity

1. はじめに

近年, 原子炉, ロケット, 宇宙船, 高速の航空機などの高出力, 高性能化によって, これらの機械や構造物は非常に苛酷な温度条件のもとにおいて使用されるようになった。これらの構成部材の厚板に空か, 介在物が存在するとき, 厚板の強度を明らかにすることは重要である。

熱応力問題では, 1966年渥美らにより, 1球かを有する厚板の定常熱応力問題⁽¹⁾が解析され, 回転だ円体状空かあるいは介在物を有する無限体の定常熱応力問題についてはEdwards⁽²⁾およびHussaini⁽³⁾により解析されており, 牟岐⁽⁴⁾による回転だ円体の熱応力に関する研究もある。さらにDasおよびShailは円形き裂を有する円柱⁽⁵⁾ならびに厚板⁽⁶⁾の熱応力問題を解析した。土田らは1982年偏平回転だ円体状空かを有する厚板⁽⁷⁾, さらに1997年偏長回転だ円体状介在物を有する厚板の定常熱応力⁽⁸⁾について解析した。

本研究は, 厚板内に偏平回転だ円体状介在物が存在

し, 厚板上下面の一定円形領域がそれぞれ部分的に加熱, 冷却される場合の定常熱応力問題について三次元熱弾性理論に基づいて厳密に解析したものである。解析においては, 熱弾性変位ポテンシャルとPapkovitch-Neuberの変位関数を用いた。そして理論解に基づいて数値計算を行い, 温度分布を示すとともに介在物近傍の応力分布に及ぼす加熱域の大きさ, 熱伝導率比, 線膨張係数比, 介在物の大きさ, 形状比および剛性率比による影響を明らかにした。

2. 解析方法

2.1 温度分布および熱弾性変位ポテンシャル

図1に示されるように, 板厚の半分を単位長さとしてすべての長さの基準にとり, 偏平回転だ円体状介在物の長軸, 短軸の長さおよび焦点間距離をそれぞれ $2a$, $2b$, $2c$ とし, 母材および介在物の横弾性係数をそれぞれ G , \bar{G} , また, ポアソン比を ν , $\bar{\nu}$ とする。厚板上下面の一部の円領域(半径 d)がおのおのの温度 $\pm T_0$ に加熱され, 外部温度領域は温度零(すなわち基準温度)であるものとする。

O を座標原点として, 円柱座標 (r, θ, z) と偏平回転だ円体座標 (α, β, γ) を用いれば両座標の間には次のような関係がある。

* 原稿受付 2003年8月18日。

^{*1} 学生員, 埼玉大学大学院理工学研究科。^{*2} 正員, 埼玉大学工学部機械工学科(☎338-8570 さいたま市桜区下大久保255)。

E-mail: tsuchida@mech.saitama-u.ac.jp

$$r=c\bar{\xi}\bar{\eta}, \quad \theta=\gamma, \quad z=c\xi\eta \dots\dots\dots (1)$$

ここで $\xi=\sinh \alpha$, $\bar{\xi}=\cosh \alpha$, $\eta=\cos \beta$, $\bar{\eta}=\sin \beta$ である。

まず、本問題の温度分布を求める。定常温度場であるので熱伝導方程式は $\nabla^2 T = \nabla^2 \bar{T} = 0$, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ になり、また、温度条件は次のようになる。

(i) 厚板上下面 $z=\pm 1$ (加熱領域) において

$$(T)_{z=\pm 1} = \begin{cases} \pm T_0 & (r < d) \\ 0 & (r > d) \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

(ii) 介在物境界面で温度、熱流が連続であるから、 $\alpha=a_0$ において

$$(T)_{\alpha=a_0} = (\bar{T})_{\alpha=a_0}, \quad k \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=a_0} = \bar{k} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=a_0} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 k は熱伝導率である。また、“-”のついた記号は介在物に関する諸量を示す。

これらの温度条件を満足する解を求めるために、以下に示す温度関数を与える：

$$\begin{aligned} T = & T_0 d \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda d)}{\sinh \lambda} J_0(\lambda r) \sinh(\lambda z) d\lambda \\ & + T_0 \sum_{m=0}^\infty F_m q_{2m+1}(\xi) P_{2m+1}(\eta) \\ & + T_0 \int_0^\infty \varphi(\lambda) J_0(\lambda r) \sinh(\lambda z) d\lambda \quad (\alpha > a_0) \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

$$\bar{T} = T_0 \sum_{n=0}^\infty \bar{F}_n p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \quad (\alpha < a_0) \dots\dots (5)$$

ここで、 F_m , \bar{F}_n , $\varphi(\lambda)$ は、境界条件より決定される未定係数および未知関数である。 $P_n(\eta)$ は n 次の第一種ルジャンドル関数であり、 $p_n(\xi)$, $q_n(\xi)$ は n 次の第一種および第二種変形ルジャンドル関数であり

$$q_n(\xi) = i^{n+1} Q_n(i\xi), \quad p_n(\xi) = (-i)^n P_n(i\xi) \dots\dots (6)$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$ で、 $Q_n(i\xi)$ は n 次の第二種ルジャン

ドル関数である。式(4)の第1項は、牟岐によって与えられたものであり⁽⁴⁾、上述の温度条件式(2)を満足する。また、 T , \bar{T} は調和関数である。

まず、厚板上下面における温度条件式(2)を満足させるために、次の偏平回転円体調和関数と円柱調和関数との関係式を用いる。

$$q_n(\xi) P_n(\eta) = c \int_0^\infty J_0(\lambda r) j_n(\lambda c) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (z > 0)$$

$$\begin{aligned} q_n(\xi) P_n(\eta) = & (-1)^n c \int_0^\infty J_0(\lambda r) j_n(\lambda c) e^{\lambda z} d\lambda \\ & (z < 0) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで、 $j_n(\lambda c)$ は n 次の球ベッセル関数である。この関係式を用いて、式(4)を円柱座標で表し、式(2)の条件を満足させると未知関数 $\varphi(\lambda)$ は以下のように求められる。

$$\varphi(\lambda) = - \sum_{m=0}^\infty c F_m j_{2m+1}(\lambda c) \frac{2}{e^{2\lambda} - 1} \dots\dots\dots (8)$$

次に、介在物境界面の温度条件(ii)を満足させるために円柱調和関数と偏平回転円体調和関数との関係式：

$$\begin{aligned} J_0(\lambda r) \cosh(\lambda z) = & \sum_{n=0}^\infty (4n+1) j_{2n}(\lambda c) p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \\ J_0(\lambda r) \sinh(\lambda z) = & \sum_{n=0}^\infty (4n+3) j_{2n+1}(\lambda c) \\ & \times p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

を用いる。介在物境界面の温度条件(ii)を満足させると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} k \sum_{n=0}^\infty \{ F_n q_{2n+1}(\xi_0) + (4n+3)(\kappa_n + \delta_n) p_{2n+1}(\xi_0) \} \\ \times \bar{\xi}_0 P_{2n+1}(\eta) = \bar{k} \sum_{n=0}^\infty \bar{F}_n p_{2n+1}(\xi_0) \bar{\xi}_0 P_{2n+1}(\eta) \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty \{ F_n q_{2n+1}(\xi_0) + (4n+3)(\kappa_n + \delta_n) p_{2n+1}(\xi_0) \} \\ \times P_{2n+1}(\eta) = \sum_{n=0}^\infty \bar{F}_n p_{2n+1} P_{2n+1}(\eta) \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここで、 δ_n , κ_n は、

$$\begin{aligned} \delta_n = & d \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda d)}{\sinh \lambda} j_{2n+1}(\lambda c) d\lambda \\ \kappa_n = & - \sum_{m=0}^\infty 2c F_m \int_0^\infty \frac{j_{2n+1}(\lambda c) j_{2m+1}(\lambda c)}{e^{2\lambda} - 1} d\lambda \dots\dots (12) \end{aligned}$$

式(10), (11)より F_n , \bar{F}_n に関する無限連立一次方程式が得られる。これを解くことにより未定係数 F_n , \bar{F}_n が求められ、本問題に対する温度分布は完全に求まる。

次に、温度関数に対する熱弾性基礎方程式の特解を求める。

$$\nabla^2 \Omega = T, \quad \nabla^2 \bar{\Omega} = \bar{T} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 Ω , $\bar{\Omega}$ は母材および介在物に対する熱弾性変位ポテンシャルである。

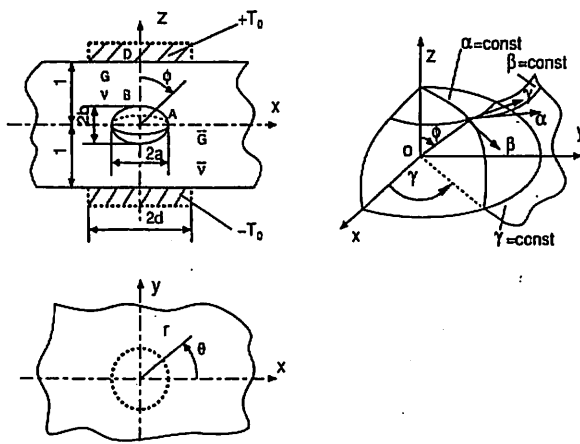


Fig. 1 Coordinate system

式(4), (5)の T , \bar{T} に対して以下のような熱弾性変位ポテンシャルを与える。

円柱座標表示：

$$\begin{aligned} \Omega = T_0 d \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda d)}{2\lambda \sinh \lambda} J_0(\lambda r) z \cosh(\lambda z) d\lambda - T_0 \sum_{m=0}^\infty \frac{c F_m}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} j_{2m+1}(\lambda c) J_0(\lambda r) z e^{\mp \lambda z} d\lambda \\ + T_0 \int_0^\infty \frac{\varphi(\lambda)}{2\lambda} J_0(\lambda r) z \cosh(\lambda z) d\lambda \quad \left(\begin{array}{l} z < 0 \\ z > 0 \end{array} \right) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

偏平回転円体座標表示：

$$\begin{aligned} \Omega = \sum_{n=0}^\infty \frac{c^2 T_0 d}{2} (\delta_n + \delta_{n-1}) \xi \eta p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) - \sum_{n=0}^\infty \frac{c^2 T_0 F_n \xi \eta}{2(4n+3)} \{q_{2n+2}(\xi) P_{2n+2}(\eta) + q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta)\} \\ + \sum_{n=0}^\infty \frac{c^2 T_0}{2} (\kappa_n + \kappa_{n-1}) \xi \eta p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \dots\dots\dots (15) \\ \bar{\Omega} = - \sum_{n=0}^\infty \frac{c^2 T_0 \bar{F}_n \xi \eta}{2(4n+3)} \{p_{2n+2}(\xi) P_{2n+2}(\eta) + p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta)\} \end{aligned}$$

ここで、 $\nabla^4 \Omega = \nabla^4 \bar{\Omega} = 0$ である。

上記の熱弾性変位ポテンシャルと温度関数より得られる変位、応力は、厚板表面における応力自由の条件 $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$ および介在物境界面の境界条件 $u_a = \bar{u}_a$, $u_\theta = \bar{u}_\theta$, $\sigma_a = \bar{\sigma}_a$, $\tau_{a\theta} = \bar{\tau}_{a\theta}$ を満たさない。そこで、Papkovitch-Neuber の変位関数を用いて、境界条件を満たすことにする。

2・2 変位関数解 ねじりのない軸対称問題に対する Papkovitch-Neuber の変位関数を用いて変位を次のように表せば、これは三次元弾性基礎方程式の解となる。

$$2Gu_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_0 + z\varphi_3), \quad 2Gu_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\varphi_0 + z\varphi_3), \quad 2Gu_z = \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_0 + z\varphi_3) - (3-4\nu)\varphi_3 \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 (u_r, u_θ, u_z) はそれぞれ r, θ, z 方向の変位成分であり、 G は横弾性係数、 ν はポアソン比である。

変位関数が満足すべき境界条件は母材と介在物が完全密着している場合には以下のように書ける。

(i) 厚板上下面 $z = \pm 1$ において

$$\pm \left(\frac{\sigma_z}{E\epsilon T_0} \right)_{z=\pm 1} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\sum_{m=0}^\infty c F_m \int_0^\infty \lambda j_{2m+1}(\lambda c) J_0(\lambda r) e^{-\lambda} d\lambda - \int_0^\infty \lambda \left\{ \varphi(\lambda) + \frac{dJ_1(\lambda d)}{\sinh \lambda} \right\} J_0(\lambda r) \cosh \lambda d\lambda \right] \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{rz}}{E\epsilon T_0} \right)_{z=\pm 1} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\sum_{m=0}^\infty c F_m \int_0^\infty (\lambda-1) j_{2m+1}(\lambda c) J_1(\lambda r) e^{-\lambda} d\lambda \right. \\ \left. + \int_0^\infty \left\{ \varphi(\lambda) + \frac{dJ_1(\lambda d)}{\sinh \lambda} \right\} J_1(\lambda r) (\cosh \lambda + \lambda \sinh \lambda) d\lambda \right] \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

(ii) 介在物境界面 $a = a_0$ において

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Gu_a}{E\epsilon T_0 h \xi} \right)_{a=a_0} - \left(\frac{2G\bar{u}_a}{E\epsilon T_0 h \xi} \right)_{a=a_0} = u_a^* = \frac{c^2}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{k_{F1}}{4n-1} F_{n-1} + \frac{k_{F2}}{4n+3} F_n + \frac{k_{F3}}{4n+7} F_{n+1} \right. \\ \left. + k_{\kappa 1}(\kappa_{n-1} + \delta_{n-1}) + k_{\kappa 2}(\kappa_n + \delta_n) + k_{\kappa 3}(\kappa_{n+1} + \delta_{n+1}) \right\} P_{2n+1}(\eta) \\ - \frac{(1+\bar{\nu})\epsilon_0 c^2}{2(1-\bar{\nu})(1+\bar{\nu})} \sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{k_{\bar{F}1}}{4n-1} \bar{F}_{n-1} + \frac{k_{\bar{F}2}}{4n+3} \bar{F}_n + \frac{k_{\bar{F}3}}{4n+7} \bar{F}_{n+1} \right\} P_{2n+1}(\eta) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Gu_\theta}{E\epsilon T_0 h \bar{\eta}} \right)_{a=a_0} - \left(\frac{2G\bar{u}_\theta}{E\epsilon T_0 h \bar{\eta}} \right)_{a=a_0} = u_\theta^* = - \frac{c^2}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{l_{F1}}{4n-1} F_{n-1} + \frac{l_{F2}}{4n+3} F_n + \frac{l_{F3}}{4n+7} F_{n+1} \right. \\ \left. + l_{\kappa 1}(\kappa_{n-1} + \delta_{n-1}) + l_{\kappa 2}(\kappa_n + \delta_n) + l_{\kappa 3}(\kappa_{n+1} + \delta_{n+1}) \right\} P'_{2n+1}(\eta) \\ + \frac{(1+\bar{\nu})\epsilon_0 c^2}{2(1-\bar{\nu})(1+\bar{\nu})} \sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{l_{\bar{F}1}}{4n-1} \bar{F}_{n-1} + \frac{l_{\bar{F}2}}{4n+3} \bar{F}_n + \frac{l_{\bar{F}3}}{4n+7} \bar{F}_{n+1} \right\} P'_{2n+1}(\eta) \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_a}{E\epsilon T_0 c^2 h^4} \right)_{a=a_0} - \left(\frac{\bar{\sigma}_a}{E\epsilon T_0 c^2 h^4} \right)_{a=a_0} = \sigma_a^* = \frac{c^2}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{S_{F1}}{4n-5} F_{n-2} + \frac{S_{F2}}{4n-1} F_{n-1} + \frac{S_{F3}}{4n+3} F_n \right. \\ \left. + \frac{S_{F4}}{4n+7} F_{n+1} + \frac{S_{F5}}{4n+11} F_{n+2} + S_{\kappa 1}(\kappa_{n-2} + \delta_{n-2}) + S_{\kappa 2}(\kappa_{n-1} + \delta_{n-1}) + S_{\kappa 3}(\kappa_n + \delta_n) + S_{\kappa 4}(\kappa_{n+1} + \delta_{n+1}) \right. \\ \left. + S_{\kappa 5}(\kappa_{n+2} + \delta_{n+2}) \right\} P_{2n+1}(\eta) - \frac{(1+\bar{\nu})\epsilon_0 c^2 \Gamma}{2(1-\bar{\nu})(1+\bar{\nu})} \sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{S_{\bar{F}1}}{4n-5} \bar{F}_{n-2} + \frac{S_{\bar{F}2}}{4n-1} \bar{F}_{n-1} + \frac{S_{\bar{F}3}}{4n+3} \bar{F}_n \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{S_{k4}}{4n+7}\bar{F}_{n+1}+\frac{S_{k5}}{4n+11}\bar{F}_{n+2}\}P_{2n+1}(\eta)\cdots\cdots\cdots(21)$$

$$\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{E\epsilon T_0 c^2 h^4}\right)_{a=a_0}-\left(\frac{\bar{\tau}_{\alpha\beta}}{E\epsilon T_0 c^2 h^4}\right)_{a=a_0}=\tau_{\alpha\beta}^*=-\frac{c^2}{2(1-\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{t_{F1}}{4n-5}F_{n-2}+\frac{t_{F2}}{4n-1}F_{n-1}+\frac{t_{F3}}{4n+3}F_n\right. \\ +\frac{t_{F4}}{4n+7}F_{n+1}+\frac{t_{F5}}{4n+11}F_{n+2}+t_{k1}(\kappa_{n-2}+\delta_{n-2})+t_{k2}(\kappa_{n-1}+\delta_{n-1})+t_{k3}(\kappa_n+\delta_n)+t_{k4}(\kappa_{n+1}+\delta_{n+1}) \\ \left.+t_{k5}(\kappa_{n+2}+\delta_{n+2})\right\}P_{2n+1}(\eta)+\frac{(1+\nu)\epsilon_0 c^2 \Gamma}{2(1-\nu)(1+\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{t_{k1}}{4n-5}\bar{F}_{n-2}+\frac{t_{k2}}{4n-1}\bar{F}_{n-1}+\frac{t_{k3}}{4n+3}\bar{F}_n\right. \\ \left.+\frac{t_{k4}}{4n+7}\bar{F}_{n+1}+\frac{t_{k5}}{4n+11}\bar{F}_{n+2}\right\}P_{2n+1}(\eta)\cdots\cdots\cdots(22)$$

(iii) 無限遠方において、すべての応力が零になる。

ここで、“’”はそれぞれの変数による微分を表す。 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比、 ϵ は線膨張係数、 $\epsilon_0=\bar{\epsilon}/\epsilon$ は線膨張係数比、 $\Gamma=\bar{G}/G$ は、介在物と母体の剛性率比を表し、 $\Gamma=0$ は空かを、 $\Gamma=\infty$ は剛体介在物を表す。

式(19)～(22)中の k_{Fi} 、 $k_{\epsilon i}$ 、 l_{Fi} 、 $l_{\epsilon i}$ 、 S_{Fi} 、 $S_{\epsilon i}$ 、 t_{Fi} 、 $t_{\epsilon i}$ ($i=1\sim 3$, $l=1\sim 5$)の一例を以下に示す。

$$k_{F1}=\frac{2n+1}{4n+1}\{q_{2n}(\xi_0)+\xi_0 q'_{2n}(\xi_0)\}\cdots\cdots\cdots(23)$$

ここで、 $\xi_0=\sinh \alpha_0$ 、 $\bar{\xi}_0=\cosh \alpha_0$ である。

境界条件(i)，(ii)，(iii)を満足する解を導くために、Papkovitch-Neuberの変位関数 φ_0 、 φ_3 に次のような調和関数を与える。

母材領域($\alpha > \alpha_0$)において

$$[I]\begin{cases} \varphi_0=E\epsilon T_0\sum_{m=0}^{\infty}A_m q_{2m+1}(\xi)P_{2m+1}(\eta) \\ \varphi_3=E\epsilon T_0\sum_{m=0}^{\infty}B_m q_{2m}(\xi)P_{2m}(\eta) \end{cases}\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$[II]\begin{cases} \varphi_0=E\epsilon T_0\int_0^{\infty}\psi_1(\lambda)J_0(\lambda r)\sinh(\lambda z)d\lambda \\ \varphi_3=E\epsilon T_0\int_0^{\infty}\lambda\psi_2(\lambda)J_0(\lambda r)\cosh(\lambda z)d\lambda \end{cases}\cdots\cdots\cdots(25)$$

介在物領域($\alpha < \alpha_0$)において

$$[III]\begin{cases} \varphi_0=E\epsilon T_0\sum_{n=0}^{\infty}\bar{A}_n p_{2n+1}(\xi)P_{2n+1}(\eta) \\ \varphi_3=E\epsilon T_0\sum_{n=1}^{\infty}\bar{B}_n p_{2n}(\xi)P_{2n}(\eta) \end{cases}\cdots\cdots\cdots(26)$$

ここで A_m 、 B_m 、 \bar{A}_n 、 \bar{B}_n 、 $\psi_1(\lambda)$ 、 $\psi_2(\lambda)$ は境界条件により決定される未定係数および未知関数である。

まず、厚板上下面における境界条件(i)を満足させるために、偏平回転円体調和関数と円柱調和関数との関係式(7)を用い、変位関数[I]をベッセル関数を含む積分形で表すと

$$[I^*]\begin{cases} \varphi_0=E\epsilon T_0\sum_{m=0}^{\infty}A_m\int_0^{\infty}J_0(\lambda r)j_{2m+1}(\lambda c)e^{-\lambda z}d\lambda \\ \varphi_3=E\epsilon T_0\sum_{m=0}^{\infty}B_m\int_0^{\infty}J_0(\lambda r)j_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda z}d\lambda \end{cases}\cdots\cdots\cdots(27)$$

となる。

変位関数[I*]と[II]から応力各成分を求める厚板上面の境界条件(i)を満足させ、また、 $z < 0$ についても同様に厚板下面の境界条件を満足させると

$$\pm\left(\frac{\sigma_z}{E\epsilon T_0}\right)_{z=\pm 1}=\int_0^{\infty}\lambda^2 J_0(\lambda r)\left[\psi_1(\lambda)\sinh\lambda+\psi_2(\lambda)\{\lambda\cosh\lambda-2(1-\nu)\sinh\lambda\}\right. \\ \left.+\sum_{m=0}^{\infty}c\left\{A_m j_{2m+1}(\lambda c)+\frac{1}{\lambda}B_m(\lambda+2-2\nu)j_{2m}(\lambda c)\right\}e^{-\lambda}\right]d\lambda \\ =\frac{1}{2(1-\nu)}\left[\sum_{m=0}^{\infty}cF_m\int_0^{\infty}\lambda j_{2m+1}(\lambda c)J_0(\lambda r)e^{-\lambda}d\lambda+\int_0^{\infty}\lambda\left\{\varphi(\lambda)+\frac{dJ_1(\lambda d)}{\sinh\lambda}\right\}J_0(\lambda r)\cosh\lambda d\lambda\right]\cdots\cdots\cdots(28) \\ \left(\frac{\tau_{rz}}{E\epsilon T_0}\right)_{z=\pm 1}=\int_0^{\infty}\lambda^2 J_1(\lambda r)\left[-\psi_1(\lambda)\cosh\lambda+\psi_2(\lambda)\{(1-2\nu)\cosh\lambda-\lambda\sinh\lambda\}\right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{\infty} c \left\{ A_{mj_{2m+1}}(\lambda c) + \frac{1}{\lambda} B_m(\lambda + 1 - 2\nu) j_{2m}(\lambda c) \right\} e^{-\lambda} d\lambda \\
& = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} c F_m \int_0^{\infty} (\lambda - 1) j_{2m+1}(\lambda c) J_1(\lambda r) e^{-\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} \left\{ \varphi(\lambda) + \frac{dJ_1(\lambda d)}{\sinh \lambda} \right\} J_1(\lambda r) (\cosh \lambda + \lambda \sinh \lambda) d\lambda \right]
\end{aligned} \quad (29)$$

となる。

式(28), (29)にそれぞれハンケルの逆変換を施し, 未知関数 $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
\psi_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} c \left\{ A_{mj_{2m+1}}(\lambda c) f_1(\lambda) + B_{mj_{2m}}(\lambda c) f_2(\lambda) + \frac{1}{1-\nu} F_{mj_{2m+1}}(\lambda) g_1(\lambda) \right\} - \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \varphi(\lambda) + \frac{dJ_1(\lambda d)}{\sinh \lambda} \right\} \\
\psi_2(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} c \left\{ A_{mj_{2m+1}}(\lambda c) f_3(\lambda) + B_{mj_{2m}}(\lambda c) f_4(\lambda) + \frac{1}{2(1-\nu)} F_{mj_{2m+1}}(\lambda) g_2(\lambda) \right\} - \frac{1}{2(1-\nu)\lambda^2} \left\{ \varphi(\lambda) + \frac{dJ_1(\lambda d)}{\sinh \lambda} \right\}
\end{aligned} \quad (30)$$

ここで

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda) &= \frac{3-4\nu-2\lambda-e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda-2\lambda}, \quad f_2(\lambda) = \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2}{\lambda(\sinh 2\lambda-2\lambda)}, \quad f_3(\lambda) = \frac{2}{\sinh 2\lambda-2\lambda}, \quad f_4(\lambda) = \frac{3-4\nu+2\lambda+e^{-2\lambda}}{\lambda(\sinh 2\lambda-2\lambda)} \\
g_1(\lambda) &= \frac{(1-\nu)(1-2\lambda-e^{-2\lambda})+\lambda^2}{\lambda^2(\sinh 2\lambda-2\lambda)}, \quad g_2(\lambda) = \frac{1-2\lambda-e^{-2\lambda}}{\lambda^2(\sinh 2\lambda-2\lambda)}
\end{aligned} \quad (31)$$

である。

次に介在物境界面における境界条件(ii)を満足させるために, 円柱調和関数と偏平回転円柱調和関数との関係式(9)を用いて, 変位関数[II]を書き改めると

$$[\text{II}^*] \begin{cases} \varphi_0 = E\varepsilon T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p_{2n+1}(\xi) P_{2n+1}(\eta) \\ \varphi_3 = E\varepsilon T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n p_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta) \end{cases} \quad (32)$$

となる。

ここで

$$\alpha_n = (4n+3) \int_0^{\infty} \psi_1(\lambda) j_{2n+1}(\lambda c) d\lambda, \quad \beta_n = (4n+1) \int_0^{\infty} \lambda \psi_2(\lambda) j_{2n}(\lambda c) d\lambda \quad (33)$$

である。

そこで, 変位関数[I], [II*], [III]より変位と応力成分を求め, さらに式(19)~(22)の境界条件を満足させると, 次のようになる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[k_{A1} A_n + k_{B1} B_n + k_{B2} B_{n+1} + k_{a1} \alpha_n + k_{\beta 1} \beta_n + k_{\beta 2} \beta_{n+1} - \frac{1}{r} (\bar{k}_{A1} \bar{A}_n + \bar{k}_{B1} \bar{B}_n + \bar{k}_{B2} \bar{B}_{n+1}) \right] P_{2n+1}(\eta) = u_a^* \quad (34)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[l_{A1} A_n + l_{B1} B_n + l_{B2} \bar{B}_{n+1} + l_{a1} \alpha_n + l_{\beta 1} \beta_n + l_{\beta 2} \beta_{n+1} - \frac{1}{r} (\bar{l}_{A1} \bar{A}_n + \bar{l}_{B1} \bar{B}_n + \bar{l}_{B2} \bar{B}_{n+1}) \right] P_{2n+1}(\eta) = u_{\beta}^* \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} [s_{A1} A_{n-1} + s_{A2} A_n + s_{A3} A_{n+1} + s_{B1} B_{n-1} + s_{B2} B_n + s_{B3} B_{n+1} + s_{B4} B_{n+2} + s_{a1} \alpha_{n-1} + s_{a2} \alpha_n + s_{a3} \alpha_{n+1} \\
& + s_{\beta 1} \beta_{n-1} + s_{\beta 2} \beta_n + s_{\beta 3} \beta_{n+1} + s_{\beta 4} \beta_{n+2} - (\bar{s}_{A1} \bar{A}_{n-1} + \bar{s}_{A2} \bar{A}_n + \bar{s}_{A3} \bar{A}_{n+1} + \bar{s}_{B1} \bar{B}_{n-1} + \bar{s}_{B2} \bar{B}_n \\
& + \bar{s}_{B3} \bar{B}_{n+1} + \bar{s}_{B4} \bar{B}_{n+2})] P_{2n+1}(\eta) = \sigma_a^* \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} [t_{A1} A_{n-1} + t_{A2} A_n + t_{A3} A_{n+1} + t_{B1} B_{n-1} + t_{B2} B_n + t_{B3} B_{n+1} + t_{B4} B_{n+2} + t_{a1} \alpha_{n-1} + t_{a2} \alpha_n \\
& + t_{a3} \alpha_{n+1} + t_{\beta 1} \beta_{n-1} + t_{\beta 2} \beta_n + t_{\beta 3} \beta_{n+1} + t_{\beta 4} \beta_{n+2} - (\bar{t}_{A1} \bar{A}_{n-1} + \bar{t}_{A2} \bar{A}_n + \bar{t}_{A3} \bar{A}_{n+1} + \bar{t}_{B1} \bar{B}_{n-1} \\
& + \bar{t}_{B2} \bar{B}_n + \bar{t}_{B3} \bar{B}_{n+1} + \bar{t}_{B4} \bar{B}_{n+2})] P_{2n+1}(\eta) = \tau_{a\beta}^* \quad (37)
\end{aligned}$$

ここで

$$t_{A1} = -\frac{4n(n-1)}{(4n+1)(4n-1)} q'_{2n-1}(\xi_0) \quad (38)$$

(その他は省略)

となる。

また, k_{a1} , $k_{\beta 1}$, $k_{\beta 2}$, l_{a1} , $l_{\beta 1}$, $l_{\beta 2}$, s_{ai} , $s_{\beta j}$, t_{ai} , $t_{\beta j}$ ($i=1\sim 3$, $j=1\sim 4$) はそれぞれ k_{A1} , k_{B1} , k_{B2} , l_{A1} , l_{B1} , l_{B2} , s_{A1} , s_{B1} , t_{A1} , t_{B1} に含まれる第二種変形ルジャンドル関数 $q_n(\xi_0)$ を第一種ルジャンドル関数 $p_n(\xi_0)$ に置き換えたものである。同様に \bar{k}_{a1} , $\bar{k}_{\beta 1}$, $\bar{k}_{\beta 2}$, \bar{l}_{a1} , $\bar{l}_{\beta 1}$,

$\bar{l}_{\beta 2}, \bar{s}_{\alpha i}, \bar{s}_{\beta j}, \bar{t}_{\alpha i}, \bar{t}_{\beta h} (i=1\sim 3, j=1\sim 4)$ も $q_n(\xi_0)$ を $p_n(\xi_0)$ に置き換え、 ν を $\bar{\nu}$ に置き換えたものである。

さらに、 $k_{Fi}, k_{Et}, l_{Fi}, l_{Ei}, s_{Fi}, s_{Et}, t_{Fi}, t_{Et} (i=1\sim 3, l=1\sim 5)$ は前述したとおりのものである。

式(34)～(37)において係数 $F_n, \bar{F}_n, \delta_n, \kappa_n$ は温度条件より既知である。式(34)～(37)をそれぞれ、 $P_{2n+1}(\eta), P'_{2n+1}(\eta)$ の各係数を等値すれば、 $A_n, B_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ に関する無限連立一次方程式が得られる。これらを $A_n, B_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ について解けば、本問題の解は、完全に求められる。

3. 数 値 計 算

母材と介在物のポアソン比を $\nu=\bar{\nu}=0.3$ として、

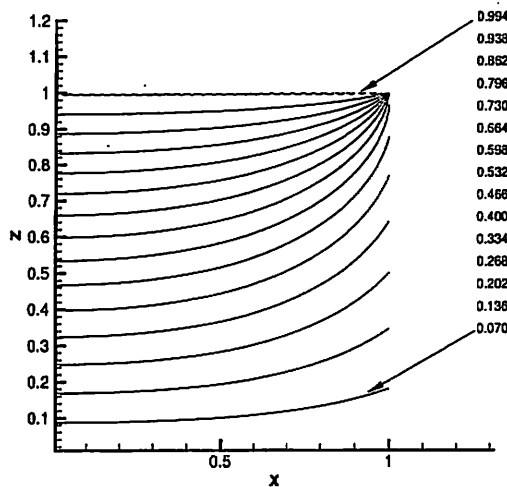


Fig. 2 Variation of temperature T/T_0 and \bar{T}/T_0 for $d=1.0, k/k=1.0$

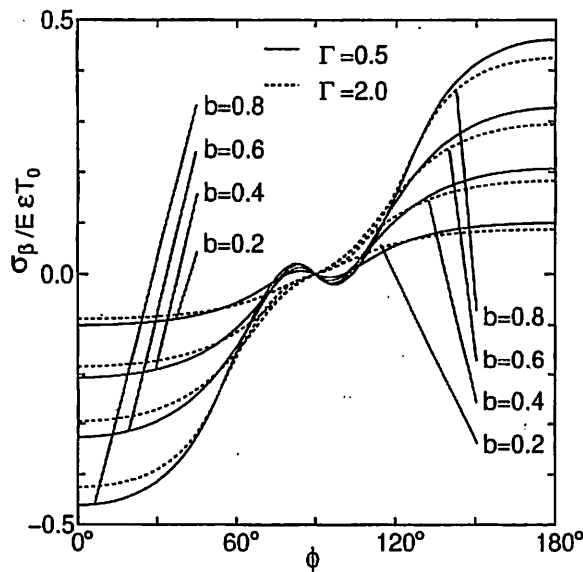


Fig. 3 Variation of stress σ_β with ϕ at the interface for $\bar{s}=0.5, \bar{k}/k=1.0, d=1.0, \epsilon_0=0.5$

形状比 $\bar{s}=b/a=0.5$ 、加熱領域の大きさを $d=0.5, 1.0, 2.0$ として、熱伝導率 $\bar{k}/k=0.5, 1.0, 2.0$ 、偏平回転だ円体状介在物の半短軸 $b=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ にした。介在物が熱膨張しにくい場合および熱膨張しやすい場合の代表として、線膨張係数比 ϵ_0 にそれぞれ $0.5, 2.0$ を、介在物が軟らかい場合および硬い場合の代表として、横弾性係数比 Γ にそれぞれ $0.5, 2.0$ の各場合について計算を行った。さらに \bar{s} をいくつか変えて計算した。

まず、温度分布の計算では、式(12)に含まれる δ_n, κ_n に関する積分値が必要になる。これらの値は、シンプソン則を用いて数値積分で求めた。

図2は、加熱域の大きさ $d=1.0$ に対して、熱伝導率を $\bar{k}/k=1.0$ の場合を $0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ の温度分布を示したものである。 $z=0$ で $T=0$ となり、 $z=1.0$ ($0 \leq x \leq 1$) で最大値 $T=T_0$ となる。

介在物境界面では β の代わりに球座標の ϕ を用いた。介在物境界面においては、 ϕ は β と $\tan \phi = a/b \tan \beta$ の関係がある。

次に、熱応力計算に関しても、式(33)で示される α_n, β_n 中の積分値が必要となるが、これはシンプソン則によって数値積分を行って求めた。数値計算の結果によって、以下に応力分布を示した。境界面上の $\sigma_\beta, \sigma_r, \bar{\sigma}_\beta, \bar{\sigma}_r$ の分布は $\phi=90^\circ$ に対して逆対称であり、 $\tau_{\alpha\beta}, \bar{\tau}_{\alpha\beta}$ は対称となっている。以下は加熱される板の上半分について圧縮応力に注目して考察する。板の下半分は逆に引張応力となる。

図3、4は、形状比 $\bar{s}=0.5$ 、加熱域の大きさ $d=$

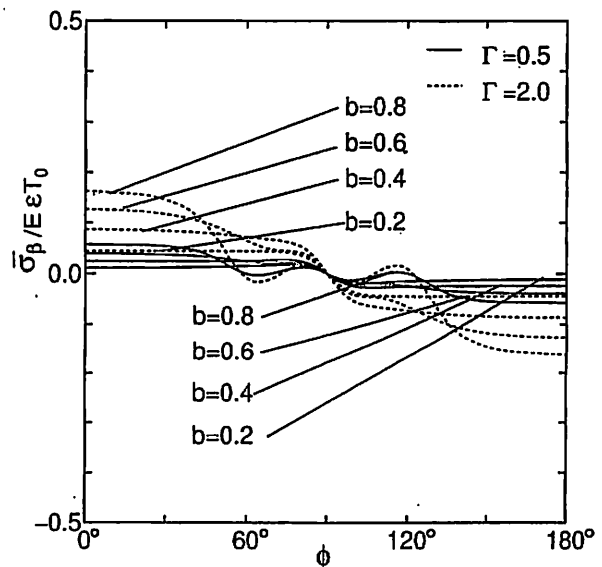


Fig. 4 Variation of stress $\bar{\sigma}_\beta$ with ϕ at the interface for $\bar{s}=0.5, \bar{k}/k=1.0, d=1.0, \epsilon_0=0.5$

1.0, 熱伝導率 $\bar{k}/k=1.0$, 線膨張係数比 $\varepsilon_0=0.5$ としたときの介在物境界面における母材の応力分布 σ_θ および介在物側の $\bar{\sigma}_\theta$ を示したものである。

図3は母材側における σ_θ の分布を示したものである。介在物が軟らかい場合, σ_θ は $\varphi=0^\circ$ で圧縮応力の極大値をとり, $\varphi=80^\circ$ 付近で圧縮応力から引張応力へ変化する。介在物の大きさが大きいほど, すなわち介在物が自由平面に近づくほど, 応力は大きくなる。介在物が硬い場合, 板の上半分の σ_θ は常に圧縮応力を示す。介在物の大きさが大きいほど応力は大きくなる。

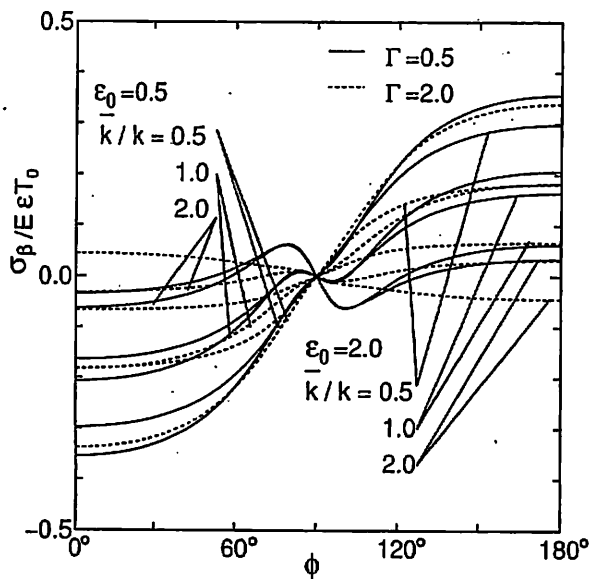


Fig. 5 Variation of stress σ_θ with φ at the interface for $\bar{s}=b/a=0.5$, $d=1.0$, $b=0.4$

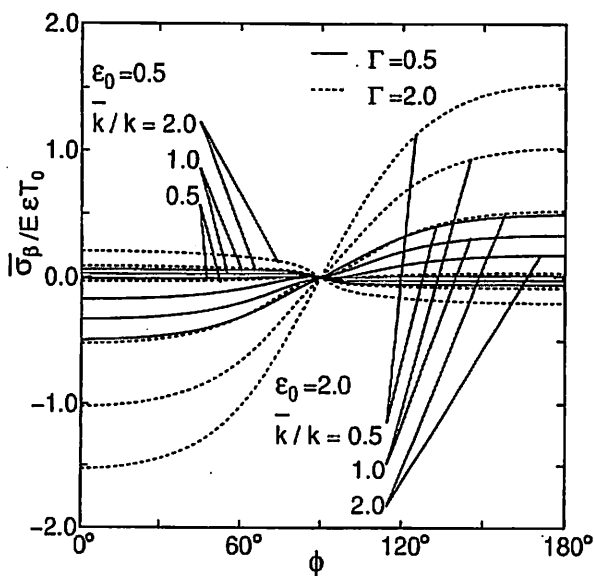


Fig. 6 Variation of stress $\bar{\sigma}_\theta$ with φ at the interface for $\bar{s}=b/a=0.5$, $d=1.0$, $b=0.4$

る。

図4は介在物側における $\bar{\sigma}_\theta$ の分布を示したものである。介在物が軟らかいおよび硬い場合, 板の上半分の $\bar{\sigma}_\theta$ はほぼ引張応力を示す。ただし, $b=0.8$ としたときに $\varphi=55^\circ$ 付近で引張応力から圧縮応力へ変化する。

図5, 6は, 形状比 $\bar{s}=0.5$, 加熱域の大きさ $d=1.0$, 介在物の短半軸 $b=0.4$ を一定として, 熱伝導率比 \bar{k}/k および線膨張係数比 ε_0 による介在物境界面における母材側の σ_θ および介在物側の $\bar{\sigma}_\theta$ に及ぼす影響をそれぞれ示したものである。

図5は母材側における σ_θ の分布を示したものである。熱伝導率比 \bar{k}/k が大きくなると板の上半分における圧縮応力は減少し ($\varphi=80^\circ$ 近傍の引張応力は大きくなる), 板の下半分における引張応力は減少する。特に, 介在物が硬い場合 ($\Gamma=2.0$, $\varepsilon_0=2.0$, $\bar{k}/k=2.0$) には, 板の上半分が引張応力に, 下半分が圧縮になる。同じ熱伝導率比 \bar{k}/k に対し, 介在物が熱膨張しやすい場合 ($\varepsilon_0=2.0$) に比べて介在物が熱膨張しにくい場合 ($\varepsilon_0=0.5$) は全体として応力値が大きくなる。すなわち, 線膨張係数比 ε_0 が小さくなると板の上半分における圧縮応力は増加し, 板の下半分における引張応力は増加する。

図6は介在物側における $\bar{\sigma}_\theta$ の分布を示したものである。介在物が熱膨張しにくい場合 ($\varepsilon_0=0.5$) は, 介在物が軟らかいおよび硬いときはともに熱伝導率比 \bar{k}/k が小さいときは $\varphi=0^\circ \sim 90^\circ$ で全域にわたり圧縮応力から引張応力に転じる。熱伝導率比 \bar{k}/k が大きく

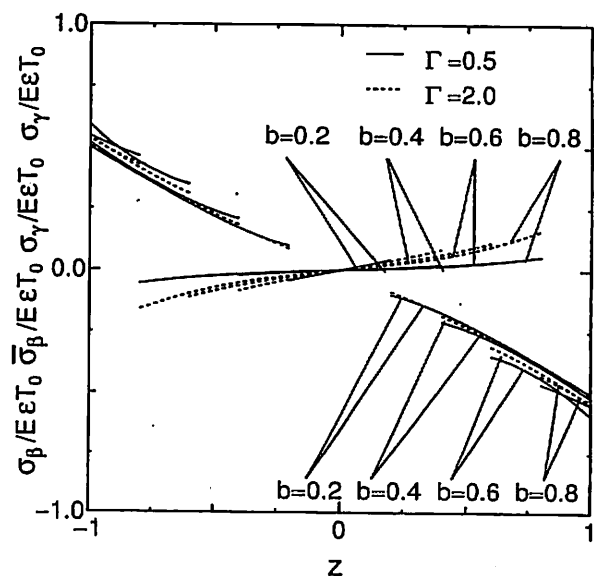


Fig. 7 Variation of σ_θ , $\bar{\sigma}_\theta$, σ_r , σ_ϕ with z along the z axis for $\bar{s}=0.5$, $\bar{k}/k=1.0$, $d=1.0$, $\varepsilon_0=0.5$

となると引張応力は増加する。介在物が熱膨張しやすい場合 ($\varepsilon_0=2.0$) は、介在物が軟らかいおよび硬いときはともに $\varphi=0^\circ\sim 90^\circ$ で全域にわたり圧縮応力であるが、熱伝導率比 \bar{k}/k が大きくなると圧縮応力は減少する。これは $\varepsilon_0=0.5$ の場合と逆の傾向である。介在物が熱膨張しにくい場合の $\varphi=0^\circ\sim 90^\circ$ における圧縮応力は介在物が熱膨張しやすい場合より全体的に大きくなる。

図7は形状比 $\bar{s}=0.5$ 、加熱域の大きさ $d=1.0$ 、熱

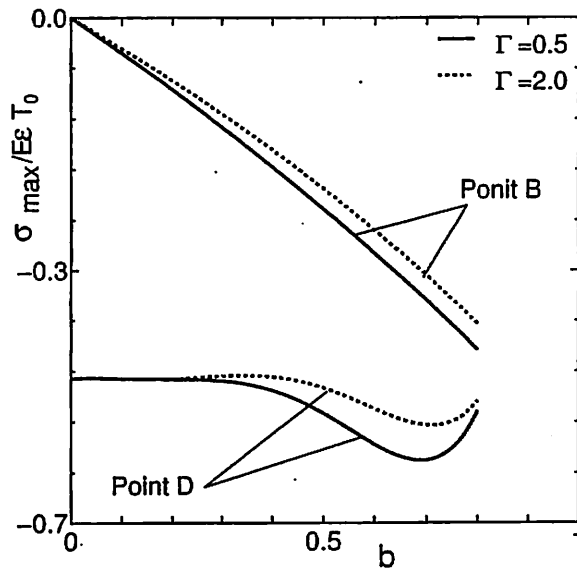


Fig. 8 Variation of maximum compressive stress of σ_β , σ_γ of Point B and Point D with b for $\bar{s}=0.5$, $\bar{k}/k=1.0$, $d=1.0$, $\varepsilon_0=0.5$

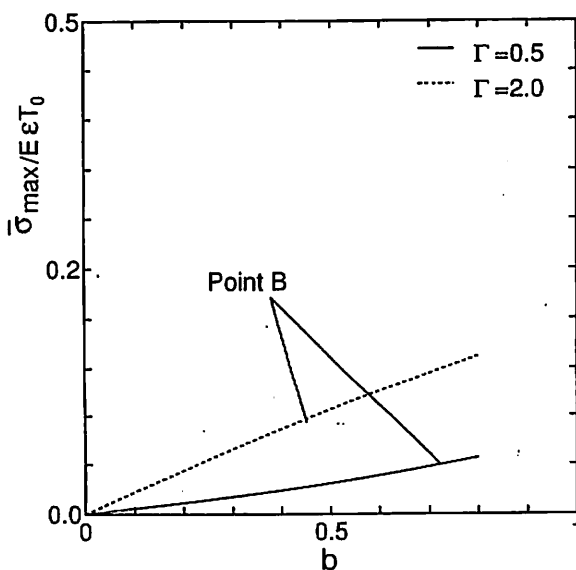


Fig. 9 Variation of maximum tensile stress of σ_β , σ_γ of Point B with b for $\bar{s}=0.5$, $\bar{k}/k=1.0$, $d=1.0$, $\varepsilon_0=0.5$

伝導率 $\bar{k}/k=1.0$ 、線膨張係数比 $\varepsilon_0=0.5$ としたときの母材側および介在物側の z 軸上の応力 $(\sigma_\beta)_{\varphi=0}$, $(\sigma_\beta)_{\varphi=0}$, $(\sigma_\gamma)_{\varphi=0}$, $(\sigma_\gamma)_{\varphi=0}$ 分布を $-1 \leq z \leq 1$ の場合について示したものである。母材側の応力については、介在物が軟らかいおよび硬いときはともに最大圧縮応力は板上表面に生じ、最大引張応力は板下表面に生じる。板表面の応力および介在物境界面の応力は介在物が大きくなると大きくなる。介在物側の応力については、介在物が硬い場合は介在物が軟らかい場合に比べて全体として応力値が大きい。

全体として母材に生じる最大圧縮応力は、介在物境界面上の図1のB点に生じる応力 $(\sigma_\beta)_{\varphi=0, z=\alpha_0}$ および厚板表面上の図1のD点に生じる応力 $(\sigma_\beta)_{\varphi=0, z=1}$ の

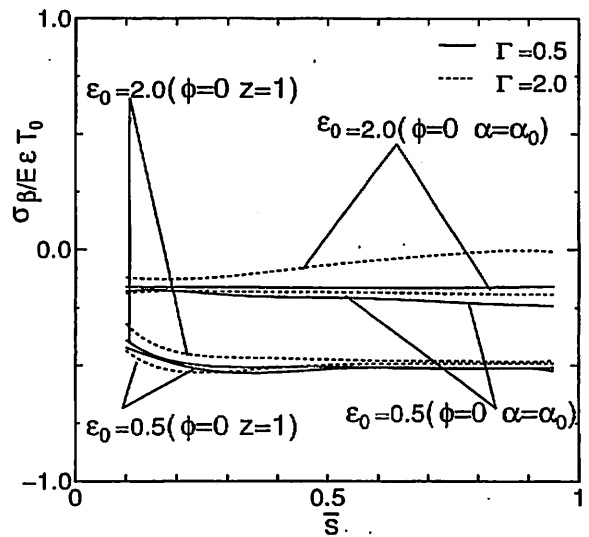


Fig. 10 Variation of σ_β of Point B and D with \bar{s} for $\bar{k}/k=1.0$, $d=1.0$, $b=0.4$

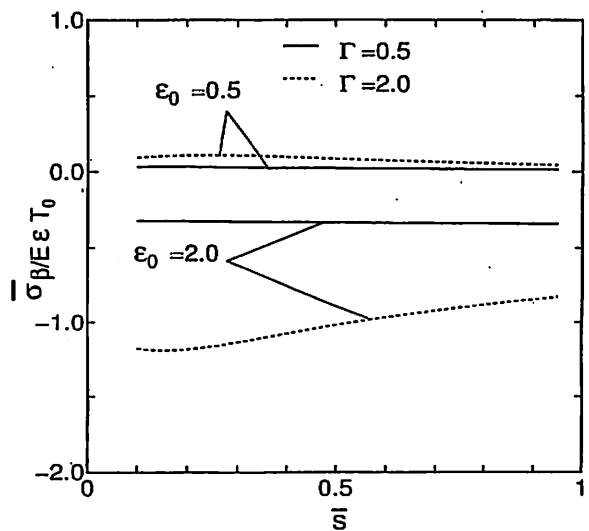


Fig. 11 Variation of σ_β of Point B with \bar{s} for $\bar{k}/k=1.0$, $d=1.0$, $b=0.4$

いずれかである。ただし、B 点に生じる介在物側の $(\bar{\sigma}_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_0}$ は最大引張応力となっている。応力分布が $z=0$ に対称なため、最大圧縮応力は $z=0$ に対称な位置に生じ、絶対値は同じである。形状比 $\bar{s}=0.5$ 、加熱域の大きさ $d=1.0$ 、熱伝導率 $\bar{k}/k=1.0$ 、線膨張係数比 $\epsilon_0=0.5$ としたときのこれらの応力を図 8, 9 にそれぞれ示す。

図 8 は、短半軸 b に対して板の上表面の D 点および介在物境界面における母材側の B 点の最大圧縮応力の分布を示したものである。B 点の最大圧縮応力は b が大きくなると大きくなる。介在物が硬い場合の σ_B は介在物が軟らかい場合の σ_B より小さい。板表面 D 点の最大圧縮応力は、 b が大きくなると大きくなるが、 $b=0.7$ を越えると減少する。

図 9 は、介在物境界面における介在物側の B 点の最大引張応力の分布を示したものである。介在物が硬い場合の $\bar{\sigma}_B$ は介在物が軟らかい場合の $\bar{\sigma}_B$ の値より大きい。最大引張応力は直線的に増加する。

最後に、図 10, 11 は、熱伝導率比 $\bar{k}/k=1.0$ 、加熱域の大きさ $d=1.0$ 、介在物の短半径 $b=0.4$ を一定として、線膨張係数比 $\epsilon_0=0.5, 2.0$ としたときの母材側の $(\sigma_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_0}$ 、 $(\sigma_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_1}$ および介在物側の $(\bar{\sigma}_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_0}$ の分布に対する介在物の形状比 \bar{s} による変化をそれぞれ示したものである。

図 10 は、母材側の $(\sigma_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_0}$ 、 $(\sigma_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_1}$ の分布を示したものである。介在物境界面上の B 点に生じる応力 $(\sigma_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_0}$ は圧縮応力であり、線膨張係数比 $\epsilon_0=0.5, 2.0$ および介在物の硬さ Γ にかかわらず介在物の形状比 \bar{s} が大きくなると微増する。ただし、 $\epsilon_0=2.0$ 、 $\Gamma=2.0$ の場合は介在物の形状比 \bar{s} が大きくなると σ_B は減少する。厚板表面上の D 点に生じる応力 $(\sigma_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_1}$ は圧縮応力であり、線膨張係数比 $\epsilon_0=0.5, 2.0$ および介在物の硬さ Γ にかかわらず介在物の形状比 \bar{s} が小さいとき小さいが、 \bar{s} が大きくなるとほぼ一定になる。

図 11 は、介在物側の $(\bar{\sigma}_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_0}$ の分布を示したものである。介在物境界面上の B 点に生じる応力 $(\bar{\sigma}_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_0}$ は熱膨張しにくい場合はほぼ引張応力で

あり、介在物の形状比 \bar{s} が大きくなるとほぼ一定になる。熱膨張しやすい場合は全域にわたり圧縮応力であり、介在物が軟らかいときは介在物の形状比 \bar{s} が大きくなるとほぼ一定になる。介在物が硬いときは介在物の形状比 \bar{s} が大きくなると圧縮応力は小さくなる。

4. 結 言

本研究は、厚板内に偏平回転円体状介在物が存在し、厚板上下面の一定円形領域がそれぞれ部分的に加熱、冷却される場合の定常熱応力問題について三次元熱弾性理論に基づいて厳密に解析したものである。得られた結果を要約すると以下ようになる。

(1) 母材における最大圧縮応力は介在物に最も近い厚板の上表面の D 点に生じる。介在物側における最大引張応力は介在物境界面上の B 点に生じる。

(2) 介在物境界面における応力 σ_θ は、板の上半分では主に圧縮応力、下半分では引張応力となる。特に介在物が軟らかい場合 ($\Gamma < 1$) には板の上半分の $\varphi=80^\circ \sim 90^\circ$ で引張応力を生じる。

(3) z 軸上の応力 $(\sigma_\theta)_{\varphi=0}$ 、 $(\bar{\sigma}_\theta)_{\varphi=0}$ 、 $(\sigma_r)_{\varphi=0}$ 、 $(\bar{\sigma}_r)_{\varphi=0}$ は、介在物境界面で応力集中し、 z が増えるにつれ直線的に増加する。

(4) 板表面 D 点の $(\sigma_\theta)_{\varphi=0, \alpha=\alpha_1}$ は圧縮応力であり、線膨張係数比 $\epsilon_0=0.5, 2.0$ および介在物の硬さ Γ にかかわらず介在物の形状比 \bar{s} が小さいとき小さいが、 \bar{s} が大きくなるとほぼ一定になる。

文 献

- (1) 渥美光・吉田公雄, 機論, 32-233 (1966), 39-47.
- (2) Edwards, R. H., *J. Appl. Mech.*, 18 (1951), 19-30.
- (3) Hussain, M. and Pu, S. L., *J. Appl. Mech.*, 37 (1970), 403-408.
- (4) 牟岐鹿楼, 機論, 22-123 (1956), 795-802.
- (5) Das, B. R., *Int. J. Eng. Sci.*, 6 (1968), 497-502; 7 (1969), 667-672; 9 (1971), 469-473.
- (6) Shail, R., *Mathematika*, 11 (1964), 102-118.
- (7) 土田栄一郎・八重樫昭徳, 機論, 48-435, A (1982), 1436-1444.
- (8) Tsuchida, E., Arai, Y. and Esaki, K., *Thermal Stresses*, 97, (1997), 133-136.