

円形介在物を有する帯板の面内曲げ*

堀 辺 忠 志*¹, 土 田 栄 一 郎*²
荒 居 善 雄*², 福 村 昌 宏*³

In-Plane Bending of an Infinite Strip with a Circular Inclusion

Tadashi HORIBE*⁴, Eiichirou TSUCHIDA,
Yoshio ARAI and Masahiro FUKUMURA*⁴ Department of Mechanical Engineering, Ibaraki University,
4-12-1 Nakanarusawa-cho, Hitachi-shi, Ibaraki, 316-8511 Japan

This paper contains an analysis of the stress and displacement distribution arising in a strip with a circular inclusion when the strip is subjected to bending at infinity. Two types of inclusion, i.e., perfect bonding and sliding inclusion are treated in this paper. The solution which is based on the Papkovitch-Neuber displacement potentials is obtained by combining the harmonic potentials in integral forms and infinite series. The boundary conditions of the problem are fully satisfied using the relationships between the harmonic functions of Cartesian and polar coordinates. The effect of the inclusion on the stress and displacement are given in the form of graphs to show the availability of the present method.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Infinite Strip, Circular Inclusion, Bending

1. 結 論

近年、繊維強化プラスチック (FRP)、繊維強化金属 (MMC)、傾斜機能材料 (FGM)、セラミックスなど種々の先端複合材料が開発され、様々な用途に用いられるようになった。このような複合材料の強度は介在物の大きさ、弾性定数、形状、作用する荷重の種類などに大きく依存することが知られている。したがって、界面における応力集中現象を明らかにすることは、複合材料の強度を考える上で非常に重要であり、これまでに多くの研究^{(1)~(14)}がなされてきた。

これらの介在物問題の研究の多くは、介在物と母材が完全密着である場合を扱っている。しかしながら、実際の材料中の介在物は母材に完全に密着しているのではなく、すべりやはく離を有することもある。このため、界面でのすべりやはく離を考慮した介在物の応力状態を調べることも重要な課題である。さて、介在物問題を解析する際には、一般に境界面の変位を求めることが必要となる。しかしながら、よく知られている Airy の応力関数を用いて介在物に関する平面問題を

を解析するときには、応力関数の積分を行って変位を求める必要があり、この計算が煩雑である。その一方、Papkovitch-Neuber 型の変位調和関数⁽⁹⁾を用いれば、応力と変位が同時に計算されるために、介在物問題を解析する場合には変位調和関数を用いることが好都合である。

そこで本研究では、介在物が境界面において母材に完全密着する場合およびすべりを有する場合の双方を考え、この条件のもとで、円形介在物を有する帯板が面内の曲げモーメントを受ける際の応力集中現象を Papkovitch-Neuber 型の変位調和関数を用いて解析する。さらに、介在物近傍の応力状態を明らかにして強度設計のための資料を提示する。

2. 解 析 法

図 1 に示すように座標系を定め、介在物中心 O 点より帯板両面までの距離を 1 とし、全ての長さをこれを基準としてとるものとする。また、O 点を座標原点として直角座標 (x, y) と極座標 (r, θ) を使用すれば、両座標間には、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

の関係があり、帯板両面は $x = \pm 1$ 、介在物境界面は $r = a$ で表わされる。

* 原稿受付 2006年1月30日。

¹ 正員、茨城大学工学部(〒316-8511 日立市中成沢町4-12-1)。² 正員、埼玉大学工学部(〒338-8570 さいたま市桜区下大久保255)。³ 茨城大学大学院理工学研究科[現:(株)サンエンジー(〒316-0024 日立市水木町2-5-18)]。

E-mail: horibe@mx.ibaraki.ac.jp

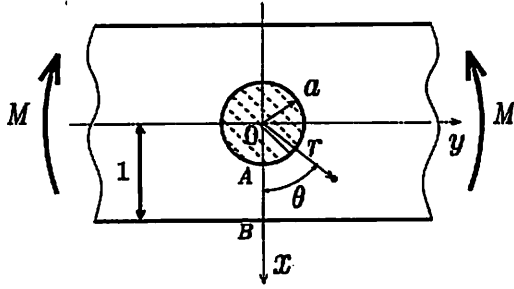


Fig. 1 Coordinate system

本研究では、Papcovich-Neuber の変位関数 φ_0, φ_1 を用いる。この変位関数に基づいて直角座標における変位成分を表すと、以下のようになる⁽¹⁵⁾。

$$\begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0 + x\varphi_1) - (\kappa + 1)\varphi_1 \\ 2Gv_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0 + x\varphi_1) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 u_x, v_y は x, y 方向の変位成分、 G は横弾性係数、 ν をポアソン比として、 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (平面応力)、 $\kappa = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ) である。また、変位関数 φ_0, φ_1 は調和関数であり $\nabla^2 \varphi_1 = 0, \nabla^2 \varphi_2 = 0$ である。式 (2) を極座標で示せば、以下のようになる。

$$\begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + r \cos \theta \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \kappa \cos \theta \cdot \varphi_1 \\ 2Gv_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \kappa \sin \theta \cdot \varphi_1 \end{aligned} \quad (3)$$

まず、介在物がない帯板に面内曲げモーメント M を作用させた場合を考えると、この解は次の変位関数によって与えられる。

$$[I] \begin{cases} \varphi_0 = -\frac{\kappa - 1}{24} k(x^3 - 3xy^2) = -\frac{\kappa - 1}{24} kr^3 \cos 3\theta \\ \varphi_1 = -\frac{k}{4}(x^2 - y^2) = -\frac{k}{4}r^2 \cos 2\theta \end{cases} \quad (4)$$

変位関数 [I] より導かれる変位および応力成分を極座標および直角座標表示すると、

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{1}{8}kr^2\{(\kappa - 2)\cos\theta - \cos 3\theta\} \\ 2Gv_\theta &= \frac{1}{8}kr^2\{(\kappa + 2)\sin\theta + \sin 3\theta\} \\ \sigma_r &= \frac{1}{4}kr(\cos\theta - \cos 3\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{4}kr(3\cos\theta + \cos 3\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{4}kr(\sin\theta + \sin 3\theta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= -\frac{1}{8}k\{(3 - \kappa)x^2 + (1 + \kappa)y^2\} \\ 2Gv_y &= \frac{1}{4}k(\kappa + 1)xy \\ \sigma_x &= 0, \quad \sigma_y = kx, \quad \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。ここに、 k は曲げ勾配を表し、 $k = 3M/2$ である。

したがって、以下のような境界条件を満足する解を導けば、円形介在物を有する帯板が無限遠方で曲げモーメント M を受ける場合の解が得られる。

(i) 帯板側面 $x = \pm 1$ で

$$(\sigma_x)_{x=\pm 1} = (\tau_{xy})_{x=\pm 1} = 0 \quad (7)$$

(ii) 介在物面 $r = a$ で

(a) 完全密着介在物の場合

$$\begin{aligned} (u_r)_{r=a} &= (\bar{u}_r)_{r=a}, \quad (v_\theta)_{r=a} = (\bar{v}_\theta)_{r=a} \\ (\sigma_r)_{r=a} &= (\bar{\sigma}_r)_{r=a}, \quad (\tau_{r\theta})_{r=a} = (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} \end{aligned} \quad (8)$$

(b) すべり介在物の場合

$$\begin{aligned} (u_r)_{r=a} &= (\bar{u}_r)_{r=a}, \quad (\sigma_r)_{r=a} = (\bar{\sigma}_r)_{r=a}, \\ (\tau_{r\theta})_{r=a} &= (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

(iii) 無限遠方 $r = \infty$ で

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = kx, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (10)$$

ここで、介在物の変位および応力などを $\bar{u}_r, \bar{v}_\theta, \bar{\sigma}_r, \dots$ などと表わして介在物に関する物理量には、添字 $-$ を付すこととする。

そこで、境界条件 (i), (ii), (iii) を満たすために、母材領域および介在物領域の変位関数 φ_0, φ_1 に次の調和関数を与える。

母材領域 ($r > a$) において

$$[II] \begin{cases} \varphi_0 = k \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\cos(2m+1)\theta}{r^{2m+1}} \\ \varphi_1 = k \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\cos 2m\theta}{r^{2m}} \end{cases} \quad (11)$$

$$[III] \begin{cases} \varphi_0 = k \int_0^{\infty} \psi_1(\lambda) \sinh \lambda x \cos \lambda y \, d\lambda \\ \varphi_1 = k \int_0^{\infty} \lambda \psi_2(\lambda) \cosh \lambda x \cos \lambda y \, d\lambda \end{cases} \quad (12)$$

介在物領域 ($r < a$) において

$$[IV] \begin{cases} \varphi_0 = k \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n r^{2n+1} \cos(2n+1)\theta \\ \varphi_1 = k \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n r^{2n} \cos 2n\theta \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 $A_m, B_m, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ および $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$ は、それぞれ境界条件より決定される未定係数および未知関数である。

なお、変位関数 [II], [III] より得られる応力は、無限遠方ですべて零となっているので、境界条件 (iii) は自動的に満足されている。

はじめに、帯板側面における境界条件 (i) を満足させるために、極座標と直角座標のもとでの調和関数の関係式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos m\theta}{r^m} &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{-\lambda x} \cos \lambda y \, d\lambda \\ \frac{\sin m\theta}{r^m} &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{-\lambda x} \sin \lambda y \, d\lambda \end{aligned} \right\} (x > 0)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos m\theta}{r^m} &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{\lambda x} \cos \lambda y \, d\lambda \\ \frac{\sin m\theta}{r^m} &= \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{m-1} e^{\lambda x} \sin \lambda y \, d\lambda \end{aligned} \right\} (x < 0)$$

(14)

を用いて変位関数 [II] を座標変換すると、

$$[II^*] \begin{cases} \varphi_0 = k \sum_{m=0}^\infty \frac{A_m}{(2m)!} \int_0^\infty \lambda^{2m} e^{-\lambda x} \cos \lambda y \, d\lambda \\ \varphi_1 = k \sum_{m=1}^\infty \frac{B_m}{(2m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{2m-1} e^{-\lambda x} \cos \lambda y \, d\lambda \end{cases}$$

(for $x > 0$)

$$[II^*] \begin{cases} \varphi_0 = -k \sum_{m=0}^\infty \frac{A_m}{(2m)!} \int_0^\infty \lambda^{2m} e^{\lambda x} \cos \lambda y \, d\lambda \\ \varphi_1 = k \sum_{m=1}^\infty \frac{B_m}{(2m-1)!} \int_0^\infty \lambda^{2m-1} e^{\lambda x} \cos \lambda y \, d\lambda \end{cases}$$

(for $x < 0$)

(15)

となる。

さらに、変位関数 [III], [II*] による応力成分を求め、帯板両面の境界条件を満足させると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \pm \left(\frac{\sigma_x}{k} \right)_{x=\pm 1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[\psi_1(\lambda) \sinh \lambda - \psi_2(\lambda) \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\kappa+1}{2} \sinh \lambda - \lambda \cosh \lambda \right) \right. \\ &+ \left. \left\{ \sum_{m=0}^\infty \frac{A_m}{(2m)!} \lambda^{2m} + \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{\kappa+1}{2} + \lambda \right) \frac{B_m}{(2m-1)!} \right. \right. \\ &\times \left. \left. \lambda^{2m-2} \right\} e^{-\lambda} \right] \cos \lambda y \, d\lambda = 0 \end{aligned}$$

(16)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{xy}}{k} \right)_{x=\pm 1} &= \int_0^\infty \lambda^2 \left[-\psi_1(\lambda) \cosh \lambda + \psi_2(\lambda) \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\kappa-1}{2} \cosh \lambda - \lambda \sinh \lambda \right) \right. \\ &+ \left. \left\{ \sum_{m=0}^\infty \frac{A_m}{(2m)!} \lambda^{2m} + \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{\kappa-1}{2} + \lambda \right) \frac{B_m}{(2m-1)!} \right. \right. \\ &\times \left. \left. \lambda^{2m-2} \right\} e^{-\lambda} \right] \sin \lambda y \, d\lambda = 0 \end{aligned}$$

(17)

式 (16), (17) にフーリエ逆変換をほどこし、未知関数を求めると、

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty \frac{A_m}{(2m)!} \lambda^{2m} \frac{\kappa - 2\lambda - e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} \\ &+ \sum_{m=1}^\infty \frac{B_m}{(2m-1)!} \lambda^{2m-2} \frac{\kappa^2 - 4\lambda^2 - 1}{2(\sinh 2\lambda - 2\lambda)} \end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned} \psi_2(\lambda) &= \sum_{m=0}^\infty \frac{A_m}{(2m)!} \lambda^{2m} \frac{2}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} \\ &+ \sum_{m=1}^\infty \frac{B_m}{(2m-1)!} \lambda^{2m-2} \frac{\kappa + 2\lambda + e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} \end{aligned}$$

(19)

となる。

式 (18), (19) が成立すれば、帯板両面の境界条件式 (7) は、未知係数 A_m, B_m の値に無関係に満足される。

次に、円孔面における境界条件式 (ii) を満足させるために、直角座標と極座標のもとでの調和関数の変換式

$$\begin{aligned} \cosh \lambda x \cos \lambda y &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda r)^{2n}}{(2n)!} \cos 2n\theta \\ \sinh \lambda x \cos \lambda y &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda r)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(2n+1)\theta \end{aligned}$$

(20)

を用いて、変位関数 [III] を座標変換すると

$$[III^*] \begin{cases} \varphi_0 = k \sum_{n=1}^\infty \alpha_n r^{2n+1} \cos(2n+1)\theta \\ \varphi_1 = k \sum_{n=1}^\infty \beta_n r^{2n} \cos 2n\theta \end{cases}$$

(21)

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^\infty \frac{\psi_1(\lambda) \lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} d\lambda \\ \beta_n &= \int_0^\infty \frac{\psi_2(\lambda) \lambda^{2n+1}}{(2n)!} d\lambda \end{aligned}$$

(22)

であり、式 (18), (19) を代入すれば

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{m=0}^\infty {}^m I_n A_m + \sum_{m=1}^\infty {}^m II_n B_m \\ \beta_n &= \sum_{m=0}^\infty {}^m III_n A_m + \sum_{m=1}^\infty {}^m IV_n B_m \end{aligned}$$

(23)

となる。ここで

$$\begin{aligned} {}^m I_n &= \frac{(2n+2m+1)!}{2^{2n+2m+1} (2n+1)! (2m)!} \left\{ \kappa I_{2n+2m+1} \right. \\ &\quad \left. - (2n+2m+2) I_{2n+2m+2} - M_{2n+2m+1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^m\Pi_n &= \frac{(2n+2m-1)!}{2^{2n+2m}(2n+1)!(2m-1)!} \left\{ (\kappa^2 - 1) \right. \\
&\quad \times I_{2n+2m-1} - (2n+2m+1) \\
&\quad \times (2n+2m)I_{2n+2m+1} \left. \right\} \\
{}^m\text{III}_n &= \frac{(2n+2m+1)!}{2^{2n+2m}(2n)!(2m)!} I_{2n+2m+1} \\
{}^m\text{IV}_n &= \frac{(2n+2m-1)!}{2^{2n+2m-1}(2n)!(2m-1)!} \left\{ \kappa I_{2n+2m-1} \right. \\
&\quad \left. + (2n+2m)I_{2n+2m} + M_{2n+2m-1} \right\}
\end{aligned} \quad (24)$$

である。式(24)中の I_k, M_k は、Howlandの積分と呼ばれ、

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{2^k}{k!} \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} d\lambda \\
M_k &= \frac{2^k}{k!} \int_0^\infty \frac{\lambda^k e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda - 2\lambda} d\lambda
\end{aligned} \quad (25)$$

で定義される積分である。

そこで、変位関数 [I], [II], [III*], [IV] より変位と応力を求め、介在物境界面の境界条件式(ii)を満足させると、例えば(a)の完全密着介在物の場合には

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2Gu_r}{k} \right)_{r=a} &= - \left\{ \frac{1}{a^2} A_0 + \frac{\kappa+2}{2a^2} B_1 + \frac{1}{2} (\kappa-2) \beta_1 a^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma} \bar{A}_0 - \frac{1}{2\Gamma} (\bar{\kappa}-2) \bar{B}_1 a^2 \right\} \cos \theta \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[- \frac{2n+1}{a^{2n+2}} A_n - \frac{2n+\kappa}{2a^{2n}} B_n - \frac{2n+\kappa+2}{2a^{2n+2}} B_{n+1} \right. \\
&\quad \left. + (2n+1) \alpha_n a^{2n} + \frac{1}{2} (2n-\kappa) \beta_n a^{2n} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (2n-\kappa+2) \beta_{n+1} a^{2n+2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma} \left\{ (2n+1) \bar{A}_n a^{2n} + \frac{1}{2} (2n-\bar{\kappa}) \bar{B}_n a^{2n} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (2n-\bar{\kappa}+2) \bar{B}_{n+1} a^{2n+2} \right\} \right] \cos(2n+1)\theta \\
&= - \frac{1}{8} a^2 \{ (\kappa-2) \cos \theta - \cos 3\theta \}
\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2Gv_\theta}{k} \right)_{r=a} &= - \left\{ \frac{1}{a^2} A_0 + \frac{\kappa+2}{2a^2} B_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\kappa+2) \beta_1 a^2 - \frac{1}{\Gamma} \bar{A}_0 - \frac{1}{2\Gamma} (\bar{\kappa}+2) \bar{B}_1 a^2 \right\} \sin \theta \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[- \frac{2n+1}{a^{2n+2}} A_n - \frac{2n-\kappa}{2a^{2n}} B_n - \frac{2n+\kappa+2}{2a^{2n+2}} \right. \\
&\quad \times B_{n+1} - (2n+1) \alpha_n a^{2n} - \frac{1}{2} (2n-\kappa) \beta_n a^{2n} \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (2n+\kappa+2) \beta_{n+1} a^{2n+2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma} \left\{ (2n+1) \bar{A}_n a^{2n} + \frac{1}{2} (2n-\bar{\kappa}) \bar{B}_n a^{2n} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad \left. + \frac{1}{2} (2n+\bar{\kappa}+2) \bar{B}_{n+1} a^{2n+2} \right\} \sin(2n+1)\theta \\
&= - \frac{1}{8} a^2 \{ (\kappa+2) \sin \theta + \sin 3\theta \}
\end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sigma_r}{k} \right)_{r=a} &= \left(\frac{2}{a^3} A_0 + \frac{\kappa+2}{a^3} B_1 - \beta_1 a + \bar{B}_1 a \right) \cos \theta \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(n+1)(2n+1)}{a^{2n+3}} A_n + \frac{n(2n+3)}{a^{2n+1}} B_n \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n+1)(\kappa+2n+2)}{a^{2n+3}} B_{n+1} + 2n(2n+1) \alpha_n a^{2n-1} \right. \\
&\quad \left. + n(2n-\kappa) \beta_n a^{2n-1} + (n+1)(2n-1) \beta_{n+1} a^{2n+1} \right. \\
&\quad \left. - 2n(2n+1) \bar{A}_n a^{2n-1} - n(2n-\bar{\kappa}) \bar{B}_n a^{2n-1} \right. \\
&\quad \left. - (n+1)(2n-1) \bar{B}_{n+1} a^{2n+1} \right\} \cos(2n+1)\theta \\
&= - \frac{1}{4} a (\cos \theta - \cos 3\theta)
\end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\tau_{r\theta}}{k} \right)_{r=a} &= \left(\frac{2}{a^3} A_0 + \frac{\kappa+2}{a^3} B_1 - \beta_1 a + \bar{B}_1 a \right) \sin \theta \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(n+1)(2n+1)}{a^{2n+3}} A_n + \frac{n(2n+1)}{a^{2n+1}} B_n \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n+1)(\kappa+2n+2)}{a^{2n+3}} B_{n+1} - 2n(2n+1) \alpha_n a^{2n-1} \right. \\
&\quad \left. - n(2n-\kappa) \beta_n a^{2n-1} - (n+1)(2n+1) \beta_{n+1} a^{2n+1} \right. \\
&\quad \left. + 2n(2n+1) \bar{A}_n a^{2n-1} + n(2n-\bar{\kappa}) \bar{B}_n a^{2n-1} \right. \\
&\quad \left. + (n+1)(2n+1) \bar{B}_{n+1} a^{2n+1} \right\} \sin(2n+1)\theta \\
&= - \frac{1}{4} a (\sin \theta + \sin 3\theta)
\end{aligned} \quad (29)$$

を得る。ここで、 $\Gamma = \bar{G}/G$ であり、 $\Gamma = 0$ は円孔、 $\Gamma = \infty$ は剛体介在物、 $\Gamma = 1$ は介在物のない帯板を表す。すべり介在物の場合も、境界条件式(9)に基づいて同様な式が得られる。

α_n, β_n は、式(23)によって A_n, B_n で表わされているので、これを式(26)~(29)に代入すれば A_n, B_n に関する無限連立一次方程式が得られる。そして、この連立一次方程式を解いて係数 A_n, B_n を決定すれば、解を得ることができる。すべての変位および応力は、変位関数 [I]~[IV] より導かれる各成分の一次結合によって得られる。

3. 数値計算

ポアソン比を $\nu = \bar{\nu} = 0.3$ とし、横弾性係数比 $\Gamma = 0, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, \infty$ および介在物半径 $a = 0.0 \sim 0.8$ の場合について数値計算を行なった。また、本研究では平面応力問題として考え、 $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, $\bar{\kappa} = (3-\bar{\nu})/(1+\bar{\nu})$ とした。

すべての無限級数の収束は良好であるが、介在物半径 a が大きくなるにつれて次第に収束が悪くなる。そこで、応力値の精度が有効数字3けた以上になるように、 $a = 0.6$ 以下では $A_n, B_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ をそれぞれ15項、 $a = 0.8$ ではそれぞれ40項用いて連立一次方程式を解いた。以下、完全密着介在物の場合とすべり介在物の場合とに分けて数値解析結果を述べる。

3.1 完全密着介在物の場合 図2は、介在物の半径 a を0.2, 0.6とし、剛性比 Γ を0, 0.5, 2.0, ∞ と変化させたときの、境界面の母材側応力 σ_θ の分布を示したものである。 $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ の位置の応力の大きさが Γ の増大とともに低下し、介在物が母材の応力集中を緩和している様子がわかる。特に、介在物半径が大きい場合にその緩和の程度は著しくなる。

図3は、境界面の介在物側応力 $\bar{\sigma}_\theta$ の分布である。 $\Gamma > 1.0$ の場合に応力集中を生じ、 $\Gamma = \infty$ のとき最大値をとる。

図4は、 x 軸上の応力 $\bar{\sigma}_y$ および σ_y の分布を図示したものである。介在物半径を $a = 0.2, 0.6$ とし、 Γ をパラメータとして示した。介在物内では、介在物半径、横弾性係数比にかかわらずほぼ直線的に増加していることがわかる。一方、母材側では、 $\Gamma < 1.0$ において境界面で応力集中現象を生じ、帯板側面に近づくにつれ $\sigma_y = kx$ のグラフに漸近する様子が示されている。 $\Gamma > 1.0$ としたときの母材側では、応力集中現象は見られず、介在物挿入により応力集中が著しく緩和されることがわかる。

図5は、境界面 $r = a$ の $\theta = 0^\circ$ における母材側応力 $(\sigma_\theta)_{r=a, \theta=0}$ を示したものである。 $\Gamma > 1.0$ では介在物半径の増大とともに緩やかに増加するのに対し、 $\Gamma < 1.0$ では半径の増大とともに著しく増加する。特に、 $\Gamma = \infty$ ではほぼ一定の値をとることがわかる。

図6は、図5と同様に介在物側の $(\bar{\sigma}_\theta)_{r=a, \theta=0}$ を Γ をパラメータとして示したものである。図5とは逆に、 Γ が大きい程高い値を示す。特に、 $\Gamma = \infty$ のときに $a = 0.68$ 近傍で最大値をとっている。

3.2 すべり介在物の場合 図7は、境界面の母材側応力 σ_θ の分布を示したものである。 a や Γ は図2と同様である。図2と同様に介在物が母材の応力集中を緩和している様子が示されているが、完全密着条件下での結果と比べると緩和の程度は低い。

図8は、境界面の介在物側応力 $\bar{\sigma}_\theta$ の分布である。 $\theta = 60^\circ, 120^\circ$ 付近で最大となり、その値は Γ が大きい程大きい、母材側の σ_θ の最大値よりは小さい。

図9は、 x 軸上の応力 $\bar{\sigma}_y, \sigma_y$ の分布を図示したものである。介在物半径を $a = 0.2, 0.6$ とし、 Γ をパラ

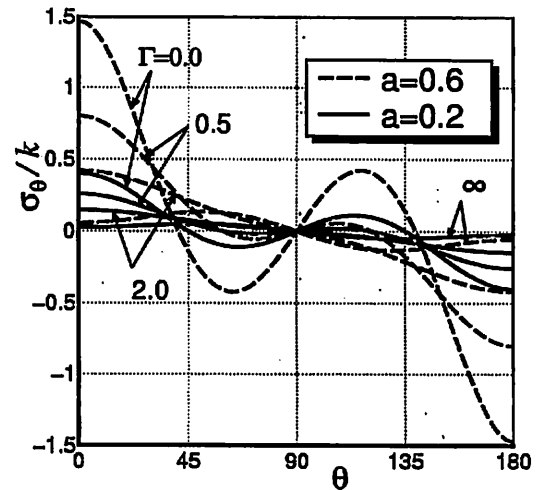


Fig. 2 Variations of stress σ_θ on the interface with θ (Perfect bonding)

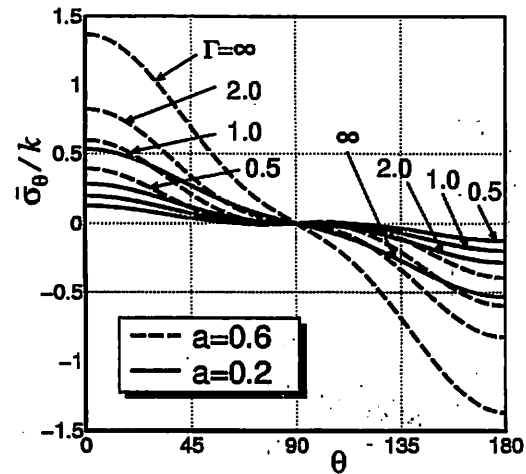


Fig. 3 Variations of stress $\bar{\sigma}_\theta$ on the interface with θ (Perfect bonding)

メータとして示した。完全密着条件下での結果とは違い、介在物内では曲線的に変化し、境界面では圧縮応力となる。一方、母材側では、 Γ を大きくすることで応力集中現象が緩和されるが、完全密着条件下での結果ほど大きな効果は得られない。

図10は、境界面 $r = a$ の $\theta = 0^\circ$ における母材側応力 $(\sigma_\theta)_{r=a, \theta=0}$ を示したものである。剛体介在物を挿入すると、円孔のときと比べて30~40%程度応力集中が緩和されることがわかる。

図11は、図10と同様に介在物側の応力 $(\bar{\sigma}_\theta)_{r=a, \theta=0}$ を Γ をパラメータとして示したものである。完全密着条件の結果とは逆に $\bar{\sigma}_\theta$ は圧縮応力となっている。

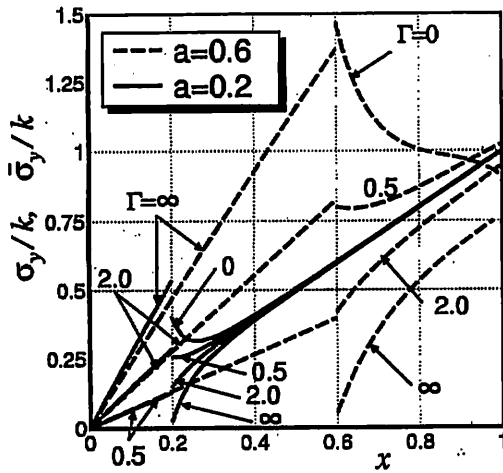


Fig. 4 Variations of stresses σ_y and $\bar{\sigma}_y$ on x-axis with x (Perfect bonding)

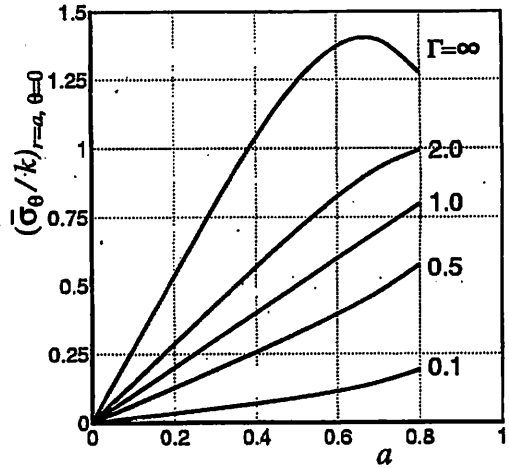


Fig. 6 Variations of stress $(\bar{\sigma}_\theta)_{r=a}$ on x-axis with inclusion radius a (Perfect bonding)

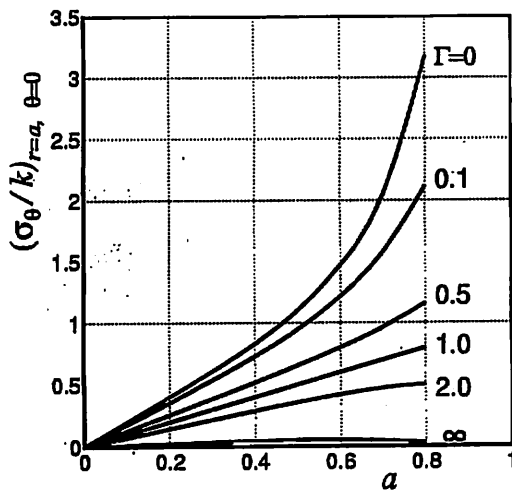


Fig. 5 Variations of stress $(\sigma_\theta)_{r=a, \theta=0}$ on x-axis with inclusion radius a (Perfect bonding)

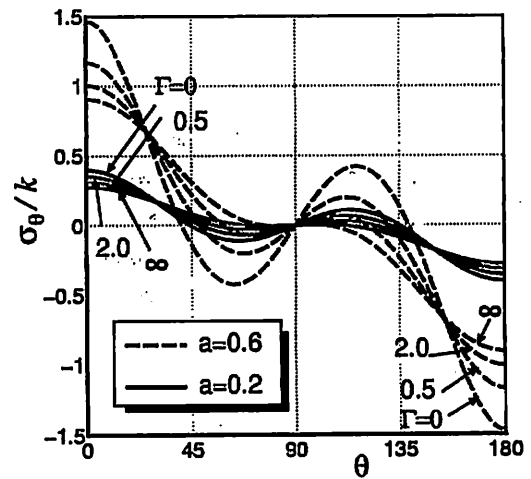


Fig. 7 Variation of σ_θ on the interface with θ (Sliding interface)

4. 結 論

一個の円形介在物を有する帯板が面内曲げモーメントを受ける問題を二次元弾性理論に基づいて厳密に解析する手法を示すとともに、数値計算によって介在物が弾性母材に及ぼす影響や介在物の接着条件による応力分布の相違などを明らかにした。得られた結果を要約すると以下のようなになる。

(1) 介在物の母材に対する剛性比 Γ は、応力の分布および大きさに大きく影響を及ぼす。

(2) 介在物を挿入することで応力集中は著しく緩和される。 Γ かつ介在物半径 a が大きいほどその効果は著しい。また、その緩和の効果は、完全密着介在物の場合がすべり介在物の場合に比べて大きい。

最後に、著者らの一連の研究に対して常に励ましを

与えて下さっている上野 誠 茨城高専名誉教授に対し、記して謝意を表します。

文 献

- (1) Shioya S., On a Semi-Infinite Thin Plate with a Circular Inclusion under Uniform Tension, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), Vol. 32, No. 236(1966), pp.593-600.
- (2) Kawashima K, Tsuchida E. and Nakahara I., Stresses in an Elastic Circular Cylinder Having a Spherical Inclusion under Tension, Theoretical and Appl. Mech., Vol. 27(1977), pp.79-89.
- (3) Mizushima I., Hamada M. and Syakudo T., Tensile and Compressive Stress Problems of a Rigid Circular Disk in an Infinite Plate, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), Vol. 47, No. 377, A (1978), pp.15-21.

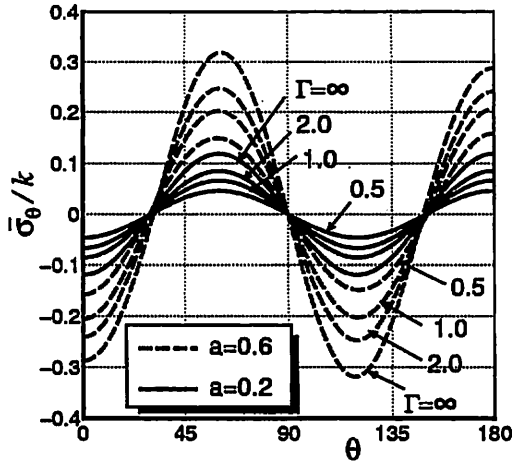


Fig. 8 Variation of $\bar{\sigma}_\theta$ on the interface with θ (Sliding interface)

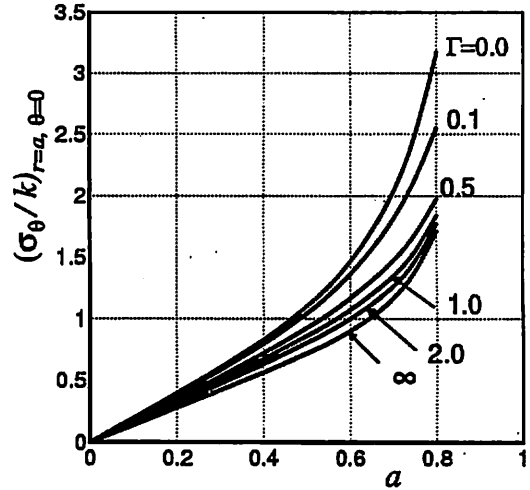


Fig. 10 Variation of $(\sigma_\theta)_{r=a, \theta=0}$ ($= (\bar{\sigma}_y)_{x=a}$) on the interface with a (Sliding interface)

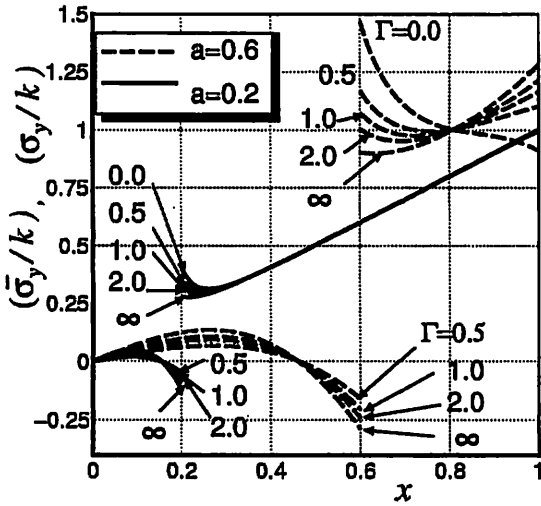


Fig. 9 Variation of stress σ_y and $\bar{\sigma}_y$ on x -axis with x (Sliding interface)

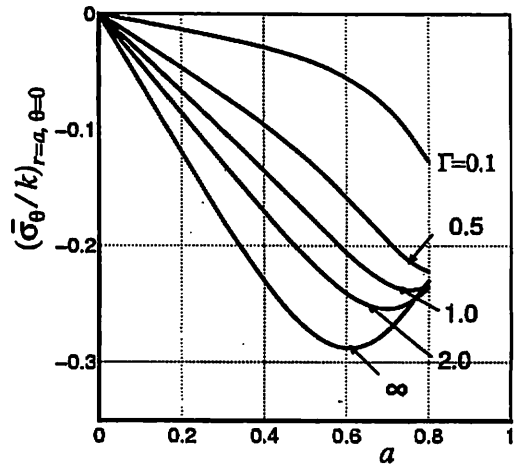


Fig. 11 Variation of $(\bar{\sigma}_\theta)_{r=a, \theta=0}$ ($= (\bar{\sigma}_y)_{x=a}$) on the interface with a (Sliding interface)

(4) Kawashima K., Tsuchida E. and Nakahara I., Stresses in a Circular Cylinder having a Spherical Inclusion under Transverse Bending, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol. 45, No. 392, A(1979), pp.397-405.

(5) Kasano K., Matsumoto H. and Nakahara I., Tension of an Infinite Body Having a Rigid Cylindrical Inclusion of Finite Length, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol. 47, No. 413, A(1981), pp.18-24.

(6) Yamamoto T. and Tsumura T., Elastic Analysis of Partial Contact Problems in Uniaxially Loaded Plate with Interference-Fit Disk, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol. 52, No. 475, A(1986), pp.601-607.

(7) Horibe T., Tsuchida E. and Uchiyama T., Stresses in a Circular Cylinder with a Prolate Spheroidal

Inclusion under Torsion, *Theoretical and Appl. Mech.*, Vol. 35(1987), pp.313-320.

(8) Hasegawa H. and Kumamoto K., Stress Concentration of a Strip with an Elliptic Inclusion Under Tension, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol. 55, No. 511, A(1989), pp.515-522.

(9) Lee M., Jasiuk I. and Tsuchida E., The Sliding Circular Inclusion in an Elastic Half-Plane, *Trans. A.S.M.E., J. of Appl. Mech.*, Vol. 59(1992), pp.57-64.

(10) Tsuchida E., Arai Y. and Hashimoto T., Stresses in a Semi-Infinite Plate Containing an Elliptic Inhomogeneity Normal to the Straight Edge under Uniaxial Tension, *Theoretical and Appl. Mech.*, Vol. 50(2001), pp.145-156.

- (11) Tsuchida E., Arai Y. and Tanaka N., BEM Analysis of the Stresses in an Elastic Half-plane Containing a Sliding Elliptic Inclusion, Trans. of JASCOME, J. of BEM, Vol. 14(1997), pp.111-116.
 - (12) Tsuchida E., Arai Y. and Takakubo Y., Nonlinear Analysis of the Stresses in an Elastic Semi-infinite Plate Containing a Sliding Elliptic Inclusion with Frictional Interface, Trans. of JASCOME, J. of BEM, Vol. 16(1999-12), pp.19-24.
 - (13) Tsuchida E., Arai Y. and Zheng Y., Stresses in a Thick Plate Containing an Oblate Spheroidal Inclusion Under Axisymmetric Bending, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), Vol. 68, No. 668, A(2002), pp.631-637.
 - (14) Noda N. and Moriyama Y., Stress Concentration of an Ellipsoidal Inclusion of Revolution in a Semi-Infinite Body under Biaxial Tension, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., (in Japanese), Vol. 69, No. 677, A(2003), pp.160-165.
 - (15) Nakahara I., Shibuya H., Tsuchida E., Tsuji T. and Inoue Y., Hand Book of Elasticity, (2001), p.284, Asakura Publishing Co.
-