1476

日本機械学会論文集(A編)
70巻698号(2004-10)

論文 No. 03-0898

# ハニカムの大変形した場合におけるポアソン比および弾性係数の解析*

大滝英征*1, 万　弃*2
琴坂信哉*1, 長坂保美*3

# Poisson's Ratio and Elastic Modulus of Honeycombs for a Large Deflection Model

Hideyuki OHTAKI*4, Hui WAN,
Sinya KOTOSAKA and Yasumi NAGASAKA

*4 Department of Mechanical Engineering, Saitama University,
255 Shimo-Okubo, Sakura-ku, Saitama, 338-8570 Japan

We have developed a theoretical model for predicting the in-plane mechanical properties of honeycombs based on the large deflection of the inclined and vertical members of the honeycomb cells. We have used the large deflection approach for a segment including honeycomb cells. Then we derive expressions for Elastic modulus and Poisson's ratios in two orthogonal directions, and the shear modulus of honeycombs. Elastic modulus, Poisson's ratios and the shear modulus of honeycombs are expressed using incomplete elliptic integrals. The results show that these mechanical properties are no longer constant at large deflections but vary significantly with the strain

*Key Words*: Honeycombs, Large Deflection, Incomplete Elliptic Integrals, Elastic Modulus, Shear Modulus, Poisson's Ratio

## 1. まえがき

ハニカムは，軽量かつ高強度の構造体として，種々の分野に使用されてきた．しかし，材料開発が多岐に渡るに及んで，微小多孔質ポリマー，泡状物質や人口骨等の新種なハニカム[(1)~(3)]も登場して来た．泡状物質等，構造によっては，引張負荷に対して，横方向に膨張し，負のポアソン比を有するものもある．Evans[(4)~(6)]は網状の微細構造をモデル化し，分子力学的な適用を図っている．Smith ら[(7)]は，ハニカムと泡状物質の特性を検討するため，仮想的なモデルを提案している．いずれにせよ，微細構造の幾何学的な形状が結果的に負のポアソン比の要因となることを考慮すると，その基本的な構造としてハニカムを検討するのが有効と考えられる[(8)~(10)]．Gibson ら[(11)]は微小なたわみ変形を仮定して，微細構造のハニカムのポアソン比を予測できるモデルを発表している．

ハニカムに負荷が加わった場合の応力～ひずみ線図および変形状態は図1に示したようになる[(11)~(13)]．Iはセルに際立った変形を生じない領域で，セルは微小変形の状態である．IIは，一部のセルの壁が膨らみ，大変形を来たしている領域である．ひずみが大きくなっても，応力はほぼ一定の状態で推移する．IIIの領域はセルの壁どうしが接触し応力が急増する領域である．このIIの領域は，実使用時によく現れる現象で，その変形解析が重要となる．Iの領域では，微小変形に根幹を置く材料力学を適用して変形解析できるが，IIの領域では，適用できない．そこで，セルを交差するメンバーでモデル化し，大変形理論による解析や壁どうしの接合部を塑性ヒンジとして解析することが肝要となる．ちなみに，Warren, Kraynik ら[(14)(15)]はメンバーの曲げ剛性に加えて，メンバーに加わる荷重方向がハニカムの変形に及ぼす影響を解析している．Klintworth, Strong[(16)]や Zhang, Ashby[(13)]はハニカムの変形がメンバーの弾性座屈的な変形に起因するものとして解析している．これらでとられた解析手法

* 原稿受付 2003年8月6日．
*1 正員，埼玉大学工学部(〒338-8570 さいたま市桜区下大久保255)．
*2 学生員，埼玉大学大学院理工学研究科．
*3 正員，日本工業大学工学部(〒345-8501 埼玉県南埼玉郡宮代町学園台4-1)．
E-mail: ohtaki@post.saitama-u.ac.jp

は，セルの各メンバーについて，線形弾性論に準拠したモデル[12][17]を構築し，非線形領域にまで拡張しているものである．

しかし，図1のIIの領域は，非線形領域にあるので，元来，大変形理論によって解析する必要がある．

本報告では，Timoshenko[18]によるはりの大変形理論を準用すると，メンバーの変形が不完全だ円積分として解析できることを導き出した．そして，この積分を求め，メンバーの幾何学的形状や負荷方向がハニカムの変形に及ぼす影響を解析した．

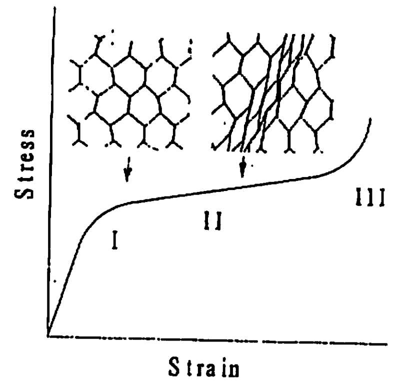


Fig. 1 Deformation of honeycomb

## 2. ハニカムの変形解析

**2・1 セルのメンバーに働く力とモーメント** ハニカムに外力が加わった場合の変形解析に際して，解析を容易にするため，Gibsonら[11]が採用した図2(a)に示したようなセグメントをとって検討する．セグメントには，図中のようにセルのメンバーが含まれる．セグメントには，外力により垂直応力 $\sigma_x$, $\sigma_y$ およびせん断応力 $\tau$ が作用するものとする．すると，セグメントの受け持つ $X$ 軸方向，$Y$ 軸方向の垂直荷重 ($P_X$, $P_Y$) およびせん断荷重 ($W_1$, $W_2$) との関係は，以下のようになる．

$$P_X=\sigma_X(H+L\sin\lambda)b \quad \cdots\cdots (1)$$

$$P_Y=2\sigma_Y L\cos\lambda b \quad \cdots\cdots (2)$$

$$W_1=2\tau Lb\cos\lambda \quad \cdots\cdots (3)$$

$$W_2=\tau(H+L\sin\lambda)b \quad \cdots\cdots (4)$$

$H, L, \lambda$：図2中に示した寸法および角度

$b$：セルのメンバーの幅

Gibsonらは，この $P_X$, $P_Y$, $W_1$, $W_2$ は，セグメント中に存在するセルのメンバーどうしの結合部で負担するものとしている．図2(b)に示した場合では，メンバーBEは応力 $\sigma_x$ の方向に垂直に置かれているため，荷重を負担しない．AB, BCが負担することになる．

したがって，$P_X$, $P_Y$ によって，メンバーの結合部に加わる曲げモーメント $M_X$, $M_Y$ は

$$M_X=P_X L\sin\lambda/2 \quad \cdots\cdots (5)$$

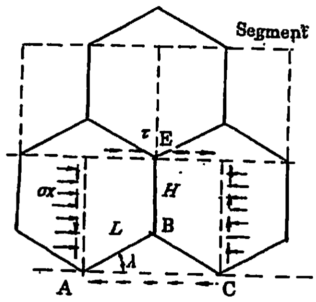
$$M_Y=P_Y L\cos\lambda/2 \quad \cdots\cdots (6)$$

同様に，$W_1$, $W_2$ による曲げモーメントは

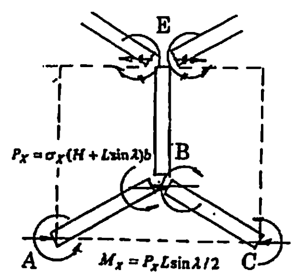
$$M_1=W_1H/2=\tau LHb\cos\lambda \quad \cdots\cdots (7)$$

$$M_2=M_3=W_1H/4=\tau LHb\cos\lambda/2 \quad \cdots\cdots (8)$$

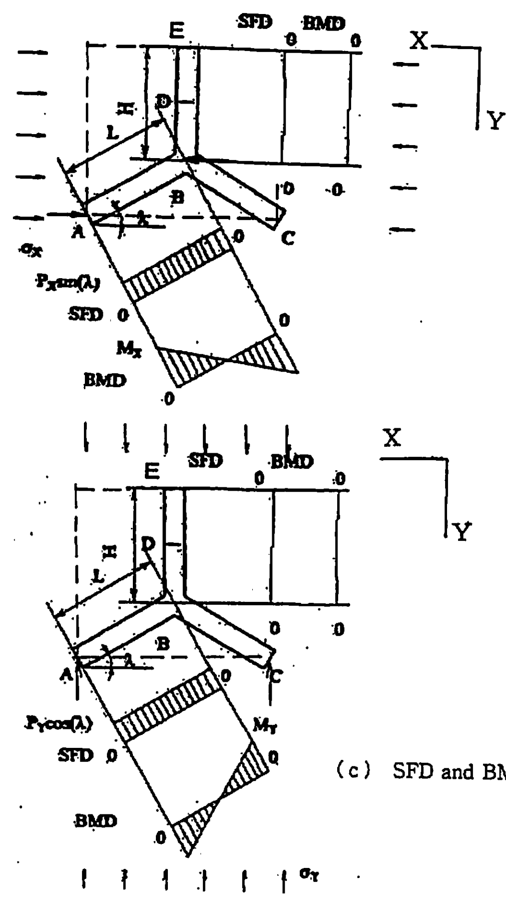
上記のような扱いは，線形弾性論に準拠したモデルを，非線形領域にまで拡張し，解析する際にとられている．これに対し，本報告では，大変形理論を準用し解析を行う．



(a) Segment



(b) Condition of loading



(c) SFD and BMD

Fig. 2 The segment and the forces act on the cell member under axial loading

### 2・2 メンバーの変形

**2・2・1 $P_X$ による変形** 図2(c)からもわかるよ

うに，メンバー BE には，曲げモーメントが作用しないので，変形については考慮しない．メンバー AB については，その中点で，曲げモーメントは零となるので，メンバーの半分だけを取り扱ってもよい．次に，変形前後のメンバーの状態を図 3(a)に示した．変形によって，A，C 間の間隔は小さくなるものの，各メンバーの結合部におけるメンバーの接線と $X$ 軸との間の角 $\lambda$ は変形前と変わらないものとする．

図 3(b)，(c)にメンバー OA 部に働く力と変形の状態を示した．図 3(b)において，原点を O(メンバー AB の中点)とし，メンバーに沿う任意位置の曲線座標値を $S$ とすると

$$E_S I\frac{d\theta}{dS}=-P_X Y \quad\cdots\cdots(9)$$

$E_S$：メンバー材の縦弾性係数

$I$：メンバーの中立軸に関する断面二次モーメント($I=bt^3/12$，$t$：肉厚)

$\theta$：S 点における $X$ 軸とメンバーの接線の角

$S$：原点 O から S 点までの距離

境界条件は，上述のことから以下のように与えられる．

$$\left(\frac{d\theta}{dS}\right)_{s=0}=0,\quad (\theta)_{s=0}=\alpha_X \quad\cdots\cdots(10)$$

$$\left(E_S I\frac{d\theta}{dS}\right)_{s=L/2}=M_X,\quad (\theta)_{s=L/2}=\beta_X(=\lambda) \quad\cdots\cdots(11)$$

$\alpha_X$, $\beta_X$：原点 O および A 点における $X$ 軸とメンバーの接線との間の角

ここで，メンバーの軸に沿う方向の圧縮による変位は無視できるものとする．式(9)を $S$ に関して微分し，$dY/dS=\sin\theta$ を代入すると

$$E_S I\frac{d^2\theta}{dS^2}=-P_X\sin\theta \quad\cdots\cdots(12)$$

式(12)に $(d\theta/dS)dS$ を掛けて，積分すると

$$\int\frac{d^2\theta}{dS^2}\frac{d\theta}{dS}dS=-k_X^2\int\sin\theta\frac{d\theta}{dS}dS \quad\cdots\cdots(13)$$

ここで，

$$k_X^2=\frac{P_X}{E_S I} \quad\cdots\cdots(14)$$

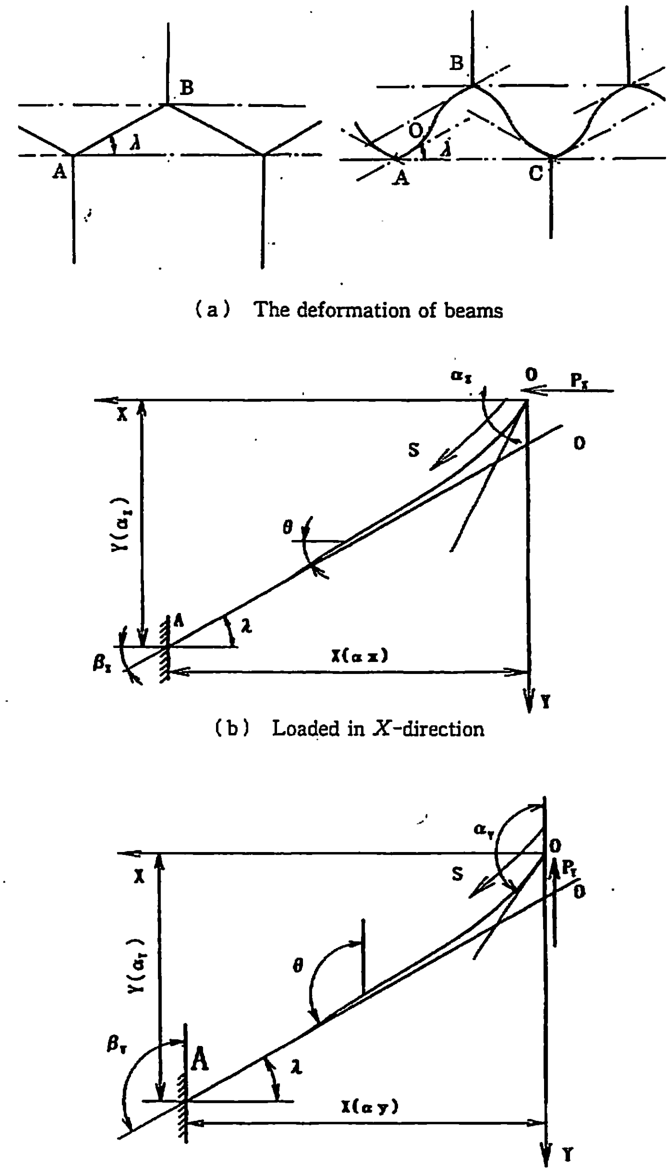
さらに，O 点における境界条件を考慮すると

$$\left(\frac{d\theta}{dS}\right)^2=2k_X^2(\cos\theta-\cos\alpha_X) \quad\cdots\cdots(15)$$

$$dS=-\frac{d\theta}{k_X\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha_X)}} \quad\cdots\cdots(16)$$

したがって，メンバー OA については

$$L(\alpha_X)=-\int_{\alpha_X}^{\beta_X}\frac{d\theta}{k_X\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha_X)}}$$




(a) The deformation of beams

(b) Loaded in $X$-direction

(c) Loaded in $Y$-direction

Fig. 3　The large deflection of an inclined beam

$$=\frac{1}{2k_X}\int_{\beta_X}^{\alpha_X}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\alpha_X/2)-\sin^2(\theta/2)}} \quad\cdots(17)$$

ここで，新規な媒介変数 $\phi$ を用いて，上式を書き改める．

$$\sin(\theta/2)=\sin(\alpha_X/2)\sin\phi=p_X\sin\phi \quad\cdots\cdots(18)$$

ただし，$p_X=\sin(\alpha_X/2)$．したがって，$\phi$ で表現した場合の境界条件は

$$\phi|_{\theta=\alpha_X}=\pi/2$$

$$\phi|_{\theta=\beta_X}=\delta_X=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\beta_X}{2}\bigg/\sin\frac{\alpha_X}{2}\right) \quad\cdots\cdots(19)$$

したがって，式(17)は

$$L(\alpha_X)=\frac{1}{k_X}\int_{\delta_X}^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-p_X^2\sin^2\phi}}$$
$$=\frac{1}{k_X}F(\alpha_X) \quad\cdots\cdots(20)$$

$F(\alpha_X)$ は第一種不完全形だ円積分である．
力 $P_X$ は，式(14)，(20)より

$$P_X=k_X^2E_SI=\frac{4E_SIF^2(\alpha_X)}{L(\alpha_X)^2} \quad\cdots\cdots(21)$$

したがって，応力 $\sigma_X$ は，式(1)，(21)より

$$\sigma_X=P_X/(L\sin\lambda+H)b$$
$$=\frac{E_S(t/L)^3}{3(H/L+\sin\lambda)}F^2(\alpha_X) \quad\cdots\cdots(22)$$

で表される．

**2・2・2　$P_Y$ による変形**　図2(c)に示したように，BEの中心軸は，$\sigma_Y$ の方向と一致しているため，軸方向の圧縮を受けるだけである．この変位は，微小であるとして無視する．AB, BCについては，$P_X$ の場合と同じ手順に準拠し，図3(c)より $P_Y$ を求めると

$$P_Y=2k_Y^2E_SI=\frac{8E_SIF^2(\alpha_Y)}{L(\alpha_Y)^2} \quad\cdots\cdots(23)$$

したがって，応力 $\sigma_Y$ は，式(2)より

$$\sigma_Y=P_Y/2Lb\cos\lambda$$
$$=\frac{E_S(t/L)^3}{3\cos\lambda}F^2(\alpha_Y) \quad\cdots\cdots(24)$$

ただし，

$$k_Y^2=\frac{P_Y}{2E_SI}$$
$$F(\alpha_Y)=\int_{\delta_Y}^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-p_Y^2\sin^2\phi}}$$
$$P_Y=\sin(\alpha_Y/2)$$
$$\delta_Y=\arcsin\left(\sin\frac{\beta_Y}{2}\Big/\sin\frac{\alpha_Y}{2}\right) \quad\cdots\cdots(25)$$

## 2・3　セグメントの縦弾性係数およびポアソン比

**2・3・1　$\sigma_X$ による場合**　OSについての変形後の $X$ 軸方向成分 $L_{XX}(\theta)$ は，

$$L_{XX}(\theta)=\frac{1}{2k_X}\int_{\beta_X}^{\theta}\frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{\sin^2(\alpha_X/2)-\sin^2(\theta/2)}} \quad\cdots\cdots(26)$$

式(18)を用いて，上記を書き改めると

$$L_{XX}(\theta)=\frac{1}{k_X}\int_{\delta_X}^{\xi_X}\frac{1-2p_X^2\sin^2\phi}{\sqrt{1-p_X^2\sin^2\phi}}d\phi$$
$$=\frac{1}{k_X}\left[2\int_{\delta_X}^{\xi_X}\sqrt{1-p_X^2\sin^2\phi}\,d\phi-\int_{\delta_X}^{\xi_X}\frac{1}{\sqrt{1-p_X^2\sin^2\phi}}d\phi\right] \quad\cdots\cdots(27)$$

ここで，

$$\xi_X=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\Big/\sin\frac{\alpha_X}{2}\right)$$
$$\beta_X\leq\theta\leq\alpha_X$$

式(27)の右辺第1項は第二種不完全形だ円積分である．これを $E(\xi_X)$ を用いて書き改めると

$$L_{XX}(\theta)=\frac{1}{k_X}[2E(\xi_X)-F(\xi_X)] \quad\cdots\cdots(28)$$
$$E(\xi_X)=\int_{\delta_X}^{\xi_X}\sqrt{1-p_X^2\sin^2\phi}\,d\phi$$

したがって，OAの変形後の長さの $X$ 軸方向成分 $L_{XX}(\alpha_X)$ は

$$L_{XX}(\alpha_X)=\frac{1}{k_X}[2E(\alpha_X)-F(\alpha_X)] \quad\cdots\cdots(29)$$

変形前のメンバーAB, BCの $X$ 軸方向成分は，$L\cos\lambda$ であり，これを加算した値は，セグメントの変形前の $X$ 軸方向長さと等価であると考えられる．したがって，$\sigma_X$ による $X$ 軸方向のひずみは以下のようになる．

$$\varepsilon_{XX}=\frac{2L_{XX}(\alpha_X)-L\cos\lambda}{L\cos\lambda}$$
$$=\frac{2[2E(\alpha_X)-F(\alpha_X)]/k_X-L\cos\lambda}{L\cos\lambda} \quad\cdots\cdots(30)$$

$Y$ 軸方向のOSの投影長さ $L_{YX}(\theta)$ も同様の方法で計算でき

$$L_{YX}(\theta)=\frac{1}{2k_X}\int_{\beta_X}^{\theta}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\sin^2(\alpha_X/2)-\sin^2(\theta/2)}} \quad\cdots\cdots(31)$$

したがって，OAでは，

$$L_{YX}(\alpha_X)=\frac{2p_X}{k_X}\int_{\delta_X}^{\xi_X}\sin\phi d\phi$$
$$=\frac{2\sin(\alpha_X/2)}{k_X}(\cos\delta_X-\cos\xi_X) \quad\cdots\cdots(32)$$

$\xi_X=\pi/2$ とすると

$$L_{YX}(\alpha_X)=\frac{2\sin(\alpha_X/2)}{k_X}\cos\delta_X \quad\cdots\cdots(33)$$

図2(c)からもわかるように，変形前のメンバーABの長さの $Y$ 軸方向の成分は $L\sin\lambda$，メンバーBEの $Y$ 軸方向の長さは $H$ である．したがって，$\sigma_X$ によるセグメントの $Y$ 軸方向ひずみは

$$\varepsilon_{XY}=\frac{H+2L_{YX}(\alpha_X)-(H+L\sin\lambda)}{H+L\sin\lambda}$$
$$=\frac{-L\sin\lambda+4p_X\cos\delta_X/k_X}{H+L\sin\lambda} \quad\cdots\cdots(34)$$

したがって，セグメントの $X$ 軸方向の縦弾性係数は，式(22)，(30)より

$$\frac{E_X}{E_S}=\left(\frac{t}{L}\right)^3\frac{F^2(\alpha_X)}{3(H/L+L\sin\lambda)}\times\frac{L\cos\lambda}{2(2E(\alpha_X)-F(\alpha_X))/k_X-L\cos\lambda} \quad\cdots\cdots(35)$$

また，セグメントのポアソン比は式(30)，(34)より

$$\nu_X=\frac{\varepsilon_{YX}}{\varepsilon_{XX}}=\frac{L\sin\lambda-4p_X\cos\delta_X/k_X}{H+L\sin\lambda}\Big/\frac{2[2E(\alpha_X)-F(\alpha_X)]/k_X-L\cos\lambda}{L\cos\lambda} \quad\cdots\cdots(36)$$

**2・3・2　$\sigma_Y$ による場合**　2・3・1項と同様の手法でポアソン比が求まる．$P_Y$ による変形後のメンバーOAの $X$ 軸方向成分 $L_{XY}(\alpha_Y)$，$Y$ 軸方向成分 $L_{XY}(\alpha_Y)$ は

$$L_{XY}(\alpha_Y)=\frac{2\sin(\alpha_Y)}{k_Y}\cos\delta_Y \quad\cdots\cdots(37)$$

ただし，

$$k_Y^2=\frac{P_Y}{2E_S I}$$

$$\xi_Y=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\Big/\sin\frac{\sigma_Y}{2}\right)$$

$L_{YY}(\alpha_Y)$ は

$$L_{YY}=\frac{1}{k_Y}[2E(\alpha_Y)-F(\alpha_Y)]$$

$$E(\alpha_Y)=\int_{\delta_Y}^{\alpha_Y}\sqrt{1-p_Y^2\sin^2\phi}\,d\phi \quad\cdots\cdots(38)$$

ここで，メンバーBEは $P_Y$ 方向と同方向であり，$P_Y$ による圧縮変位は微小であるとみなす．

変形前のメンバーAB，BCの $Y$ 軸方向成分は $L\sin\lambda$，BEの $Y$ 軸方向成分は $H$ で，両者を加えたものがセグメントの変形前の $Y$ 軸方向長さと等価である．したがって，$\sigma_Y$ による $Y$ 軸方向のひずみは以下のようになる．

$$\varepsilon_{YY}=\frac{H+2L_{YY}(\alpha_Y)-(H+L\sin\lambda)}{H+L\sin\lambda}=\frac{-L\sin\lambda-2[2E(\alpha_Y)-F(\alpha_Y)]/k_Y}{H+L\sin\lambda} \quad\cdots(39)$$

同様にして，$\sigma_Y$ による $X$ 軸方向のひずみは以下のようになる．

$$\varepsilon_{XY}=\frac{2L_{XY}(\alpha_Y)-L\cos\lambda}{L\cos\lambda}=\frac{4p_Y\cos\delta_Y/k_Y-L\cos\lambda}{L\cos\lambda} \quad\cdots\cdots(40)$$

したがって，$\sigma_Y$ によるセグメントの $Y$ 軸方向の縦弾性係数は式(24)，(41)より

$$\frac{E_Y}{E_S}=\left(\frac{t}{L}\right)^3\frac{F^2(\alpha_Y)}{3L\cos\lambda}\times\frac{(H+L\sin\lambda)}{2(2E(\alpha_Y)-F(\alpha_Y))/k_Y-L\sin\lambda} \quad\cdots\cdots(41)$$

また，$\sigma_Y$ によるセグメントのポアソン比は

$$\nu_Y=\frac{\varepsilon_{XY}}{\varepsilon_{YY}}=\frac{(4p_Y\cos\delta_Y/k_Y-L\cos\lambda)(H+L\sin\lambda)}{L\cos\lambda_Y(-L\sin\lambda)-2[2E(\alpha_Y)-F(\alpha_Y)]/k_Y} \quad\cdots\cdots(42)$$

### 2・4　セグメントの横弾性係数

**2・4・1　$W_1$ による変形**　図4はせん断応力 $\tau$ がセグメントに作用した場合に，メンバーに働く力の状況を示したものである．メンバーAB，BCの外端には $W_1/2$，$W_2$ および $M_b$，$M_3(=M_2)$ が作用する．BEの外端には，$W_1$，$M_1(=2M_2)$ が作用する．この場合，OA(メンバーABの中点に原点Oを取る)の変形については，図3と照らし合わせてみると，$P_X$ に $W_1/2$ を代替させた場合と等価になる．

したがって，$W_1$ によるせん断応力は，式(5)，(20)より

$$\tau=W_1/2Lb\cos\lambda=2P_X/2Lb\cos\lambda=\frac{E_S(t/L)^3}{3\cos\lambda}F^2(\alpha_{\tau1}) \quad\cdots\cdots(43)$$

ただし，

$$F(\alpha_{\tau1})=\int_{\delta_{\tau1}}^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-p_{\tau1}^2\sin^2\phi}}$$

$$P_{\tau1}=\sin(\alpha_{\tau1}/2)$$

$$\delta_{\tau1}=\sin^{-1}(\sin(\beta_{\tau1}/2)/\sin(\alpha_{\tau1}/2))$$

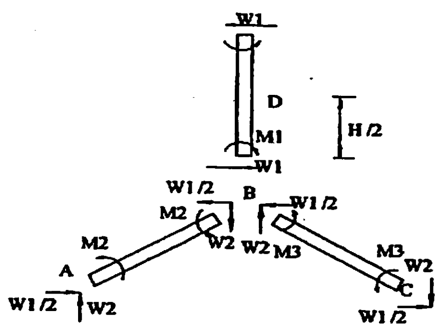
次に，メンバーOAの変形後の $X$ 軸方向寸法および $Y$ 軸方向寸法は，式(29)，(33)より

$$L_{X\tau1}(\alpha_{\tau1})=\frac{1}{k_{\tau1}}[2E(\alpha_{\tau1})-F(\alpha_{\tau1})] \quad\cdots\cdots(44)$$

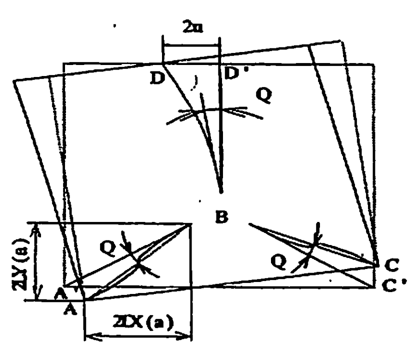
$$L_{Y\tau1}(\alpha_{\tau1})=\frac{2p_{\tau1}}{k_{\tau1}}\cos\delta_{Y\tau} \quad\cdots\cdots(45)$$

$$k_{\tau1}^2=\frac{W_1/2}{E_S I}$$

$$E(\alpha_{\tau1})=\int_{\delta_{\tau1}}^{\pi/2}\sqrt{1-p_{\tau1}^2\sin^2\phi}\,d\phi$$




(a)




(b)

Fig. 4　The large deflection model of the inclined beams under shear loading and rotation of the three members

メンバーBEについては，$X$ 軸方向成分のみ有し，$Y$ 軸方向成分はない．メンバーBEの中点にD点を取り，式(29)を照らし合わせて考えると

$$L_{Xr3}(\alpha_{r3})=\frac{1}{k_{r3}}[2E(\alpha_{r3})-F(\alpha_{r3})] \quad \cdots\cdots\cdots(46)$$

ただし，

$$k_{r3}^2=\frac{W_1}{E_s I}$$

$$F(\alpha_{r3})=\int_{\delta_{r3}}^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-p_{r3}^2\sin^2\phi}} \quad \cdots\cdots\cdots(47)$$

$$E(\alpha_{r3})=\int_{\delta_{r3}}^{\pi/2}\sqrt{1-p_{r3}^2\sin^2\phi}\,d\phi$$

$$p_{r3}=\sin(\alpha_{r3}/2)$$

$$\delta_{r3}=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\beta_{r3}}{2}\Big/\sin\frac{\alpha_{r3}}{2}\right)$$

式(3)，(21)と式(45)より，$F(\alpha_{r1})$，$F(\alpha_{r3})$ の関係は，以下のようになり，$\alpha_{r1}$，$\alpha_{r3}$ は互いに従属関数となる．

$$F(\alpha_{r3})=\frac{\sqrt{2}L}{H}F(\alpha_{r1}) \quad \cdots\cdots\cdots(48)$$

**2・4・2 $W_2$ による変形**　$W_2$ もメンバーAB, BCの外端に作用する．しかし，BEには働かない．図3と照らし合わせると，$P_Y$ に $W_2$ を代替させた場合と等価になる．したがって，セグメントの変形後の $X$ 軸方向寸法および $Y$ 軸方向寸法は，式(35)，(37)より

$$L_{Xr2}(\alpha_{r2})=\frac{2p_{r2}}{k_{r2}}\cos\delta_{r2} \quad \cdots\cdots\cdots(49)$$

$$L_{Xr2}(\alpha_{r2})=\frac{\pm 1}{k_{r2}}[2E(\alpha_{r2})-F(\alpha_{r2})] \quad \cdots\cdots\cdots(50)$$

ただし，

$$k_{r2}^2=\frac{W_2}{E_s I}$$

$$F(\alpha_{r2})=\int_{\delta_{r2}}^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-p_{r2}^2\sin^2\phi}}$$

$$E(\alpha_{r2})=\int_{\delta_{r2}}^{\pi/2}\sqrt{1-p_{r2}^2\sin^2\phi}\,d\phi$$

$$P_{r2}=\sin(\alpha_{r2}/2)$$

$$\delta_{r2}=\sin^{-1}(\sin(\beta_{r2}/2)/\sin(\alpha_{r2}/2))$$

式(4)，(45)より，$F(\alpha_{r1})$ と $F(\alpha_{r2})$ との関係を導くと

$$F(\alpha_{r2})=\sqrt{\frac{H/L+\sin\lambda}{L\cos\lambda}}F(\alpha_{r1}) \quad \cdots\cdots\cdots(51)$$

$\alpha_{r1}$，$\alpha_{r3}$ と同様，$\alpha_{r1}$，$\alpha_{r2}$ も互いに従属関数となる．

**2・4・3 セグメントの横弾性係数**　セグメントの回転角 $\Phi$ は，図4に示したように，各メンバーの $X$ 軸方向寸法成分の総和と $Y$ 軸方向寸法成分の総和を考慮すると

$$\Phi=\tan^{-1}\left(\frac{2L_{Yr1}(\alpha_{r1})+2L_{Yr2}(\alpha_{r2})-L\sin\lambda}{2L_{Xr1}(\alpha_{r1})+2L_{Xr2}(\alpha_{r2})-L\cos\lambda}\right)-\lambda \quad \cdots\cdots\cdots(52)$$

したがって，セグメントの変形後の $X$ 軸方向寸法は，

$$U_D=\sin(\Phi)H+2L_{Xr3}(\alpha_{r3})$$

したがって，せん断ひずみは

$$\gamma=\frac{U_D}{H+L\sin\lambda} \quad \cdots\cdots\cdots(53)$$

$$=\frac{H\sin\Phi+2[2E(\alpha_{r3})-F(\alpha_{r3})]/k_{r3}}{H+L\sin\lambda}$$

したがって，式(45)，(55)より，横弾性係数 $G_{12}$ は

$$\frac{G_{12}}{E_S}=\left(\frac{t}{L}\right)^3\frac{F^2(\alpha_{r1})}{3\cos\lambda}\times\frac{H+L\sin\lambda}{H\sin\Phi+2[2E(\alpha_{r3})-F(\alpha_{r3})]/k_{r3}} \quad \cdots(54)$$

## 3. 解析結果および考察

**3・1 セグメントの縦弾性係数**　式(22)，(24)，(30)，(39)より，セグメントの応力とひずみの関係を求め，図5に示した．ただし，$\lambda=\lambda=\pi/6$，$H/L=1$ とした．これより，応力とひずみの関係は非線形となり，圧縮状態の場合は，応力のわずかな増加によって，ひずみが急増することがわかる．引張状態の場合は，ひずみをわずかに増大させるにも，大きな応力を必要とすることがわかる．

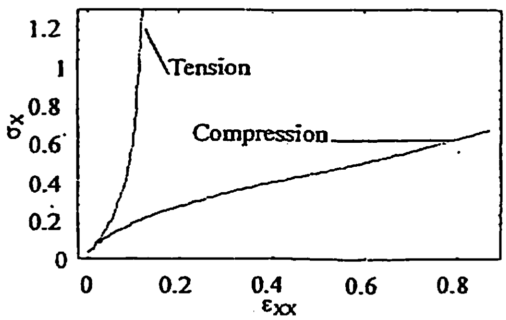
応力～歪線図が非線形を示すことから，縦弾性係数も非線形を示すことがわかる．そこで，図6は式(35)より，$E_X/(E_S(t/L)^3)$，$E_Y/(E_S(t/L)^3)$ に及ぼすひずみの影響を示したものである．圧縮される場合には，縦弾性係数はひずみの増大に伴って減少することがわかる．引張される場合は急増する．

**3・2 セグメントのポアソン比**　図7は式(36)，(44)より，ポアソン比 $\nu_X$，$\nu_Y$ に及ぼすひずみの影響を示したものである．圧縮される場合には，ポアソン比はひずみの増大に伴って，減少することがわかる．引張される場合は，急増する．この場合，ポアソン比は1以上の値をとっているが，ハニカムがメンバーで構成されており，中実でないために生じる現象である．Overaker[19]らもこの減少については指摘している．

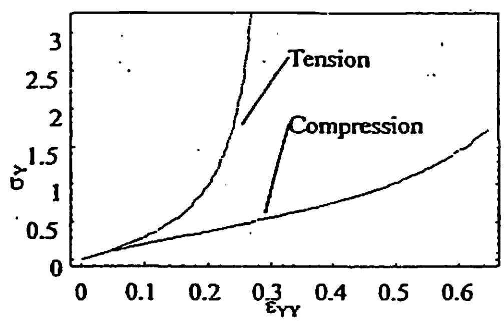
**3・3 セグメントの横弾性係数**　図8は式(45)，(55)により，$\tau/(E_S(t/L)^3)$ とせん断ひずみ $\gamma$ との関係を示したものである．$\gamma$ の増大に伴って増大するが，ひずみが小さい場合は，線形的に変化する．そこで，式(56)に従って，横弾性係数を求めてみると，図9に示したようになり，ほぼ一定値で変化することがわかる．

## 4. まとめ

ハニカムがセグメントで構成されていると考え，そ

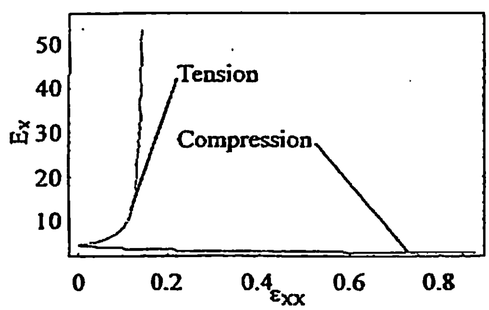



(a) X direction loading

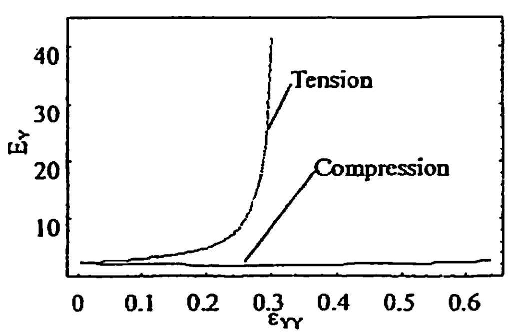



(b) Y direction loading

Fig. 5 The stress-strain curve

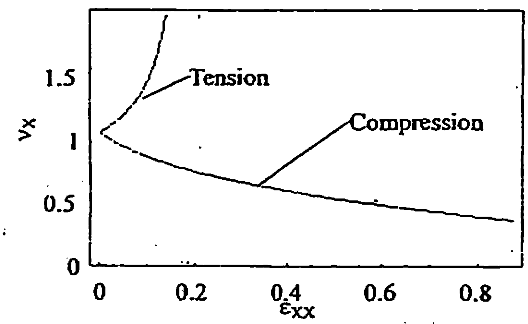



(a) X direction loading

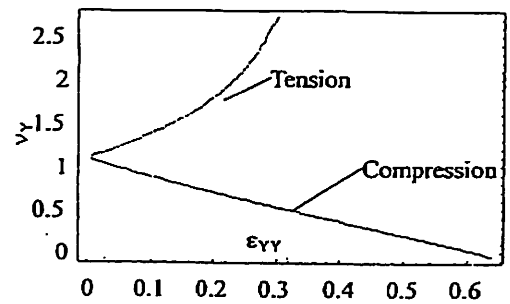



(b) Y direction loading

Fig. 6 Elastic modulus




(a) X direction loading




(b) Y direction loading

Fig. 7 The relationships between the Poisson's ratio and strain

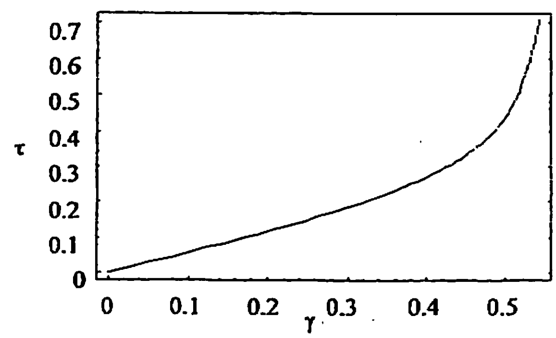



Fig. 8 The relationships between the shear stress and shear strain

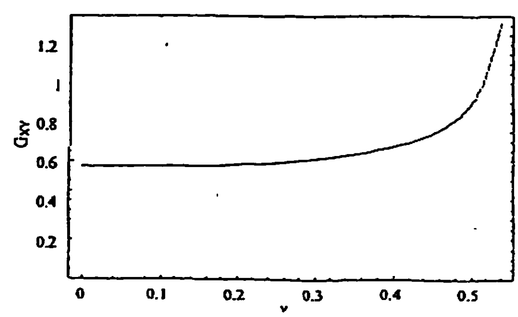



Fig. 9 The relationships between the shear modulus and shear strain

のセグメントに含まれるセルのメンバーの変形について大変形理論に準拠して解析した．そして，変形は，第一種の不完全形だ円積分と第二種不完全形だ円積分とによって，与えられることを導いた．解析の結果，セグメントに引張応力，圧縮応力およびせん断応力が個別に作用しているとみなした場合について，各応力とひずみの関係を求めることができた．応力とひずみの関係は，非線形であり，せん断応力とせん断ひずみについては，ひずみの微小領域において線形的であり，せん断弾性係数はほぼ一定であることがわかった．

## 文　献


(1) Gent, A. N. and Tomas, A. G., The deformation of foamed elastic materials. *J. Appl. Polymer Sci.*, (1959), 107-113.

(2) Gent, A. N. and Tomas, A. G., Mechanics of foamed elastic materials, *Rubber Chemi. Technol.*, 36 (1963), 597-610.

(3) Choi, J. B. and Lakes, R. S., Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam material with a negative Poisson's ratio. *Int. J. Mech. Sci.*, 37 (1995), 51-59.

(4) Evans, K., Nkansah M. A., Hutchinson, I. J. and Rogers, S. C., Molecular Network Design, *Nature*, 353, (1991), 124-125.

(5) Evans, K. E., Tensile Network Microstructures Exhibiting Negative Poisson's Ratios, *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 22, (1989), 1870-1876.

(6) Evans, K. E., Tailoring the Negative Poisson's Ratio, *Chem. Ind.*, 20, (1990), 654.

(7) Smith, C. W., Grima, J. N. and Evans, K. E., A novel mechanism for generating auxetic behavior in reticulated foams: missing rib foam model. *Acta Mater.*, No. 48, (2000) 3439-4356.

(8) Patel, M. R. and Finnie, L., Structure features and mechanical properties of rigid cellular plastics. *J. Mater.*, 5 (1970), 909-932.

(9) Menges, G. and Knipschkl, F., Estimation of mechanical properties for rigid polyurethane foams, *Polymer Eng. Sci.*, 15 (1975), 623-627.

(10) Abd El-Sayed, FK, Jones and R, Burgess, IW., A theoretical approach to the deformation of honeycomb based composite materials. *Composites*, 10 (1979), 209-214.

(11) Gibson, L. J. and Ashby, M. F., Cellular Solids: *Structure and Properties, 2nd ed*, (1997) Cambridge: Cambridge University Press.

(12) Zhu, H. X. and Mills, N. J., The In-Plane Non-Linear Compression of Regular Honeycombs, *Int. J. Solids Struct.*, 37 (2000), 1931-1949.

(13) Zhang, J. and Ashby, M. F., Buckling of Honeycombs Under In-Plane Biaxial Stresses, *Int. J. Mech. Sci.*, 34 (1992), 491-509.

(14) Warren, W. E., Kraynik, A. M., Foam Mechanics: the Linear Elastic Response of Two-Dimensional Spatially Periodic Cellular Materials, *Mech. of Materials : An Inter. J.*, 6 (1987), 27-37.

(15) Warren, WE, Kraynik, AM. and Stone, C. M., A Constitutive Model for Two-Dimensional Non-Linear Elastic Foams, *J. Mech. Phys. Solids*, 37 (1989), 717-733.

(16) Klintworth, JW, Stronge, WJ, Elasto-plastic yield limits and deformation laws for transversely crushed honeycombs., *Int. J. Mech. Sci.*, 31 (1988), 273-292.

(17) Masters, I. G. and Evans, K. E., Models for the Elastic Deformation of Honeycombs, *Compos. Struc.*, 35 (1999), 403-422.

(18) Timoshenko, SP, Gere, JM, Theory of elastic stability. (1961), 473-480., McGraw-Hill.

(19) Overaker, D. W., Cuitino, L. M. and Langrana, N. A., Elastoplastic micromechanical modeling of two-dimensional iregular convex and nonconvex hexagonal foams, Transaction of the ASME, *J. Appl. Mech.*, 65 (1998), 748-757.