

円形介在物を有する帯板の引張り*

堀 辺 忠 志*¹, 土 田 栄 一 郎*²
荒 居 善 雄*², 草 野 宣 幸*³

Stresses in an Elastic Strip Having a Circular Inclusion under Tension

Tadashi HORIBE*¹, Eiichiro TSUCHIDA,
Yoshio ARAI and Nobuyuki KUSANO*¹ Department of Mechanical Engineering, Ibaraki University,
4-12-1 Nakanarusawa-cho, Hitachi-shi, Ibaraki, 316-8511 Japan

This paper presents an analytical solution for an infinite strip having a circular inclusion when the strip is subjected to tension at infinity. In the analysis, the inclusion is assumed to be perfectly bonded and be allowed to slide. The analysis is based on the Papkovitch-Neuber stress function approach and the solution is obtained by the proper combination of harmonic function in integral forms and infinite series. The boundary conditions at the interface uniting the strip and the inclusion are satisfied using the relations between the polar and Cartesian harmonics. The numerical results obtained from the proposed method are illustrated for various stiffness ratio and sizes of the inclusion.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Infinite Strip, Circular Inclusion, Tension

1. 緒 論

現在, さまざまな種類の複合材料が開発され, それらは先端的な航空宇宙機の機体材料から自動車のボディにいたるまで幅広く利用されている。複合材料の強度は, 一般に, 母材と介在物の境界面の性質に強く依存する。そのため, 境界面の応力集中を明らかにすることは複合材料の強度設計上, 非常に重要である。このため, 介在物問題に関しては, 半無限板の解析^{(1)~(4)}, 楕円介在物を有する帯板の引張りの解析⁽⁵⁾, 接触面の分離を考慮した解析^{(6)~(8)}, 三次元弾性理論に基づく解析^{(9)~(13)}, 接触面のすべりを考慮した解析^{(14)~(15)}, 体積力法に基づく解析⁽¹⁶⁾ など数多くの研究がなされてきた。

これらの介在物問題の研究の多くは, 介在物と母材が完全密着である場合を扱っている。しかしながら, 実際の材料中の介在物は母材に完全に密着しているのではなく, すべりやはく離を有することもある。このため, 界面でのすべりやはく離を考慮した介在物の応

力状態を調べることも重要な課題である。さて, 介在物問題を解析する際には, 一般に境界面の変位を求めることが必要となる。しかしながら, よく知られている Airy の応力関数を用いて介在物に関する平面問題を解析するときには, 応力関数の積分を行って変位を求める必要があり, この計算が煩雑である。その一方, Papkovitch-Neuber 型の変位調和関数⁽¹⁷⁾ を用いれば, 応力と変位が同時に計算されるために, 介在物問題を解析する場合には変位調和関数を用いることが好都合である。

そこで本研究では, 介在物が境界面において母材に完全密着する場合およびすべりを有する場合の双方を考え, この条件のもとで, 円形介在物を有する帯板が一軸引張りを受ける際の応力集中現象を Papkovitch-Neuber 型の変位調和関数を用いて解析する。さらに, 介在物近傍の応力状態を明らかにして強度設計のための基礎資料を提示する。

2. 解 析 法

図 1 に示すように座標系を定め, 介在物中心 O 点より帯板側面までの距離を 1 とし, 全ての長さの基準とする。また, O 点を座標原点として直角座標 (x, y)

* 原稿受付 2006 年 2 月 1 日。

¹ 正員, 茨城大学工学部 (〒316-8511 日立市中成沢町 4-12-1)。² 正員, 埼玉大学工学部 (〒338-8570 さいたま市桜区下大久保 255)。³ 学生員, 茨城大学大学院理工学研究科。

E-mail: horibe@mx.ibaraki.ac.jp

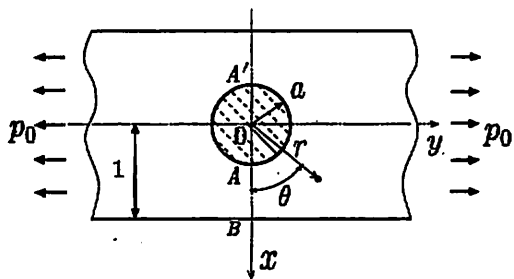


Fig. 1 Coordinate system

と極座標 (r, θ) を使用すれば、両座標間には、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

の関係があり、帯板側面は $x = \pm 1$ 、介在物境界面は $r = a$ で表わされる。

本研究では、以下に示す Papcovich-Neuber の変位関数 φ_0, φ_1 を用いる。直角座標における変位成分を表すと以下ようになる⁽¹⁷⁾。

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0 + x\varphi_1) - (\kappa + 1)\varphi_1 \\ 2Gv_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0 + x\varphi_1) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 u_x, v_y は x, y 方向の変位成分、 G は横弾性係数、 ν をポアソン比として、 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (平面応力)、 $\kappa = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ) である。また、変位関数 φ_0, φ_1 は調和関数であり $\nabla^2 \varphi_1 = 0, \nabla^2 \varphi_2 = 0$ である。式 (2) を極座標で示せば、以下ようになる。

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + r \cos \theta \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \kappa \cos \theta \cdot \varphi_1 \\ 2Gv_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \kappa \sin \theta \cdot \varphi_1 \end{aligned} \quad (3)$$

円形介在物を有する無限長帯板が無限遠方で y 軸方向に p_0 の引張り荷重を受ける場合の解を得るには、以下のような境界条件を満足する解を導けばよい。

(i) 帯板側面 $x = \pm 1$ で

$$(\sigma_x)_{x=\pm 1} = (\tau_{xy})_{x=\pm 1} = 0 \quad (4)$$

(ii) 介在物面 $r = a$ で

(a) 完全密着介在物の場合

$$\begin{aligned} (u_r)_{r=a} &= (\bar{u}_r)_{r=a}, \quad (v_\theta)_{r=a} = (\bar{v}_\theta)_{r=a} \\ (\sigma_r)_{r=a} &= (\bar{\sigma}_r)_{r=a}, \quad (\tau_{r\theta})_{r=a} = (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} \end{aligned} \quad (5)$$

(b) すべり介在物の場合

$$\begin{aligned} (u_r)_{r=a} &= (\bar{u}_r)_{r=a}, \quad (\sigma_r)_{r=a} = (\bar{\sigma}_r)_{r=a}, \\ (\tau_{r\theta})_{r=a} &= (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(iii) 無限遠方 $r = \infty$ で

$$\sigma_y = p_0, \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (7)$$

ここで、介在物の変位および応力などを $\bar{u}_r, \bar{v}_\theta, \bar{\sigma}_r, \dots$ などと表わし、介在物に関する物理量には、添字 $-$ を付すこととする。

はじめに、 O を原点に、変位関数 φ_0, φ_1 に次の調和関数を与える。

$$[I] \begin{cases} \varphi_0 = \frac{(\kappa + 1)p_0}{8}(y^2 - x^2) = -\frac{(\kappa + 1)p_0}{8}r^2 \cos 2\theta \\ \varphi_1 = -\frac{p_0}{2}x = -\frac{p_0}{2}r \cos \theta \end{cases} \quad (8)$$

変位関数 [I] より導かれる変位および応力成分は、

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= -\frac{3 - \kappa}{4}p_0x \\ 2Gv_y &= \frac{\kappa + 1}{4}p_0y \\ \sigma_y &= p_0, \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる。

この結果は、帯板の無限遠方において単位面積あたり p_0 の引張り荷重を帯板に対して y 軸方向に作用させたときの解となる。そこで、弾性体内に原点 O を中心とする半径 a の円を仮想すれば、この仮想円周上に生じている変位および応力は次のように表される。

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Gu_r}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{a}{2} \left(\frac{\kappa - 1}{2} - \cos 2\theta\right) \\ \left(\frac{2Gv_\theta}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{a}{2} \sin 2\theta \\ \left(\frac{\sigma_r}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \left(\frac{\sigma_\theta}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ \left(\frac{\tau_{r\theta}}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 G は母材の横弾性係数である。なお、介在物の横弾性係数を \bar{G} 、ポアソン比を $\bar{\nu}$ 、ポアソン比 $\bar{\nu}$ に関する量を $\bar{\kappa}$ と表す。

次に、母材側領域が円形介在物を除く無限板領域と帯板領域の共通部分から構成されていること、および介在物領域が円形領域であることに注目する。

境界条件 (i), (ii), (iii) を満たすために、母材側 ($r > a$) に対しては、極座標で表された調和関数と直角座標で表された調和関数とを用いて次のような変位関数を用いる。

$$[II] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \left(-A_0 \log r + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos 2m\theta}{r^{2m}} \right) \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{\cos (2m + 1)\theta}{r^{2m+1}} \end{cases} \quad (11)$$

$$[\text{III}] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \int_0^\infty \psi_1(\lambda) \cosh \lambda x \cos \lambda y d\lambda \\ \varphi_1 = p_0 \int_0^\infty \lambda \psi_2(\lambda) \sinh \lambda x \cos \lambda y d\lambda \end{cases} \quad (12)$$

介在物側 ($r < a$) に関しては、円形領域で正則な次の調和関数を与える。

$$[\text{IV}] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n r^{2n} \cos 2n\theta \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n r^{2n+1} \cos (2n+1)\theta \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 $A_m, B_m, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ 及び $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$ は、それぞれ境界条件より決定される未定係数および未知関数である。

計算を簡略化するため、変位関数 [II] を次のように分ける。

$$[\text{II}]1 \begin{cases} \varphi_0 = -p_0 A_0 \log r \end{cases} \quad (14)$$

$$[\text{II}]2 \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos 2m\theta}{r^{2m}} \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{\cos(2m+1)\theta}{r^{2m+1}} \end{cases} \quad (15)$$

なお、変位関数 [II], [III] より得られる応力は、無限遠方ですべて零となっているので、境界条件 (iii) は自動的に満足されている。

はじめに、帯板側面における境界条件 (i) を満足させるために、円柱座標と直角座標のもとの調和関数の関係式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos m\theta}{r^m} &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \frac{\sin m\theta}{r^m} &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{-\lambda x} \sin \lambda y d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (x > 0)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos m\theta}{r^m} &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \frac{\sin m\theta}{r^m} &= \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{\lambda x} \sin \lambda y d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (x < 0) \quad (16)$$

を用いて変位関数 [II] を座標変換すると、

$$[\text{II}^*] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{(2m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{2m-1} e^{-\lambda x} \\ \quad \times \cos \lambda y d\lambda \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{(2m)!} \int_0^\infty \lambda^{2m} e^{-\lambda x} \sin \lambda y d\lambda \end{cases} \quad (\text{for } x > 0) \quad (17)$$

$$[\text{II}^*] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{(2m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{2m-1} e^{\lambda x} \\ \quad \times \cos \lambda y d\lambda \\ \varphi_1 = -p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{(2m)!} \int_0^\infty \lambda^{2m} e^{\lambda x} \sin \lambda y d\lambda \end{cases} \quad (\text{for } x < 0) \quad (18)$$

となる。また、変位関数 [II] 1 については、直接座標変換する公式がないため、直角座標系における応力成分を求めると、式 (16) の形となる。そこで、それを座標変換すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{p_0} &= A_0 \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \frac{\tau_{xy}}{p_0} &= A_0 \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \sin \lambda y d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (x > 0) \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{p_0} &= A_0 \int_0^\infty \lambda e^{\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \\ \frac{\tau_{xy}}{p_0} &= -A_0 \int_0^\infty \lambda e^{\lambda x} \sin \lambda y d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (x < 0) \quad (20)$$

さらに、変位関数 [III], [II*] による応力成分を求め、帯板側面の境界条件を満足させると次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_x}{p_0} \right)_{x=\pm 1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[\psi_1(\lambda) \cosh \lambda - \psi_2(\lambda) \right. \\ &\times \left(\frac{\kappa+1}{2} \cosh \lambda - \lambda \sinh \lambda \right) \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{A_m}{|2m-1|!} \lambda^{2m-1} + \left(\frac{\kappa+1}{2} + \lambda \right) \frac{B_m}{(2m)!} \right. \\ &\times \left. \left. \lambda^{2m-1} \right\} e^{-\lambda} \right] \cos \lambda y d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mp \left(\frac{\tau_{xy}}{p_0} \right)_{x=\pm 1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[\psi_1(\lambda) \sinh \lambda - \psi_2(\lambda) \right. \\ &\times \left(\frac{\kappa-1}{2} \sinh \lambda - \lambda \cosh \lambda \right) \\ &- \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{A_m}{|2m-1|!} \lambda^{2m-1} + \left(\frac{\kappa-1}{2} + \lambda \right) \frac{B_m}{(2m)!} \right. \\ &\times \left. \left. \lambda^{2m-1} \right\} e^{-\lambda} \right] \sin \lambda y d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

次に、式 (21), (22) をフーリエ逆変換して未知関数を

求めると、

$$\psi_1(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{|2m-1|!} \lambda^{2m-1} \frac{\kappa - 2\lambda + e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{(2m)!} \lambda^{2m-1} \frac{\kappa^2 - 4\lambda^2 - 1}{2(\sinh 2\lambda + 2\lambda)} \quad (23)$$

$$\psi_2(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{|2m-1|!} \lambda^{2m-1} \frac{2}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{(2m)!} \lambda^{2m-1} \frac{\kappa + 2\lambda - e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda + 2\lambda} \quad (24)$$

となる。

式(23),(24)が成立すれば、帯板側面の境界条件式(4)は、未知係数 A_m, B_m の値に無関係に満足される。

次に、円孔面における境界条件式(ii)を満足させるために、直角座標と極座標のもとでの調和関数の変換式

$$\begin{aligned} \cosh \lambda x \cos \lambda y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda r)^{2n}}{(2n)!} \cos 2n\theta \\ \sinh \lambda x \cos \lambda y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda r)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(2n+1)\theta \end{aligned} \quad (25)$$

を用いて、変位関数 [III] を座標変換すると

$$[III^*] \begin{cases} \varphi_0 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^{2n} \cos 2n\theta \\ \varphi_1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n r^{2n+1} \cos(2n+1)\theta \end{cases} \quad (26)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^{\infty} \frac{\psi_1(\lambda) \lambda^{2n}}{(2n)!} d\lambda \\ \beta_n &= \int_0^{\infty} \frac{\psi_2(\lambda) \lambda^{2n+2}}{(2n+1)!} d\lambda \end{aligned} \quad (27)$$

であり、式(23), (24)を代入すれば

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{m=0}^{\infty} {}^m I_n A_m + \sum_{m=1}^{\infty} {}^m II_n B_m \\ \beta_n &= \sum_{m=0}^{\infty} {}^m III_n A_m + \sum_{m=1}^{\infty} {}^m IV_n B_m \end{aligned} \quad (28)$$

となる。ここで

$${}^m I_n = \frac{(2n+2m-1)!}{2^{2n+2m-1}(2n)!(2m-1)!} \left\{ \kappa I_{2n+2m-1} - (2n+2m)I_{2n+2m} + M_{2n+2m-1} \right\}$$

$${}^m II_n = \frac{(2n+2m-1)!}{2^{2n+2m-1}(2n)!(2m)!} \left\{ \frac{\kappa^2 - 1}{2} \times I_{2n+2m-1} - \frac{(2n+2m)(2n+2m+1)}{2} \times I_{2n+2m+1} \right\}$$

$${}^m III_n = \frac{(2n+2m+1)!}{2^{2n+2m}(2n+1)!(2m-1)!} I_{2n+2m+1}$$

$${}^m IV_n = \frac{(2n+2m+1)!}{2^{2n+2m+1}(2n+1)!(2m)!} \left\{ \kappa I_{2n+2m+1} + (2n+2m+2)I_{2n+2m+2} - M_{2n+2m+1} \right\} \quad (29)$$

である。式(29)中の I_k, M_k は、Howlandの積分と呼ばれ、

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{2^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} d\lambda \\ M_k &= \frac{2^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (30)$$

で定義される積分である。

そこで、変位関数 [I], [II], [III*], [IV] より変位と変位と応力を求め、介在物境界面の境界条件式(ii)を満足させると、例えば(a)の完全密着介在物の場合には

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Gu_r}{p_0} \right)_{r=a} &= -\frac{A_0}{a} - \frac{\kappa+1}{2} \frac{B_0}{a} \\ &\quad - \frac{\kappa-1}{2} \beta_0 a + \frac{\bar{\kappa}-1}{2\Gamma} \bar{B}_0 a \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2n}{a^{2n+1}} A_n - \left(n + \frac{\kappa-1}{2} \right) \frac{B_{n-1}}{a^{2n-1}} \right. \\ &\quad \left. - \left(n + \frac{\kappa+1}{2} \right) \frac{B_n}{a^{2n+1}} \right. \\ &\quad \left. + 2na^{2n-1} \alpha_n + \left(n - \frac{\kappa+1}{2} \right) a^{2n-1} \beta_{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(n - \frac{\kappa-1}{2} \right) a^{2n+1} \beta_n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma} \left\{ 2na^{2n-1} \bar{A}_n + \left(n - \frac{\bar{\kappa}+1}{2} \right) a^{2n-1} \bar{B}_{n-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(n - \frac{\bar{\kappa}-1}{2} \right) a^{2n+1} \bar{B}_n \right\} \right] \cos 2n\theta \\ &= -\frac{a(\kappa-1)}{4} + \frac{a}{2} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Gv_\theta}{p_0} \right)_{r=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2n}{a^{2n+1}} A_n - \left(n - \frac{\kappa+1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{B_{n-1}}{a^{2n-1}} - \left(n + \frac{\kappa+1}{2} \right) \frac{B_n}{a^{2n+1}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2na^{2n-1}\alpha_n - \left(n - \frac{\kappa+1}{2}\right)a^{2n-1}\beta_{n-1} \\
& - \left(n + \frac{\kappa+1}{2}\right)a^{2n+1}\beta_n \\
& + \frac{1}{\Gamma} \left\{ 2na^{2n-1}\bar{A}_n + \left(n - \frac{\bar{\kappa}+1}{2}\right)a^{2n-1}\bar{B}_{n-1} \right. \\
& \left. + \left(n + \frac{\bar{\kappa}+1}{2}\right)a^{2n+1}\bar{B}_n \right\} \sin 2n\theta \\
= & -\frac{a}{2} \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sigma_r}{p_0}\right)_{r=a} &= \frac{A_0}{a^2} + \frac{\kappa+1}{2} \frac{B_0}{a^2} - \beta_0 + \bar{B}_0 \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n(2n+1)}{a^{2n+2}} A_n + (n+1) \frac{2n-1}{a^{2n}} B_{n-1} \right. \\
& + \left(n + \frac{\kappa+1}{2}\right) \frac{2n+1}{a^{2n+2}} B_n + 2n(2n-1)a^{2n-2}\alpha_n \\
& + \left(n - \frac{\kappa+1}{2}\right) (2n-1)a^{2n-2}\beta_{n-1} \\
& + (n-1)(2n+1)a^{2n}\beta_n - 2n(2n-1)a^{2n-2}\bar{A}_n \\
& - \left(n - \frac{\bar{\kappa}+1}{2}\right) (2n-1)a^{2n-2}\bar{B}_{n-1} \\
& \left. - (n-1)(2n+1)a^{2n}\bar{B}_n \right] \cos 2n\theta \\
= & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\tau_{r\theta}}{p_0}\right)_{r=a} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n(2n+1)}{a^{2n+2}} A_n + \frac{n(2n-1)}{a^{2n}} B_{n-1} \right. \\
& + \left(n + \frac{\kappa+1}{2}\right) \frac{2n+1}{a^{2n+2}} B_n - 2n(2n-1)a^{2n-2}\alpha_n \\
& - \left(n - \frac{\kappa+1}{2}\right) (2n-1)a^{2n-2}\beta_{n-1} \\
& - n(2n+1)a^{2n}\beta_n + 2n(2n-1)a^{2n-2}\bar{A}_n \\
& + \left(n - \frac{\bar{\kappa}+1}{2}\right) (2n-1)a^{2n-2}\bar{B}_{n-1} \\
& \left. + n(2n+1)a^{2n}\bar{B}_n \right] \sin 2n\theta = -\frac{1}{2} \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{34}$$

を得る。ここで、 $\Gamma = \bar{G}/G$ であり、 $\Gamma = 0$ は円孔、 $\Gamma = \infty$ は剛介在物、 $\Gamma = 1$ は介在物のない帯板を表す。すべり介在物の場合も、境界条件式 (6) に基づいて同様な式が得られる。

α_n, β_n は、式 (28) によって A_n, B_n で表わされているので、これを式 (31) ~ (34) に代入すれば A_n, B_n に関する無限連立一次方程式が得られる。そして、この連立一次方程式を解いて係数 A_n, B_n を決定すれば、

解を得ることができる。すべての変位および応力は、変位関数 [I]~[IV] より導かれる各成分の一次結合によって得られる。

3. 数値計算

ポアソン比を $\nu = \bar{\nu} = 0.3$ とし、横弾性係数比 $\Gamma = 0, 0.5, 1.0, 2.0, \infty$ および介在物半径 $a = 0.1 \sim 0.8$ の場合について数値計算を行なった。また、本研究では平面応力問題として考え、 $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, $\bar{\kappa} = (3-\bar{\nu})/(1+\bar{\nu})$ とした。

すべての無限級数の収束は良好であるが、介在物半径 a が大きくなるにつれて次第に収束が悪くなる。そこで、母材と介在物の境界面での境界条件の精度が 0.1% 以下になるように、 $A_n, B_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ をそれぞれ 32 項用いて連立一次方程式を解いた。この結果、 $0 \leq a \leq 0.8$, $0 \leq \Gamma \leq \infty$ の範囲で、界面での境界条件が上述の精度で満足されることを確認した。以下、完全密着介在物の場合とすべり介在物の場合とに分けて数値解析結果を述べる。

3.1 完全密着介在物の場合 図 2 は、介在物の半径 a を 0.2, 0.6 とし、剛性比 Γ を 0, 0.5, 2.0, ∞ と変化させたときの、境界面の母材側応力 σ_θ の分布を示したものである。 Γ の値が大きくなるにつれ、応力の最大値が低下していくのがわかる。また、 $\Gamma = 0 \sim 2.0$ のときは点 $A, A'(\theta = 0, \pi)$ で応力が最大となるのに対して、 $\Gamma = \infty$ のときは $\theta = 90^\circ$ で最大値をとっている。

図 3 は、境界面の介在物側応力 $\bar{\sigma}_\theta$ の分布である。 $\Gamma > 1.0$ の場合に応力集中を生じ、 $\Gamma = \infty$ のとき最大値をとる。

図 4 は、介在物半径を $a = 0.2, 0.6$ と一定にし、 Γ をパラメータとして、 x 軸上の応力 σ_y および $\bar{\sigma}_y$ と x との関係を図示したものである。境界面の母材側において、 $\Gamma = 0 \sim 1.0$ のときに最大値をとり、 $\Gamma = 1.0 \sim \infty$ のときに最小値をとる。また、介在物側の応力はほぼ一定値をとる。

図 5 は、境界面の $\theta = 0^\circ$ における母材側応力 $(\sigma_\theta)_{r=a, \theta=0}$ を示したものである。 Γ の値が大きくなるにつれて応力集中係数の値が小さくなっていくのがわかる。

図 6 は、図 5 と同様に介在物側の $(\bar{\sigma}_\theta)_{r=a, \theta=0}$ を Γ をパラメータとして示したものである。 Γ の値が大きくなるにつれて応力集中係数の値が大きくなっていくのがわかる。

3.2 すべり介在物の場合 図 7 は、境界面の母材側応力 σ_θ の分布を示したものである。 a や Γ は図

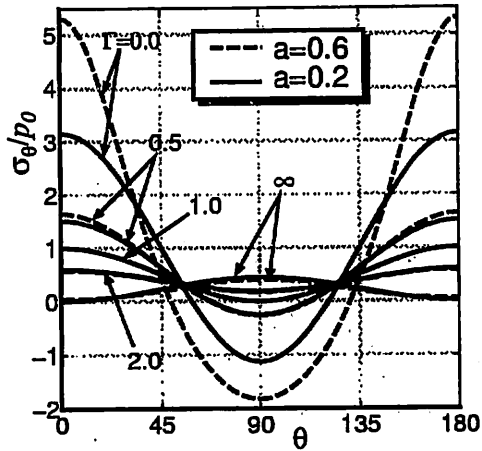


Fig. 2 Variations of stress σ_θ on the interface with θ (Perfect bonding)

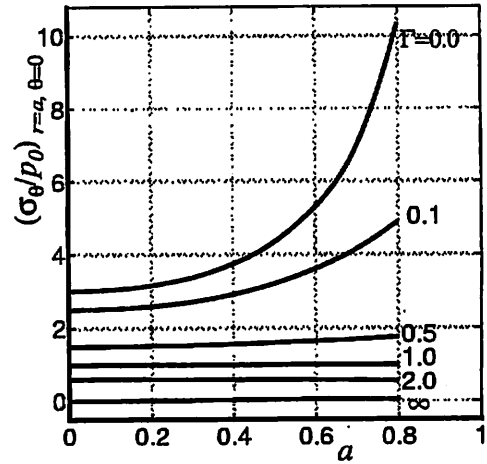


Fig. 5 Variations of stress $(\sigma_\theta)_{r=a, \theta=0}$ on x-axis with a (Perfect bonding)

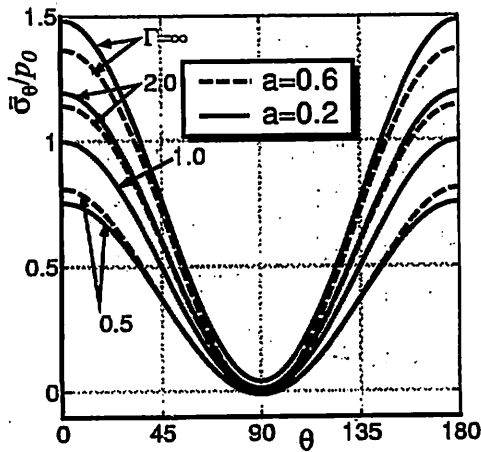


Fig. 3 Variations of stress $\bar{\sigma}_\theta$ on the interface with θ (Perfect bonding)

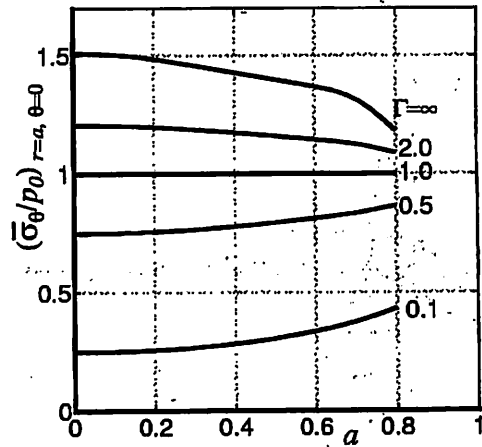


Fig. 6 Variations of stress $(\bar{\sigma}_\theta)_{r=a, \theta=0}$ on x-axis with a (Perfect bonding)

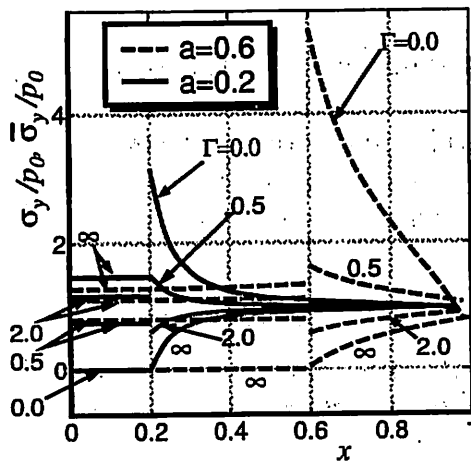


Fig. 4 Variations of stresses $\bar{\sigma}_y$ and σ_y on x-axis with x (Perfect bonding)

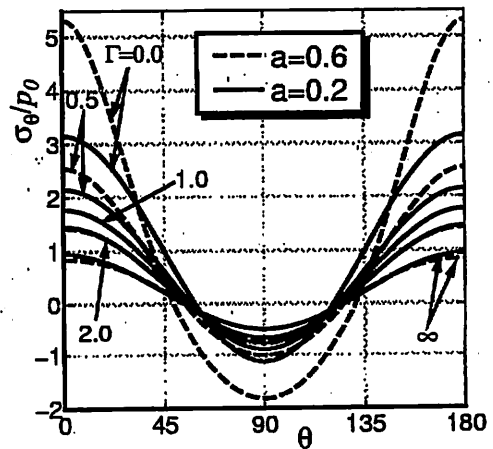


Fig. 7 Variation of σ_θ on the interface with θ (Sliding interface)

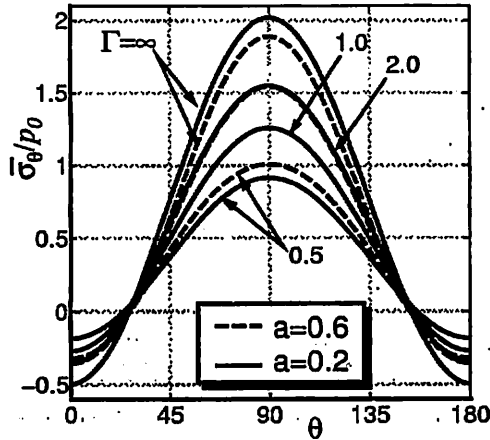


Fig. 8 Variation of $\bar{\sigma}_\theta$ on the interface with θ (Sliding interface)

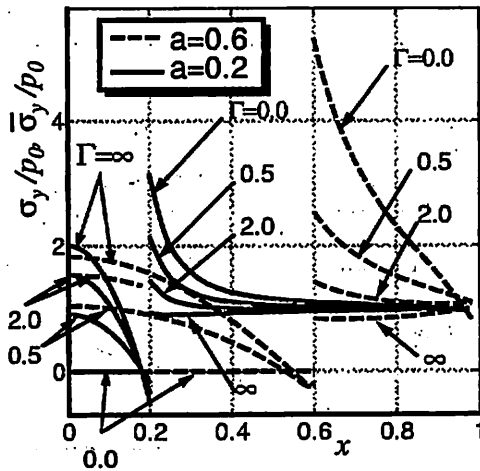


Fig. 9 Variation of stresses $\bar{\sigma}_y$ and σ_y on x -axis with x (Sliding interface)

2と同様である。図2と同様に介在物が母材の応力集中を緩和している様子がわかるが、完全密着条件下の結果と比べると緩和の程度は低い。

図8は、境界面の介在物側応力 $\bar{\sigma}_\theta$ の分布である。 $\theta = 90^\circ$ で最大となり、その値は Γ が大きい程大きい。

図9は、 x 軸上の応力 $\bar{\sigma}_y$ および σ_y の分布を図示したものである。介在物半径を $a = 0.2, 0.6$ とし、 Γ をパラメータとして示した。完全密着条件下の結果とは異なり、介在物内では曲線的に変化し、境界面では圧縮応力となる。一方、母材側では、 Γ が大きくなると応力集中現象が緩和されるが、完全密着条件ほどの緩和効果は得られない。

図10は、境界面の $\theta = 0^\circ$ における母材側応力 $(\sigma_\theta)_{r=a, \theta=0}$ を示したものである。 Γ が大きくなるにつれて応力集中係数は小さくなるが、図9と同様、完

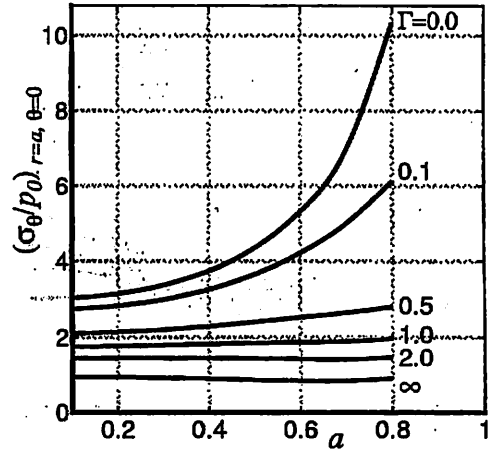


Fig. 10 Variation of $(\sigma_\theta)_{r=a, \theta=0}$ at the interface with a (Sliding interface)

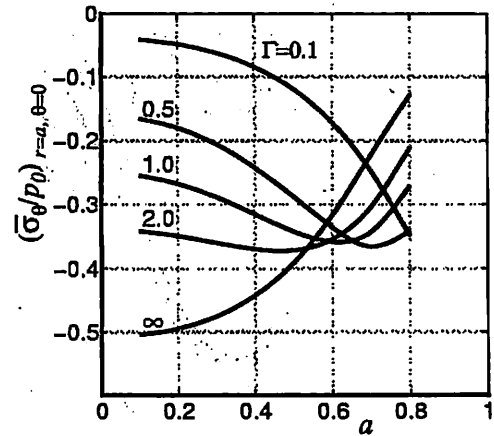


Fig. 11 Variation of $(\bar{\sigma}_\theta)_{r=a, \theta=0}$ at the interface with a (Sliding interface)

全密着の場合に比べて応力集中が緩和される程度は小さい。

図11は、図10と同様に介在物側の $(\bar{\sigma}_\theta)_{r=a, \theta=0}$ を Γ をパラメータとして示したものである。それらの応力値は全体的に小さいが、圧縮応力になっていることがわかる。

4. 結 論

一個の円形介在物を有する帯板が一軸引張りを受ける問題を二次元弾性理論に基づいて厳密に解析する手法を示すとともに、数値計算によって介在物が弾性母材に及ぼす影響や介在物の接着条件による応力分布の相違などを明らかにした。得られた結果を要約すると以下ようになる。

(1) 介在物の母材に対する剛性比 Γ は、応力の分布および大きさに大きく影響を及ぼす。

(2) 最大応力は $r = a, \theta = 0$ で生じ、介在物が母材より柔らかい場合 ($\Gamma < 1$) には界面の母材側に、介在物が母材より硬い場合 ($\Gamma > 1$) には界面の介在物側に生ずる。

(3) 介在物を挿入することで応力集中は著しく緩和される。 Γ かつ介在物半径 a が大きいほどその効果は著しい。また、その緩和の効果は、完全密着介在物の場合がすべり介在物の場合に比べて大きい。

最後に、著者らの一連の研究に対して常に励ましを与えて下さっている上野 誠 茨城高専名誉教授に対し、記して謝意を表します。

文 献

- (1) S. Shioya, On a Semi-Infinite Thin Plate with a Circular Inclusion under Uniform Tension, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), Vol.32, No.236 (1966), pp.593-600.
- (2) S. Shioya, On the Stress Concentrations in a Semi-Infinite Plate Containing a Circular Inclusion under Partial Loading along the Straight Boundary, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), 39-320 (1973), pp.1122-1129.
- (3) M. Lee, I. Jasiuk, and E. Tsuchida, The Sliding Circular Inclusion in an Elastic Half-Plane, Trans. A.S.M.E., J. of Appl. Mech., Vol.59(1992), pp.57-64.
- (4) E. Tsuchida, Y. Arai, and T. Hashimoto, Stresses in a Semi-Infinite Plate Containing an Elliptic Inhomogeneity Normal to the Straight Edge under Uniaxial Tension, Theoretical and Appl. Mech., Vol.50(2001), pp.145-156.
- (5) H. Hasegawa and K. Kumamoto, Stress Concentration of a Strip with an Elliptic Inclusion Under Tension, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), 55-511, A (1989), pp.515-522.
- (6) I. Mizushima, M. Hamada and T. Syakudo, Tensile and Compressive Stress Problems of a Rigid Circular Disk in an Infinite Plate, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), 47-377, A (1978), pp.15-21.
- (7) I. Mizushima and M. Hamada, Stress Analysis around Circular Hole in Infinite Plate with Rigid Disk: Case of Load Subjected to Disk, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), 48-436, A (1982), pp.1544-1550.
- (8) T. Yamamoto and T. Tsumura, Elastic Analysis of Partial Contact Problems in Uniaxially Loaded Plate with Interference-Fit Disk, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), 52-475, A (1986), pp.601-607.
- (9) K. Kawashima, E. Tsuchida, and I. Nakahara, Stresses in an Elastic Circular Cylinder Having a Spherical Inclusion under Tension, Theoretical and Appl. Mech., Vol.27(1977), pp.79-89.
- (10) K. Kawashima, E. Tsuchida and I. Nakahara, Stresses in a Circular Cylinder having a Spherical Inclusion under Transverse Bending, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), 45-392, A (1979), pp.397-405.
- (11) H. Kasano, H. Matsumoto and I. Nakahara, Tension of an Infinite Body Having a Rigid Cylindrical Inclusion of Finite Length, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), 47-413, A (1981), pp.18-24.
- (12) T. Horibe, E. Tsuchida, and T. Uchiyama, Stresses in a Circular Cylinder with a Prolate Spheroidal Inclusion under Torsion, Theoretical and Appl. Mech., Vol.35(1987), pp.313-320.
- (13) E. Tsuchida, Y. Arai and Y. Zheng, Stresses in a Thick Plate Containing an Oblate Spheroidal Inclusion Under Axisymmetric Bending, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), 68-668, A (2002), pp.631-637.
- (14) E. Tsuchida, Y. Arai and N. Tanaka, BEM Analysis of the Stresses in an Elastic Half-plane Containing a Sliding Elliptic Inclusion, Trans. of JASCOME, J. of BEM, Vol.14(1997), pp.111-116.
- (15) E. Tsuchida, Y. Arai and Y. Takakubo, Nonlinear Analysis of the Stresses in an Elastic Semi-infinite Plate Containing a Sliding Elliptic Inclusion with Frictional Interface, Trans. of JASCOME, J. of BEM, Vol.16(1999-12), pp.19-24.
- (16) N. Noda and Y. Moriyama, Stress Concentration of an Ellipsoidal Inclusion of Revolution in a Semi-Infinite Body under Biaxial Tension, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), 69-677, A(2003-1), pp.160-165.
- (17) I. Nakahara, H. Shibuya, E. Tsuchida, T. Tsuji and Y. Inoue, Hand Book of Elasticity, (2001), p.284, Asakura Book Co.