日本機械学会論文集(A 編)
68 巻 676 号(2002-12)

論文 No. 02-0532

# 偏平回転だ円体状介在物を有する厚板の曲げ*

鄭 穎*1, 土田 栄一郎*2, 荒 居 善 雄*2

# Stresses in a Thick Plate Containing an Oblate Spheroidal Inclusion Under Bending

Ying ZHENG, Eiichiro TSUCHIDA*3 and Yoshio ARAI

*3 Department of Mechanical Engineering, Saitama University,
225 Shimo Okubo, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

In the previous paper, we presented an axisymmetric solution for the stresses and displacements in an elastic thick plate containing an oblate spheroidal inclusion under axisymmetric bending around the $z$ axis normal to the surface of the thick plate. In the present paper, we studied an asymmetric solution for an elastic thick plate containing an oblate spheroidal inclusion under transverse bending. Numerical results are given for different values of size, aspect ratio and stiffness ratio. The stress distributions around inclusion are shown graphically, and are compared with the axisymmetric results.

***Key Words***: Elasticity, Micromechanics, Stress Concentration, Thick Plate, Inclusion, Oblate Spheroidal Inclusion

## 1. は じ め に

FRP, 傾斜機能材料, セラミックスなど種々の先端複合材料が開発された．このような複合材料の強度は介在物の大きさ, 弾性係数, 形状, 作用する荷重の種類などに大きく依存するのでその応力場を明らかにすることは非常に重要である．

曲げ荷重を受ける問題では, 1953 年 Das が球状介在物を有する無限体の問題(1) を解析し, Ling-Tsai が Michell の応力関数を用いて厚板に偏心して球状介在物が存在する場合の円周曲げの問題(2) を解析した．一般に, 一軸回りの曲げ荷重を受ける弾性体の非軸対称問題は困難である．土田らはさらに 1976 年球状介在物を有する厚板の一軸回りの曲げ(3) について解析した．

本研究は, 厚板内に偏平回転だ円体状介在物が存在し, 無限遠方において, 一軸回りに曲げ荷重を受ける非軸対称問題を Papcovich-Neuber の変位関数を用い, 三次元弾性論に基づいて厳密に解析したものである．

解析においては, Papcovich-Neuber の変位関数 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ を用い, 回転だ円体調和関数および円柱調和関数を与え, 異なる座標系で表された解を互いに座標変換することによって, 介在物境界面の境界条件と厚板上下面の境界条件を同時に満足させた．本解は (1) 方位角 $\gamma$ に関係しない二軸一様曲げ荷重と (2) 方位角 $\gamma$ に関係する二軸逆対称曲げ荷重に二分できるので, それぞれに対応する解を軸対称解, 非軸対称解として別々に求めた後, 両者を重ね合わせた．軸対称解に対しては文献(4) で与えられている．さらに, 理論解に基づいて数値計算を行い, 介在物近傍の応力分布並びに最大応力に及ぼす介在物の大きさ, 形状比および剛性率比による影響を明らかにした．また二軸一様曲げを受ける場合と比較した．

## 2. 解 析 方 法

図 1 に示すように, 板厚の半分を単位長さとし, すべての長さの基準にとり, 偏平回転だ円体状介在物の長軸, 短軸の長さおよび焦点間距離をそれぞれ $2a$, $2b$, $2c$ とし, 母材および介在物の横弾性係数をそれぞれ $G, \bar{G}$ また, ポアソン比を $\nu, \bar{\nu}$ とする．偏平回転

---

* 原稿受付 2002 年 4 月 26 日.
*1 正員, 埼玉大学大学院理工学研究科(〒338-8570 さいたま市下大久保 255).
*2 正員, 埼玉大学工学部.
E-mail : tsuchida@mech.saitama-u.ac.jp

だ円体状介在物の中心Oを座標原点として円柱座標$(r,\theta,z)$と偏平回転だ円体座標$(\alpha,\beta,\gamma)$を用いれば，両座標の間には次のような関係がある.

$$\gamma=c\cosh\alpha\sin\beta=c\bar{\xi}\bar{\eta}$$
$$\theta=\gamma \qquad\cdots\cdots(1)$$
$$z=c\sinh\alpha\cos\beta=c\xi\eta$$

ここで$\xi=\sinh\alpha$, $\bar{\xi}=\cosh\alpha$, $\eta=\cos\beta$, $\bar{\eta}=\sin\beta$である.

直角座標のもとでPapcovich-Neuberの変位関数$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$を用いて変位を次のように表せば，これは三次元弾性基礎方程式の解となる.

$$2Gu_x=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0+x\varphi_1+y\varphi_2+z\varphi_3)-4(1-\nu)\varphi_1$$
$$2Gu_y=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0+x\varphi_1+y\varphi_2+z\varphi_3)-4(1-\nu)\varphi_2$$
$$2Gu_z=\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_0+x\varphi_1+y\varphi_2+z\varphi_3)-4(1-\nu)\varphi_3$$
$$\nabla^2\varphi_0=\nabla^2\varphi_1=\nabla^2\varphi_2=\nabla^2\varphi_3=0 \qquad\cdots\cdots(2)$$

ここで，$u_x,u_y,u_z$はそれぞれ$x,y,z$方向の変位成分，$G$は横弾性係数，$\nu$はポアソン比である.

偏平回転だ円体状介在物の境界面で完全接着であるとすれば，境界条件は以下のようになる.

(i) 厚板上下面$z=\pm1$において

$$(\sigma_z)_{z=\pm1}=(\tau_{rz})_{z=\pm1}=(\tau_{z\theta})_{z=\pm1}=0 \qquad\cdots\cdots(3)$$

(ii) 介在物境界面$\alpha=\alpha_0$において

$$(u_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{u}_\alpha)_{\alpha=\alpha_0},\ (u_\beta)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{u}_\beta)_{\alpha=\alpha_0}$$
$$(u_\gamma)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{u}_\gamma)_{\alpha=\alpha_0},\ (\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{\sigma}_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}$$
$$(\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{\tau}_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0},\ (\tau_{\alpha\gamma})_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{\tau}_{\alpha\gamma})_{\alpha=\alpha_0} \qquad\cdots\cdots(4)$$

(iii) 無限遠方$r\to\infty$において

$$\sigma_x=kz,\ \sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0 \qquad\cdots\cdots(5)$$

ここで，$k=3/2M$であり，"$\bar{\ }$"の記号は介在物に関する諸量を表す.

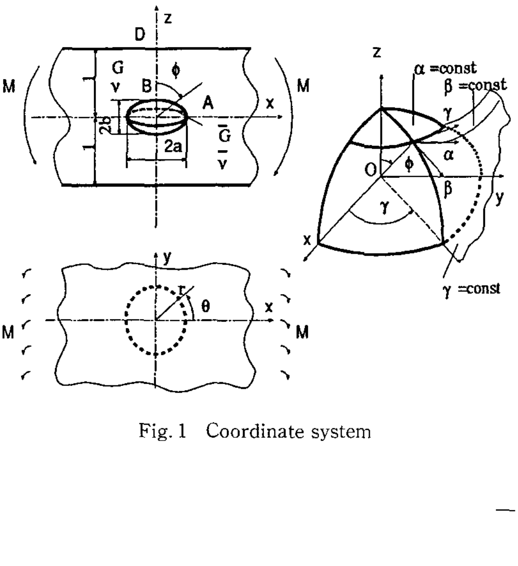


Fig. 1 Coordinate system

Oを原点として変位関数$\varphi_0,\varphi_3$に以下のような調和関数を与える.

$$[\mathrm{A}]\left\{\begin{aligned}\varphi_0=&-\frac{(1-2\nu)}{24(1+\nu)}kc^3\xi\eta(2\xi^2\eta^2-3\bar{\xi}^2\bar{\eta}^2)\\&+\frac{1-2\nu}{8(1-\nu)}kc^3\xi\eta\bar{\xi}^2\bar{\eta}^2\cos2\gamma\\\varphi_3=&-\frac{k}{8(1+\nu)}c^2(2\xi^2\eta^2-\bar{\xi}^2\bar{\eta}^2)\\&+\frac{k}{8(1-\nu)}c^2\bar{\xi}^2\bar{\eta}^2\cos2\gamma\end{aligned}\right. \qquad\cdots\cdots(6)$$

変位関数[A]より導かれる変位および応力を直角座標で表された変位，応力成分は以下のようになる.

$$2Gu_x=\frac{1}{1+\nu}kxz,\ 2Gu_y=-\frac{\nu}{1+\nu}kyz$$
$$2Gu_z=-\frac{1}{2(1+\nu)}k\{x^2+\nu(z^2-y^2)\} \qquad\cdots\cdots(7)$$
$$\sigma_x=kz,\ \sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$$

したがって，境界条件(iii)は自動的に満足される.

変位関数[A]からわかるように$y$軸回りの曲げは$\gamma$に関係しない二軸一様曲げ荷重と$\gamma$に関係する二軸逆対称曲げ荷重に二分できるので，それぞれに対応する解を軸対称解，非軸対称解として別々に求めた後，両者を重ね合わせて求めることにする.

**2・1 軸対称解** $\gamma$に無関係な軸対称問題に対しては文献[4]で$M/2$の軸対称曲げとして得られる.

**2・2 非軸対称解** $\gamma$に関係する二軸逆対称曲げ荷重を受ける非軸対称問題に対する境界条件は以下のようになる.

(i) 厚板上下面$z=\pm1$において

$$(\sigma_z)_{z=\pm1}=(\tau_{rz})_{z=\pm1}=(\tau_{z\theta})_{z=\pm1}=0 \qquad\cdots\cdots(8)$$

(ii) 介在物境界面$\alpha=\alpha_0$において

$$(u_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{u}_\alpha)_{\alpha=\alpha_0},\ (u_\beta)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{u}_\beta)_{\alpha=\alpha_0}$$
$$(u_\gamma)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{u}_\gamma)_{\alpha=\alpha_0},\ (\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{\sigma}_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}$$
$$(\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{\tau}_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0},\ (\tau_{\alpha\gamma})_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{\tau}_{\alpha\gamma})_{\alpha=\alpha_0} \qquad\cdots\cdots(9)$$

(iii) 無限遠方$r\to\infty$において

$$\sigma_x=-\sigma_y=\frac{1}{2}kz,\ \sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0 \qquad\cdots\cdots(10)$$

境界条件(i)，(ii)，(iii)を満足させる解として変位関数$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$に次のような調和関数を与える.

母材領域$(\alpha>\alpha_0)$において

$$[\mathrm{V}]\quad \begin{cases} \varphi_0=\dfrac{1-2\nu}{8(1-\nu)}kc^3\xi\eta\bar{\xi}^2\bar{\eta}^2\cos 2\gamma \\ \varphi_3=\dfrac{k}{8(1-\nu)}c^2\bar{\xi}^2\bar{\eta}^2\cos 2\gamma \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$[\mathrm{VI}]\quad \begin{cases} \varphi_0=k\sum_{m=1}^{\infty}C_m q_{2m+1}^2(\xi)P_{2m+1}^2(\eta)\cos 2\gamma \\ \varphi_1=k\sum_{m=1}^{\infty}D_m q_{2m}^1(\xi)P_{2m}^1(\eta)\cos\gamma \\ \varphi_2=-k\sum_{m=1}^{\infty}D_m q_{2m}^1(\xi)P_{2m}^1(\eta)\sin\gamma \\ \varphi_3=k\sum_{m=1}^{\infty}E_m q_{2m}^2(\xi)P_{2m}^2(\eta)\cos 2\gamma \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$$[\mathrm{VII}]\quad \begin{cases} \varphi_0=k\int_0^{\infty}\psi_3(\lambda)J_2(\lambda r)\sinh(\lambda z)\cos 2\theta d\lambda \\ \varphi_1=k\int_0^{\infty}\psi_4(\lambda)J_1(\lambda r)\sinh(\lambda z)\cos\theta d\lambda \\ \varphi_2=-k\int_0^{\infty}\psi_4(\lambda)J_1(\lambda r)\sinh(\lambda z)\sin\theta d\lambda \\ \varphi_3=k\int_0^{\infty}\lambda\psi_5(\lambda)J_2(\lambda r)\cosh(\lambda z)\cos 2\theta d\lambda \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

介在物領域 $(\alpha<\alpha_0)$ において

$$[\mathrm{VIII}]\quad \begin{cases} \varphi_0=k\sum_{n=1}^{\infty}\bar{C}_n p_{2n+1}^2(\xi)P_{2n+1}^2(\eta)\cos 2\gamma \\ \varphi_1=k\sum_{n=2}^{\infty}\bar{D}_n p_{2n}^1(\xi)P_{2n}^1(\eta)\cos\gamma \\ \varphi_2=-k\sum_{n=2}^{\infty}\bar{D}_n p_{2n}^1(\xi)P_{2n}^1(\eta)\sin\gamma \\ \varphi_3=k\sum_{n=1}^{\infty}\bar{E}_n p_{2n}^2(\xi)P_{2n}^2(\eta)\cos 2\gamma \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

ここで $C_m, D_m, E_m, \bar{C}_n, \bar{D}_n, \bar{E}_n, \psi_3(\lambda)\sim\psi_5(\lambda)$ は境界条件により決定される未定係数および未知関数であり，$P_n^m(\eta)$ は $n$ 次のルジャンドル陪関数であり，$p_n^m(\xi)$，$q_n^m(\xi)$ は $n$ 次の第一種および第二種変形ルジャンドル陪関数であり，$J_m(\lambda r)$ は $m$ 次の第一種ベッセル関数である．

まず，厚板上下面における境界条件(ｉ)を満足させるために，次の偏平回転だ円体調和関数と円柱調和関数との関係式

$$q_n^m(\xi)P_n^m(\eta)=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}c\int_0^{\infty}J_m(\lambda r)j_n(\lambda c)e^{-\lambda z}d\lambda \quad (z>0) \quad\cdots\cdots(15)$$

$$q_n^m(\xi)P_n^m(\eta)=(-1)^{n+m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}c\int_0^{\infty}J_m(\lambda r)j_n(\lambda c)e^{\lambda z}d\lambda \quad (z<0) \quad\cdots\cdots(16)$$

を用いて変位関数[VI]をベッセル関数を含む積分形で表すと

$$[\mathrm{VI}^*]\quad \begin{cases} \varphi_0=k\sum_{m=1}^{\infty}C_m(2m+3)(2m+2)(2m+1)2m\, c\int_0^{\infty}J_2(\lambda r)j_{2m+1}(\lambda c)e^{-\lambda z}d\lambda\cos 2\theta \\ \varphi_1=k\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2m\, c\int_0^{\infty}J_1(\lambda r)j_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda z}d\lambda\cos\theta \\ \varphi_2=-k\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2m\, c\int_0^{\infty}J_1(\lambda r)j_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda z}d\lambda\sin\theta \\ \varphi_3=k\sum_{m=1}^{\infty}E_m(2m+2)(2m+1)2m(2m-1)\, c\int_0^{\infty}J_2(\lambda r)j_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda z}d\lambda\cos 2\theta \\ (z>0) \end{cases} \quad\cdots\cdots(17)$$

となる．ここで $j_n(\lambda c)$ は $n$ 次の球ベッセル関数である．

変位関数[V]，[VI*]，[VII]から各応力成分を求め，厚板上面の境界条件(ｉ)を満足させる．また，$z<0$ についても関係式(16)を用いて変換し，同様にして厚板下面の境界条件を満足させると

$$\begin{aligned} \pm\left(\frac{\sigma_z}{k\cos 2\theta}\right)_{z\pm1}=&\int_0^{\infty}\lambda^2\Bigg\{\bigg\{\psi_3(\lambda)\sinh\lambda+\frac{2(1+\nu)}{\lambda}\psi_4(\lambda)\sinh\lambda+\psi_5(\lambda)[\lambda\cosh\lambda-2(1-\nu)\sinh\lambda] \\ &+c\sum_{m=1}^{\infty}\bigg\{C_m(2m+3)(2m+2)(2m+1)2m j_{2m+1}(\lambda c)+D_m(2m+1)2m\frac{2(1+\nu)}{\lambda}j_{2m}(\lambda c) \\ &+E_n(2m+2)(2m+1)2m(2m-1)j_{2m}(\lambda c)\frac{[\lambda+2(1-\nu)]}{\lambda}\bigg\}e^{-\lambda}\bigg\}J_2(\lambda r)+\bigg[\psi_4(\lambda)\sinh\lambda \\ &+c\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2m j_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda}\bigg]rJ_2'(\lambda r)\Bigg\}d\lambda=0 \end{aligned} \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_{z\theta}}{k\sin 2\theta}\right)_{z\pm1}=&\int_0^{\infty}\lambda\Bigg\{\bigg\{\psi_3(\lambda)\cosh\lambda+\frac{2\nu}{\lambda}\psi_4(\lambda)\cosh\lambda+\psi_5(\lambda)[\lambda\sinh\lambda-(1-2\nu)\cosh\lambda] \\ &-c\sum_{m=1}^{\infty}\bigg\{C_m(2m+3)(2m+2)(2m+1)2m j_{2m+1}(\lambda c)+D_m(2m+1)2m\frac{2\nu}{\lambda}j_{2m}(\lambda c) \\ &+E_n(2m+2)(2m+1)2m(2m-1)j_{2m}(\lambda c)\frac{[\lambda+(1-2\nu)]}{\lambda}\bigg\}e^{-\lambda}\bigg\}\frac{1}{r}J_2(\lambda r) \end{aligned}$$

$$+\left[\nu\phi_4(\lambda)\cosh\lambda-\nu c\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2mj_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda}\right]J_2'(\lambda r)\Bigg\}d\lambda=0 \quad\cdots\cdots(19)$$

$$\pm\left(\frac{\tau_{rz}}{k\cos 2\theta}\right)_{z\pm1}=\int_0^{\infty}\lambda^2\Bigg\{\Bigg\{\phi_3(\lambda)\cosh\lambda+\frac{2\nu}{\lambda}\phi_4(\lambda)\cosh\lambda+\phi_5(\lambda)[\lambda\sinh\lambda-(1-2\nu)\cosh\lambda]$$

$$-c\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg\{C_m(2m+3)(2m+2)(2m+1)2mj_{2m+1}(\lambda c)+D_m(2m+1)2m\frac{2\nu}{\lambda}j_{2m}(\lambda c)$$

$$+E_n(2m+2)(2m+1)2m(2m-1)j_{2m}(\lambda c)\frac{[\lambda+(1-2\nu)]}{\lambda}\Bigg\}e^{-\lambda}\Bigg\}J_2'(\lambda r)$$

$$+\left[-\phi_4(\lambda)\cosh\lambda+c\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2mj_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda}\right]rJ_2(\lambda r)+\frac{1}{\lambda^2}\Bigg[4\nu\phi_4(\lambda)\cosh\lambda$$

$$-4\nu c\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2mj_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda}\Bigg]\frac{1}{r}J_2(\lambda r)\Bigg\}d\lambda=0 \quad\cdots\cdots(20)$$

となる．

まず，

$$\phi_4(\lambda)=\frac{c}{\cosh\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)(2m)j_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda} \quad\cdots\cdots(21)$$

とおく．式(19)で $J_2'(\lambda r)$ および式(20)で $rJ_2(\lambda r)$, $J_2(\lambda r)/r$ の項は零になる．式(19)で $J_2(\lambda r)/r$ の係数を零に等置したものと式(20)で $J_2'(\lambda r)$ の係数を零に等置したものは同じになり，次のようになる．

$$\phi_3(\lambda)\cosh\lambda+\phi_5(\lambda)[\lambda\sinh\lambda-(1-2\nu)\cosh\lambda]-c\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg\{C_m(2m+3)(2m+2)(2m+1)2mj_{2m+1}(\lambda c)$$

$$+E_n(2m+2)(2m+1)(2m-1)2mj_{2m}(\lambda c)\frac{[\lambda+(1-2\nu)]}{\lambda}\Bigg\}e^{-\lambda}=0 \quad\cdots\cdots(22)$$

式(18)で $\phi_4(\lambda)$ の値を用いると，$rJ_2'(\lambda r)$ の項は以下のように変形できる．

$$\int_0^{\infty}\lambda^2\left[\phi_4(\lambda)\sinh\lambda+c\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2mj_{2m}(\lambda c)e^{-\lambda}\right]rJ_2'(\lambda r)d\lambda$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{c\lambda^2}{\cosh\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2mj_{2m}(\lambda c)J_2'(\lambda r)d(\lambda r)$$

$$=\left[\frac{c\lambda^2}{\cosh\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2mj_{2m}(\lambda c)J_2(\lambda r)\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}c\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2mJ_2(\lambda r)\left(\frac{\lambda^2j_{2m}(\lambda c)}{\cosh\lambda}\right)'d\lambda$$

$$=\int_0^{\infty}\lambda^2c\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)(2m)\left\{\left(\frac{\sinh\lambda}{\cosh^2\lambda}-\frac{2}{\lambda\cosh\lambda}\right)j_{2m}(\lambda c)-\frac{c}{\cosh\lambda}j_{2m}'(\lambda c)\right\}J_2(\lambda r)d\lambda \quad\cdots\cdots(23)$$

したがって，式(18)は $J_2(\lambda r)$ のみの項にまとめられ，次のようになる．

$$\pm\left(\frac{\sigma_z}{k\cos 2\theta}\right)_{z\pm1}=\int_0^{\infty}\lambda^2\Bigg\{\Bigg\{\phi_3(\lambda)\sinh\lambda+\frac{2(1+\nu)}{\lambda}\phi_4(\lambda)\sinh\lambda+\phi_5(\lambda)[\lambda\cosh\lambda-2(1-\nu)\sinh\lambda]\Bigg\}$$

$$+c\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg\{C_m(2m+3)(2m+2)(2m+1)2mj_{2m+1}(\lambda c)+D_m(2m+1)2m\frac{2(1+\nu)}{\lambda}j_{2m}(\lambda c)$$

$$+E_n(2m+2)(2m+1)2m(2m-1)j_{2m}(\lambda c)\frac{[\lambda+2(1-\nu)]}{\lambda}\Bigg\}e^{-\lambda}$$

$$+c\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2m\left\{\left(\frac{\sinh\lambda}{\cosh^2\lambda}-\frac{2}{\lambda\cosh\lambda}\right)j_{2m}(\lambda)-\frac{c}{\cosh\lambda}j_{2m}'(\lambda c)\right\}\Bigg\}J_2(\lambda r)d\lambda=0 \quad\cdots\cdots(24)$$

式(24)にハンケルの逆変換をすると

$$\phi_3(\lambda)\sinh\lambda+\phi_5(\lambda)[\lambda\cosh\lambda-2(1-\nu)\sinh\lambda]+c\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg\{C_m(2m+3)(2m+2)(2m+1)2mj_{2m+1}(\lambda c)$$

$$+E_n(2m+2)(2m+1)(2m-1)2mj_{2m}(\lambda c)\frac{[\lambda+2(1-\nu)]}{\lambda}\Bigg\}e^{-\lambda}+c\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2m$$

$$\times\left(\frac{\sinh\lambda}{\cosh^2\lambda}+\frac{2\nu}{\lambda\cosh\lambda}\right)j_{2m}(\lambda c)-\frac{c^2}{\cosh\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}D_m(2m+1)2mj_{2m}'(\lambda c)=0 \quad\cdots\cdots(25)$$

となる．

ここで，式(22)，(25)の連立方程式を解けば，未知関数 $\phi_3(\lambda)$, $\phi_5(\lambda)$ は以下のように求められる．

$$\phi_3(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}c\{C_m(2m+3)(2m+2)(2m+1)2mj_{2m+1}(\lambda c)f_1(\lambda)+D_m(2m+1)2mj_{2m}(\lambda c)f_2(\lambda)$$

$$+D_m(2m+1)2mj_{2m}'(\lambda c)f_3(\lambda)+E_m(2m+2)(2m+1)(2m-1)2mj_{2m}(\lambda c)f_4(\lambda)\}$$

$$\psi_4(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}cD_m(2m+1)2mj_{2m}(\lambda c)f_5(\lambda)$$

$$\psi_5(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}c\{C_m(2m+3)(2m+2)(2m+1)2mj_{2m+1}(\lambda c)f_6(\lambda)+D_m(2m+1)2mj_{2m}(\lambda c)f_7(\lambda)$$
$$+D_m(2m+1)2mj'_{2m}(\lambda c)f_8(\lambda)+E_n(2m+2)(2m+1)(2m-1)2mj_{2m}(\lambda c)f_9(\lambda)\} \quad \cdots\cdots(26)$$

ここで,

$$f_1(\lambda)=\frac{3-4\nu-2\lambda-e^{-2\lambda}}{\sinh 2\lambda-2\lambda},\ f_2(\lambda)=\frac{2}{\sinh 2\lambda-2\lambda}\left(\frac{2\nu}{\lambda}+\frac{\sinh\lambda}{\cosh\lambda}\right)\frac{(1-2\nu)\cosh\lambda-\lambda\sinh\lambda}{\cosh\lambda}$$
$$f_3(\lambda)=\frac{2c}{\sinh 2\lambda-2\lambda}\frac{\lambda\sinh\lambda-(1-2\nu)\cosh\lambda}{\cosh\lambda},\ f_4(\lambda)=\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)-2\lambda^2}{\lambda(\sinh 2\lambda-2\lambda)},\ f_5(\lambda)=\frac{e^{-\lambda}}{\cosh\lambda}$$
$$f_6(\lambda)=\frac{2\lambda}{\sinh 2\lambda-2\lambda},\ f_7(\lambda)=\frac{2\lambda}{\sinh 2\lambda-2\lambda}\left(\frac{2\nu}{\lambda}+\frac{\sinh\lambda}{\cosh\lambda}\right),\ f_8(\lambda)=-\frac{2\lambda c}{\sinh 2\lambda-2\lambda},$$
$$f_9(\lambda)=\frac{(3-4\nu+2\lambda+e^{-2\lambda})\lambda}{\sinh 2\lambda-2\lambda} \quad \cdots\cdots(27)$$

である．$\psi_3(\lambda)\sim\psi_5(\lambda)$ の関係が成立すれば，未定係数 $C_m, D_m, E_m(m=1,2,\cdots)$ に無関係に厚板上下面の境界条件(ｉ)が満足される．

次に介在物における境界条件(ii)を満足させるために，円柱調和関数と偏平回転だ円体調和関数との関係式

$$J_1(\lambda r)\sinh\lambda z=\sum_{n=1}^{\infty}(4n+1)\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}j_{2n}(\lambda c)p^1_{2n}(\xi)P^1_{2n}(\eta)$$
$$J_2(\lambda r)\cosh\lambda z=\sum_{n=1}^{\infty}(4n+1)\frac{(2n-2)!}{(2n+2)!}j_{2n}(\lambda c)p^2_{2n}(\xi)P^2_{2n}(\eta)$$
$$J_2(\lambda r)\sinh\lambda z=\sum_{n=1}^{\infty}(4n+3)\frac{(2n-1)!}{(2n+3)!}j_{2n+1}(\lambda c)p^2_{2n+1}(\xi)P^2_{2n+1}(\eta) \quad \cdots\cdots(28)$$

を用いて変位関数[VII]を偏平回転だ円体調和関数に変換すると次式となる．

$$[\text{VII}^*]\quad\begin{cases}\varphi_0=k\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n p^2_{2n+1}(\xi)P^2_{2n+1}(\eta)\cos 2\gamma,\ \varphi_1=k\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n p^1_{2n}(\xi)P^1_{2n}(\eta)\cos\gamma\\ \varphi_2=-k\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n p^1_{2n}(\xi)P^1_{2n}(\eta)\sin\gamma,\ \varphi_3=k\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n p^2_{2n}(\xi)P^2_{2n}(\eta)\cos 2\gamma\end{cases} \quad \cdots\cdots(29)$$

ここで

$$\xi_n=\frac{(4n+3)}{2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\int_0^{\infty}\psi_3(\lambda)j_{2n+1}(\lambda c)d\lambda$$
$$\eta_n=\frac{(4n+1)}{2n(2n+1)}\int_0^{\infty}\psi_4(\lambda)j_{2n}(\lambda c)d\lambda,\ \zeta_n=\frac{(4n+1)}{(2n-1)2n(2n+1)(2n+2)}\int_0^{\infty}\psi_5(\lambda)j_{2n}(\lambda c)d\lambda \quad \cdots\cdots(30)$$

である．

変位関数[V]，[VI]，[VII*]，[VIII]より変位と応力成分を求め，介在物境界面の境界条件式を満足させると，次のようになる．

(ｉ) 変位 $(u_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{u}_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[k_{C_1}C_n+k_{D_1}D_n+k_{D_2}D_{n+1}+k_{E_1}E_n+k_{E_2}E_{n+1}+k_{\xi_1}\xi_n+k_{\eta_1}\eta_n+k_{\eta_2}\eta_{\eta+1}+k_{\zeta_1}\zeta_n$$
$$+k_{\zeta_2}\zeta_{n+1}-\frac{1}{\Gamma}(\bar{k}_{C_1}\bar{C}_n+\bar{k}_{D_1}\bar{D}_n+\bar{k}_{D_2}\bar{D}_{n+1}+\bar{k}_{E_1}\bar{E}_n+\bar{k}_{E_2}\bar{E}_{n+1})\Big]P^2_{2n+1}(\eta)$$
$$=\frac{1}{60}c^3(1-\xi_0^2)P^2_3(\eta) \cdots\cdots(31)$$

(ii) 変位 $(u_\beta)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{u}_\beta)_{\alpha=\alpha_0}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[l_{C_1}C_n+l_{D_1}D_n+l_{D_2}D_{n+1}+l_{E_1}E_n+l_{E_2}E_{n+1}+l_{\xi_1}\xi_n+l_{\eta_1}\eta_n+l_{\eta_2}\eta_{n+1}+l_{\zeta_1}\zeta_n+l_{\zeta_2}\zeta_{n+1}$$

$$-\frac{1}{\Gamma}(\bar{l}_{C_1}\bar{C}_n+\bar{l}_{D_1}\bar{D}_n+\bar{l}_{D_2}\bar{D}_{n+1}+\bar{l}_{E_1}\bar{E}_n+\bar{l}_{E_2}\bar{E}_{n+1})\Big]P_{2n+1}^{2\prime}(\eta)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[m_{D_1}D_n+m_{E_1}E_n$$
$$+m_{\eta_1}\eta_n+m_{\zeta_1}\zeta_n-\frac{1}{\Gamma}(\bar{m}_{D_1}\bar{D}_n+\bar{m}_{E_1}\bar{E}_n)\Big]P_{2n}^2(\eta)=\frac{1}{60}c^3\xi_0\bar{\xi}_0^2[P_3^{2\prime}(\eta)-10P_2^2(\eta)] \quad\cdots(32)$$

(iii) 変位 $(u_\gamma)_{\gamma=\gamma_0}=(\bar{u}_\gamma)_{\gamma=\gamma_0}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[l_{C_1}C_n+l_{D_1}D_n+l_{D_2}D_{n+1}+l_{E_1}E_n+l_{E_2}E_{n+1}+l_{\xi_1}\xi_n+l_{\eta_1}\eta_n+l_{\eta_2}\eta_{n+1}+l_{\zeta_1}\zeta_n+l_{\zeta_2}\zeta_{n+1}$$
$$-\frac{1}{\Gamma}(\bar{l}_{C_1}\bar{C}_n+\bar{l}_{D_1}\bar{D}_n+\bar{l}_{D_2}\bar{D}_{n+1}+\bar{l}_{E_1}\bar{E}_n+\bar{l}_{E_2}\bar{E}_{n+1})\Big]P_{2n+1}^2(\eta)=\frac{1}{60}c^3\xi_0\bar{\xi}_0^2P_3^2(\eta) \quad\cdots(33)$$

(iv) 応力 $(\sigma_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{\sigma}_\alpha)_{\alpha=\alpha_0}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[s_{C_1}C_{n-1}+s_{C_2}C_n+s_{C_3}C_{n+1}+s_{D_1}D_{n-1}+s_{D_2}D_n+s_{D_3}D_{n+1}+s_{D_4}D_{n+2}+s_{E_1}E_{n-1}$$
$$+s_{E_2}E_n+s_{E_3}E_{n+1}+s_{E_4}E_{n+2}+s_{\xi_1}\xi_{n-1}+s_{\xi_2}\xi_n+s_{\xi_3}\xi_{n+1}+s_{\eta_1}\eta_{n-1}+s_{\eta_2}\eta_n+s_{\eta_3}\eta_{n+1}$$
$$+s_{\eta_4}\eta_{n+2}+s_{\zeta_1}\zeta_{n-1}+s_{\zeta_2}\zeta_n+s_{\zeta_3}\zeta_{n+1}+s_{\zeta_4}\zeta_{n+2}-\{\bar{s}_{C_1}\bar{C}_{n-1}+\bar{s}_{C_2}\bar{C}_n+\bar{s}_{C_3}\bar{C}_{n+1}+\bar{s}_{D_1}\bar{D}_{n-1}$$
$$+\bar{s}_{D_2}\bar{D}_n+\bar{s}_{D_3}\bar{D}_{n+1}+\bar{s}_{D_4}\bar{D}_{n+2}+\bar{s}_{E_1}\bar{E}_{n-1}+\bar{s}_{E_2}\bar{E}_n+\bar{s}_{E_3}\bar{E}_{n+1}+\bar{s}_{E_4}\bar{E}_{n+2}\}\Big]P_{2n+1}^2(\eta)$$
$$=-\frac{1}{30}c^3\xi_0^3\Big[\frac{2}{21}P_5^2(\eta)+\Big(\bar{\xi}_0^2-\frac{2}{3}\Big)P_3^2(\eta)\Big] \quad\cdots(34)$$

(v) 応力 $(\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{\tau}_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_0}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}[t_{C_1}C_n+t_{D_1}D_n+t_{D_2}D_{n+1}+t_{E_1}E_n+t_{E_2}E_{n+1}+t_{\xi_1}\xi_n+t_{\eta_1}\eta_n+t_{\eta_2}\eta_{n+1}+t_{\zeta_1}\zeta_n$$
$$+t_{\zeta_2}\zeta_{n+1}-(\bar{t}_{C_1}\bar{C}_n+\bar{t}_{D_1}\bar{D}_n+\bar{t}_{D_2}\bar{D}_{n+1}+\bar{t}_{E_1}\bar{E}_n+\bar{t}_{E_2}\bar{E}_{n+1})]P_{2n+1}^{2\prime}(\eta)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}[u_{C_1}C_{n-1}+u_{C_2}C_n+u_{D_1}D_{n-1}+u_{D_2}D_n+u_{D_3}D_{n+1}+u_{E_1}E_{n-1}+u_{E_2}E_n+u_{E_3}E_{n+1}$$
$$+u_{\xi_1}\xi_{n-1}+u_{\xi_2}\xi_n+u_{\eta_1}\eta_{n-1}+u_{\eta_2}\eta_n+u_{\eta_3}\eta_{n+1}+u_{\zeta_1}\zeta_{n-1}+u_{\zeta_2}\zeta_n+u_{\zeta_3}\zeta_{n+1}$$
$$-\{\bar{u}_{C_1}\bar{C}_{n-1}+\bar{u}_{C_2}\bar{C}_n+\bar{u}_{D_1}\bar{D}_{n-1}+\bar{u}_{D_2}\bar{D}_n+\bar{u}_{D_3}\bar{D}_{n+1}+\bar{u}_{E_1}\bar{E}_{n-1}+\bar{u}_{E_2}\bar{E}_n+\bar{u}_{E_3}\bar{E}_{n+1}\}]P_{2n}^2(\eta)$$
$$=\frac{1}{60}c^3\xi_0^2\Big[\bar{\xi}_0^2P_3^{2\prime}(\eta)-\Big(5\bar{\xi}_0^2-\frac{10}{7}\Big)P_2^2(\eta)+\frac{4}{7}P_4^2(\eta)\Big] \quad\cdots(35)$$

(vi) 応力 $(\tau_{\alpha\gamma})_{\alpha=\alpha_0}=(\bar{\tau}_{\alpha\gamma})_{\alpha=\alpha_0}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}[t_{C_1}C_n+t_{D_1}D_n+t_{D_2}D_{n+1}+t_{E_1}E_n+t_{E_2}E_{n+1}+t_{\xi_1}\xi_n+t_{\eta_1}\eta_n+t_{\eta_2}\eta_{n+1}+t_{\zeta_1}\zeta_n$$
$$+t_{\zeta_2}\zeta_{n+1}-(\bar{t}_{C_1}\bar{C}_n+\bar{t}_{D_1}\bar{D}_n+\bar{t}_{D_2}\bar{D}_{n+1}+\bar{t}_{E_1}\bar{E}_n+\bar{t}_{E_2}\bar{E}_{n+1})]P_{2n+1}^2(\eta)=\frac{1}{60}c^3\xi_0^2\bar{\xi}_0^2P_3^2(\eta) \quad\cdots(36)$$

ここで

$$k_{C_1}=q_{2n+1}^{2\prime}(\xi_0),\ l_{C_1}=-q_{2n+1}^2(\xi_0)$$
$$m_{D_1}=-2c(1-\nu)\bar{\xi}_0q_{2n}^1(\xi_0)$$
$$t_{C_1}=-\bar{\xi}_0^2q_{2n+1}^{2\prime}(\xi_0)+\xi_0q_{2n+1}^2(\xi_0)$$
$$s_{C_1}=-\frac{(2n-2)(2n-1)}{(4n+1)(4n-1)}\{(2n-1)q_{2n-1}^2(\xi_0)-\xi_0q_{2n-1}^{2\prime}(\xi_0)-\bar{\xi}_0^2q_{2n-1}^{2\prime\prime}(\xi_0)\}$$
$$u_{C_1}=-\frac{4(n-1)^2}{4n-1}q_{2n-1}^{2\prime}(\xi_0)$$

(その他は省略)

となる．そして，“ ′ ”はそれぞれの変数による微分を表し，$\xi_0=\sinh\alpha_0$, $\bar{\xi}_0=\cosh\alpha_0$ である．$\Gamma=\bar{G}/G$ は，介在物と母材の剛性率比を表し，$\Gamma=0$ は空かを，$\Gamma=\infty$ 剛体介在物を表す．

また，$k_{\xi i}, k_{\eta i}, k_{\zeta i}, \cdots(i=1,2,\cdots)$ はそれぞれ $k_{Ci}, k_{Di}, k_{Ei}, \cdots(i=1,2,\cdots)$ に含まれる第2種変形ルジャンドル陪関数 $q_n^m(\xi_0)$ を第1種変形ルジャンドル陪関数 $p_n^m(\xi_0)(m=1,2)(n=1,2,\cdots)$ に置き換えたものである．同様に $\bar{k}_{Ci}, \bar{k}_{Di}, \bar{k}_{Ei}, \cdots$ も $q_n^m(\xi_0)$ を $p_n^m(\xi_0)(m=1,2)(n=1,2,\cdots)$ に置き換え，$\nu$ を $\bar{\nu}$ に置き換えたものである．

式(31)～(36)でそれぞれ $P_{2n+1}^2(\eta)$, $P_{2n+1}^{2\prime}(\eta)$ の各係数を等値すれば，$C_n, D_n, E_n, \bar{C}_n, \bar{D}_n, \bar{E}_n$ に関する無限連立一次方程式が得られる．これらを $C_n, D_n, E_n, \bar{C}_n, \bar{D}_n, \bar{E}_n$ について解けば，非軸対称解が得られる．そして，非軸対称解の変位および応力各成分は，母材では[V], [VI], [VII*]を重ね合わせ，介在物では[VIII]を用いて得られる．

$y$ 軸回りの曲げに対する本問題の解は2・1節の軸対称解[4]と非軸対称解の重ね合わせによって得られる．

## 3. 数値計算および考察

母材と介在物ポアソン比 $\nu=\bar{\nu}=0.3$ とし，形状比 $\bar{s}=b/a=0.5$ として $y$ 軸回りの曲げに対する計算を行った．剛性率比 $\Gamma=\bar{G}/G$ および介在物の大きさ $b$ を変えて計算した．軸対称解[4]に対する変位および応力各成分の値は既報で示された値の 1/2 に等しい．非軸対称解に対する計算にあたっては，$C_n, D_n, E_n, \bar{C}_n, \bar{D}_n, \bar{E}_n$ を 12 項とって連立方程式を解いた．

介在物が軟らかい場合および硬い場合の代表として，剛性率比 $\Gamma$ にそれぞれ 0.5, 2 を選び，短軸の長さ $b=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ として計算した．

応力の対称性を考慮して，板の上半分 ($\varphi=0°\sim90°$) について考える．$\sigma_\beta, \sigma_\gamma$ は $\varphi=90°$ に対して逆対称であり，$\tau_{\alpha\beta}$ は対称の分布である．

まず，介在物境界面上の応力分布を図 2〜5 に示す．介在物境界面では $\beta$ の代わりに球座標の $\varphi$ を用いた．介在物境界面においては，$\varphi$ は $\beta$ と $\tan\varphi=a/b\tan\beta$ の関係がある．

図 2, 3 は母材側の応力 $\sigma_\beta$ および介在物側の応力 $\bar{\sigma}_\beta$ の分布を $\gamma=0$ 面でそれぞれ示したものである．介在物が軟らかい場合，$\sigma_\beta$ および $\bar{\sigma}_\beta$ は $\varphi=0°$ で引張応力の極大値をとり，$\varphi=80°$ 付近で引張応力から圧縮応力へ変化する．軸対称解[4]と同様，介在物が無い場合，板の上半部は引張応力場であるが，ここに圧縮応力が生じるのは注目すべき現象である．介在物の大きさが大きいほど，すなわち介在物が自由平面に近づくほど，応力は大きくなる．介在物が硬い場合，板の

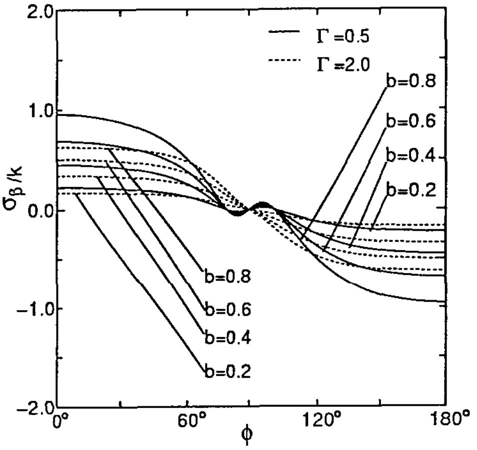


Fig. 2 Variation of $\sigma_\beta$ with $\phi$ at the spheroidal interface ($\bar{s}=b/a=0.5, \gamma=0$)

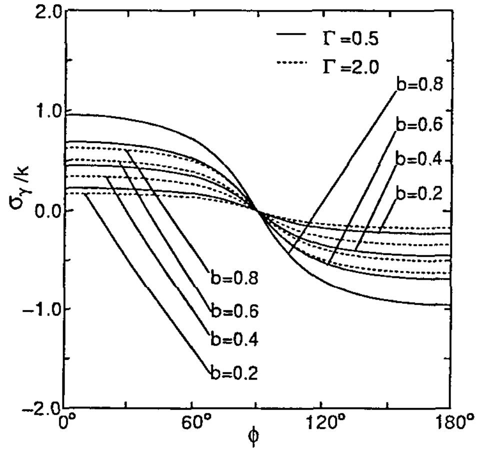


Fig. 4 Variation of $\sigma_\gamma$ with $\phi$ at the spheroidal interface ($\bar{s}=b/a=0.5, \gamma=\pi/2$)

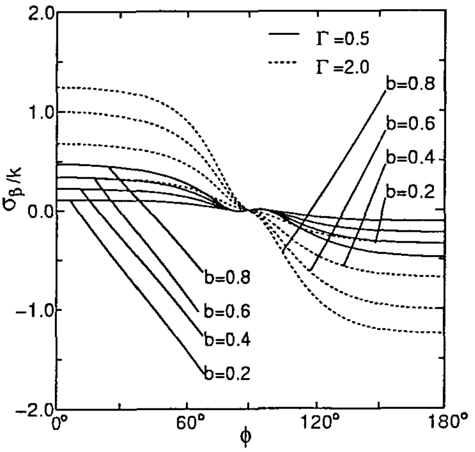


Fig. 3 Variation of $\bar{\sigma}_\beta$ with $\phi$ at the spheroidal interface ($\bar{s}=b/a=0.5, \gamma=0$)

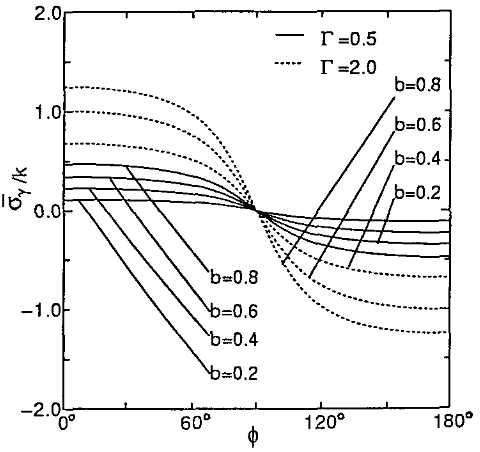


Fig. 5 Variation of $\bar{\sigma}_\gamma$ with $\phi$ at the spheroidal interface ($\bar{s}=b/a=0.5, \gamma=\pi/2$)

上半分の $\sigma_\beta$, $\bar{\sigma}_\beta$ は常に引張応力を示す．介在物の大きさが大きいほど応力は大きくなる．図 2, 3 より，介在物が軟らかい場合は母材側に応力集中が生じ，逆に介在物が硬い場合は介在物側に応力集中が生じる．

図 4, 5 は母材側の応力 $\sigma_\gamma$ および介在物側の応力 $\bar{\sigma}_\gamma$ の分布を $\gamma=\pi/2$ 面で示したものである．図 4 で $\Gamma=0.5, 2.0$ のいずれの場合においても，板の上半分の $\sigma_\gamma$ は常に引張応力である．介在物が軟らかい場合，$\sigma_\gamma$ の値は大きくなる．図 5 で $\Gamma=0.5, 2.0$ のいずれの場合においても，板の上半分の $\bar{\sigma}_\gamma$ は常に引張応力である．図 4 と逆に介在物が硬い場合，$\bar{\sigma}_\gamma$ が大きくなる．

図 6 は $\gamma=0$ 面における母材側および介在物側の $z$ 軸上の応力 $(\sigma_\beta)_{\varphi=0}$, $(\bar{\sigma}_\beta)_{\varphi=0}$ 分布を $0\leq z\leq 1$ の場合について示したものである．母材側の応力については，介在物が軟らかい場合，最大引張応力は板表面に生じる．板表面の応力および介在物境界面の応力は介在物が大きくなると大きくなる．介在物が硬い場合，板表面での応力および介在物境界面での応力は介在物のない場合の $\sigma_x=kz$ に対して軟らかい場合と対称に分布している．板表面の応力は介在物が大きくなると小さくなる．介在物側の応力は $z=0$ (O 点)で零となり，介在物が大きくなるにつれて直線的に増加する．母材側とは逆に介在物が硬い場合のほうが応力値は大きい．

最後に，縦軸に $\gamma=0$ 面における母材側の D 点および B 点，介在物側の B 点の最大引張応力を図 7, 8 に示す．

図 7 は，短半軸 $b$ に対して $\gamma=0$ 面における母材側の D 点および B 点の最大引張応力( $y$ 軸回りの曲げと二軸一様曲げ)の分布を示したものである．B 点の最大引張応力は $b$ が大きくなると大きくなる．介在物が硬い場合，$\sigma_B$ は $y$ 軸回りの曲げのほうが大きい，逆に介在物が軟らかい場合，$\sigma_B$ は $y$ 軸回りの曲げのほうが小さい．板表面 D 点の最大引張応力は $y$ 軸回りの曲げと二軸一様曲げの値はほぼ同じである，介在物が軟らかい場合，$b$ が大きくなると大きくなり，逆に介在物が硬い場合，$b$ が大きくなると小さくなる．

図 8 は，$\gamma=0$ 面における介在物側の B 点の最大引張応力の分布を示したものである．介在物が硬い場合，$\bar{\sigma}_B$ は $y$ 軸回りの曲げのほうが軸対称曲げより大きい，ただし，介在物が軟らかい場合，$\bar{\sigma}_B$ の値はほぼ同じである．最大引張応力は $b$ が 0.6 までは直線的に増加するが，$b=0.8$ では直線からずれ，増加する．

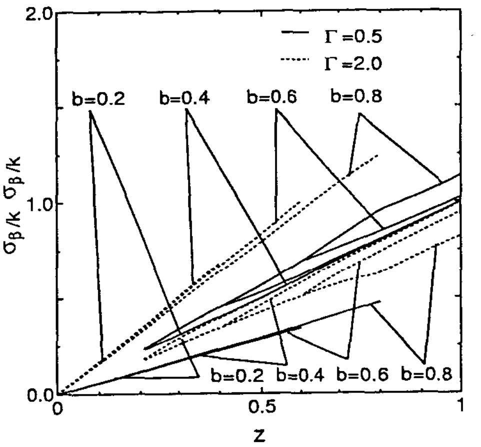


Fig. 6　Variations of $\sigma_\beta$ and $\bar{\sigma}_\beta$ with $z$ along the $z$-axis ($\bar{s}=b/a=0.5$, $\phi=0$ $\gamma=0$)

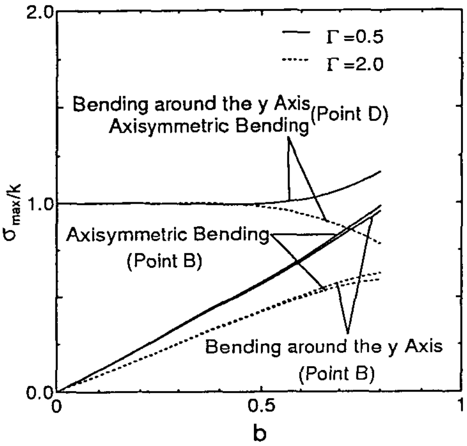


Fig. 7　Variation of maximum of $\sigma_B$ of $B$ and $D$ point with $b$ ($\bar{s}=b/a=0.5$, $\gamma=0$)

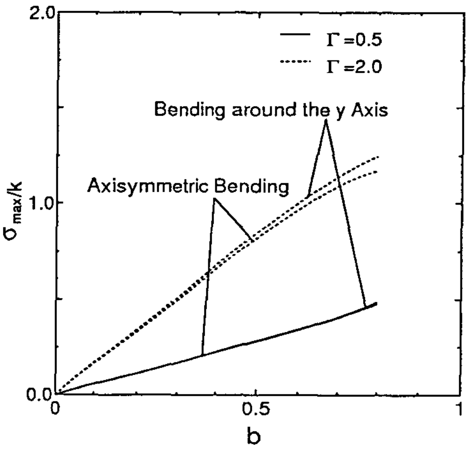


Fig. 8　Variation of maximum of $\bar{\sigma}_B$ of $B$ point with $b$ ($\bar{s}=b/a=0.5$, $\gamma=0$)

## 4. 結　　言

本研究は，1個の偏平回転だ円体状介在物を有する厚板が無限遠方で $y$ 軸回り曲げ荷重を受ける非軸対称問題を三次元弾性論に基づいて，厳密に解析したものである．得られた結果を要約すると以下のようになる．

(1)　母材における最大引張応力は介在物に最も近い厚板表面に生じる．引張応力の極大値は介在物境界面上に生じ，介在物が軟らかい場合 ($\Gamma<1$) には母材側に，逆に硬い場合 ($\Gamma>1$) には，介在物側に生じる．介在物が硬い場合には，介在物に応力が分担されるため母材側の応力集中は緩和される．

(2)　$\gamma=0$ の場合の介在物境界面における応力 $\sigma_\beta$ は，板の上半分では引張応力，下半分では圧縮応力を生じる．介在物が軟らかい場合 ($\Gamma<1$) には板の上半分の $\varphi=80°\sim90°$ で圧縮応力を生じる．

(3)　$\gamma=0$ の場合の $z$ 軸上の応力 $\sigma_\beta$ は，介在物境界面で応力集中し，$z$ が増えるにつれ直線的に増加する．

(4)　板表面 D 点の最大引張応力は $\gamma=0$ 面における $y$ 軸回りの曲げと二軸一様曲げの値はほぼ同じである．介在物が軟らかい場合，$b$ が大きくなると大きくなり，逆に介在物が硬い場合，$b$ が大きくなると小さくなる．母材側の B 点の最大引張応力は，介在物が硬い場合，$\gamma=0$ 面における $y$ 軸回りの曲げのほうが二軸一様曲げより大きい．逆に介在物が軟らかい場合，$\gamma=0$ 面における $y$ 軸回りの曲げのほうが二軸一様曲げより小さい．介在物側の B 点の最大引張応力は，介在物が硬い場合，$\gamma=0$ 面における $y$ 軸回りの曲げのほうが軸対称曲げより大きい，介在物が軟らかい場合，両者の値はほぼ同じである．

## 文　　献

(1)　Das, S., *Bull Calcutta Math. Soc.*, (1953), 55-60.
(2)　Ling, C. B. and Tsai, C. P., *Acta Mech.*, (1969), 169-186.
(3)　Tsuchida, E., Takezaki, J., Nakahara, I. and Kodama, M., *Theor. Appl. Mech.*, 26 (1976), 137-155.
(4)　土田栄一郎・荒居善雄・鄭穎, 機論, 68-668, A (2002), 631-637.