

振動系の同期現象*

(2台のメトロノームを対象とした実験と解析)

佐藤 勇一^{*1}, 中野 健^{*1}
長嶺 拓夫^{*2}, 布施 誠^{*3}

Synchronized Phenomena of Oscillators

(Experimental and Analytical Investigation for Two Metronomes)

Yuichi SATO^{*4}, Ken NAKANO,
Takuo NAGAMINE and Makoto FUSE

^{*4} Saitama University, Dept. of Mechanical Engineering,
255 Shimo-ookubo, Urawa, Saitama, 338-8570 Japan

This paper describes experimental and analytical investigation on synchronized phenomena conducted with two metronomes on a base plate suspended by four wires. Two modes of synchronized phenomena, i. e., in-phase synchronization and out-of-phase synchronization, are experimentally observed. The synchronization mode and frequency in synchronization is strongly influenced by the natural frequency of the base plate. Calculated results based on a physical model of the experimental apparatus show good agreement with the experimental ones, not only qualitatively but also quantitatively.

Key Words: Synchronization, Entrainment, Phase-Locking, Frequency-Locking, Nonlinear Vibration, Self-Excited Vibration, Pendulum

1. 緒 言

異なるリズムを持つ複数の周期的な現象が互いに影響を及ぼし合うことにより、それらのリズムが同調する現象は、同期現象または引き込み現象と呼ばれている^{(1)~(4)}。最初の報告は17世紀オランダの科学者 Huygens までさかのぼるといわれるこの現象は、現在までに、機械系、化学系、生物系など、様々な分野にわたって報告されている^{(1)~(13)}。

例えば共通の構造系に設置された振動機械や回転機械では、同期現象が発生して、構造系が大きく振動する場合がある。Blekhman は、共通の構造系に設置された複数の振動子に現れる同期現象について検討した⁽¹⁾。2個の振動子については、それらを同一の固有振動数を有する調和振動子として解析し、位相差0°または180°の同期現象が安定に存在することを示した⁽¹⁾。井上らは、不平衡ロータ⁽⁵⁾⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾⁽¹²⁾、転動回転機構⁽⁶⁾、自動平衡装置⁽⁶⁾、クーロン摩擦を伴う強制自励系⁽⁷⁾、振動破砕機⁽⁹⁾、調速機⁽¹¹⁾、振動リフト⁽¹³⁾に関する

同期現象について検討した。共通の構造系に設置された複数の不平衡ロータについては、発生する同期現象の形態およびそれらの発生条件を解析的に明らかにした⁽⁵⁾⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾⁽¹²⁾。

本研究では、機械的な非線形振動子として、メトロノームを考察の対象とした。共通の基礎に設置されたわずかに固有振動数の異なる2台のメトロノームについて、発生する同期現象を実験的・解析的に検討した。同期現象の発生による構造系の大振動の回避を念頭に置いて、メトロノームと構造系の固有振動数の関係に着目し、発生する同期現象の形態に及ぼす構造系の固有振動数の影響を明らかにした。

2. 実 験

2.1 実験装置

実験装置の概略図を図1に示す。直径1mmの4本のワイヤで吊された木製の取付け板(以後「台」と呼ぶ)と、その上に載せられた2台のメトロノームとからなる。ワイヤは、正面から見ると鉛直に、側面から見ると下に絞るように傾斜をつけてあるため、台は横方向に振動しやすく、前後方向には振動しにくい。

実験では、2台のメトロノームの振動数の設定を1 Hzとしたが、実際には製造上の個体差があり、固定

* 原稿受付 1999年3月18日。

^{*1} 正員, 埼玉大学工学部 (〒338-8570 浦和市下大久保255)。

^{*2} 正員, 埼玉大学大学院。

^{*3} 学生員, 埼玉大学大学院。

E-mail: ysato@mech.saitama-u.ac.jp

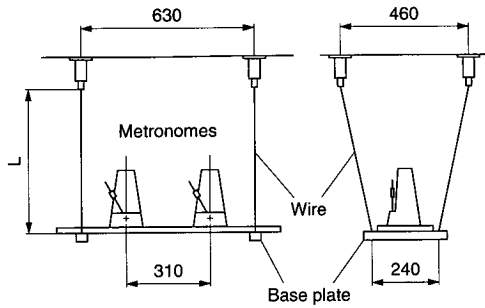


Fig.1 Experimental apparatus

した台の上で各メトロノームを単独で運動させたときの振動数の計測値は、それぞれ 0.994 Hz と 0.981 Hz であった。また、そのときの振幅は、両メトロノームとも約 50° であった。以後、振動数の高いメトロノームを M-A、低いものを M-B と呼ぶ。

2・2 実験方法 メトロノームのぜんまいをいっぱい巻き、はじめ台を静止させた状態で、M-A と M-B の振子に初期角 67° を与えて運動を開始させ、ぜんまいがほどけるまでの約 15 分間、系の様子を観察した。M-A と M-B の初期位相差は、0° と 180° の 2 通りとした。メトロノームの振子と台の振動を非接触変位計と周波数分析器を用いて計測し、その結果から、同期・非同期の判断をした。また、CCD カメラを用いて系を正面から撮影し、得られた画像から、メトロノームの振子および台の角変位を調べた。

本実験では、台のワイヤの長さ L を変えることで、台の固有振動数 f_p を 0.56~1.50 Hz で変化させ、同期現象に及ぼす f_p の影響を調べた。

3. 解 析

3・1 基礎式 台の変位は十分小さいものとして、台の鉛直方向の運動を無視すると、 N 台のメトロノームと台の運動方程式は、次のように表される。

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2} + 2\zeta_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_p} \right) \frac{d\theta_i}{dt} + \left(\frac{\omega_i}{\omega_p} \right)^2 \sin \theta_i + \left(\frac{\omega_i}{\omega_p} \right)^2 \frac{d^2\theta_p}{dt^2} \cos \theta_i = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$(1+N\gamma) \frac{d^2\theta_p}{dt^2} + 2\zeta_p \frac{d\theta_p}{dt} + (1+N\gamma)\theta_p + \gamma \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d^2\theta_i}{dt^2} (\theta_p \sin \theta_i + \cos \theta_i) \right\} + \gamma \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 (\theta_p \cos \theta_i - \sin \theta_i) \right\} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 θ_i 、 ω_i 、 ζ_i はそれぞれ i 番目のメトロノームの角変位、微小角変位時の固有角振動数、減衰比であ

り、 θ_p 、 ω_p 、 ζ_p はそれぞれ台の角変位、固有角振動数、減衰比である。また、 $\tau = \omega_p t$ は無次元時間、 N はメトロノームの総数(本解析では 2)、 γ はメトロノームと台の質量比、 η はメトロノームの振子の腕の長さ h_M と台を単振子としたときの腕の長さ h_p との比を表す。

メトロノームの振子には、ぜんまいがほどけることにより発生する撃力が、1 周期に 2 回作用する。この撃力によるエネルギーの供給と摩擦による減衰を受けて、メトロノームの振動は一定の振幅に落ち着く⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。本解析では、実験で用いたメトロノームの構造をもとに、 $d\theta_i/dt > 0$ のとき $\theta_i = +10^\circ$ 、 $d\theta_i/dt < 0$ のとき $\theta_i = -10^\circ$ の位置で撃力が瞬間的に作用し、振子に一定の角運動量が与えられるものとした。

3・2 解析方法 撃力の作用を解析的に扱うことが困難なため、本報では運動方程式(1)および(2)を数値積分して、時刻歴応答を計算した。式中の諸量としては、実験系から得られた次の値を用いた。

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1.065 \times 2\pi \text{ rad/s}, \omega_2 = 1.060 \times 2\pi \text{ rad/s}, \\ \zeta_1 &= 0.023, \zeta_2 = 0.022, \zeta_p = 0.010, \gamma = 0.037, \\ \eta &= h_M/h_p, h_M = 0.010 \text{ m}, h_p = g/\omega_p^2 \text{ m} \end{aligned}$$

ただし $\omega_p = 2\pi f_p$ はパラメータとして、台の固有振動数 f_p を 0.50~1.50 Hz で変化させた。また、ぜんまいによる撃力により、メトロノームの振子の角速度が瞬間的に 0.490 rad/s 増速するとした。

上記の値を用い、固定した台の上で各メトロノームを単独で運動させる計算を行ったところ、振動数は 0.993 Hz ($i=1$) と 0.982 Hz ($i=2$) となり、実験で用いた 2 台のメトロノームの振動数とほぼ一致した。以後は実験の場合と同様に、振動数の高いメトロノームを M-A、低いものを M-B と呼ぶ。

本解析では、運動を開始してから 10 分以後の計算結果から同期・非同期の判断をし、同期現象が現れた場合について、振動数および位相差を算出した。

4. 結 果

4・1 同位相同期と逆位相同期 実験で同期現象が現れた二つの例について、運動開始から 100 秒までの 2 台のメトロノームおよび台の角変位を図 2 に示す。ただし、台の固有振動数 f_p は、図 2(a) が 0.95 Hz、(b) が 1.10 Hz である。なお、本実験結果を含む以下すべての結果には、再現性が認められた。

初期位相差 180° の条件で運動を開始させた図 2(a) では、振動数の高い M-A (黒色実線) の位相が M-B (灰色実線) よりも速く進み、およそ 27 秒後に二つの波形の頂点が一致して、位相差がほぼ 0° となっ

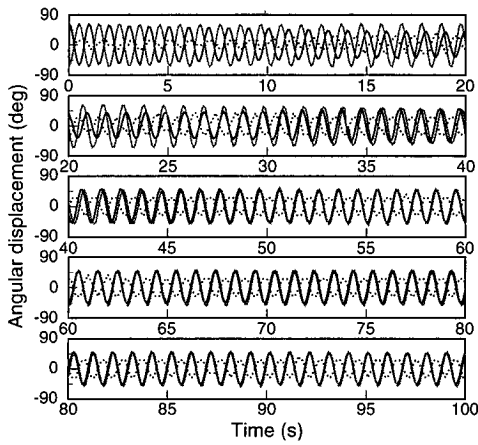
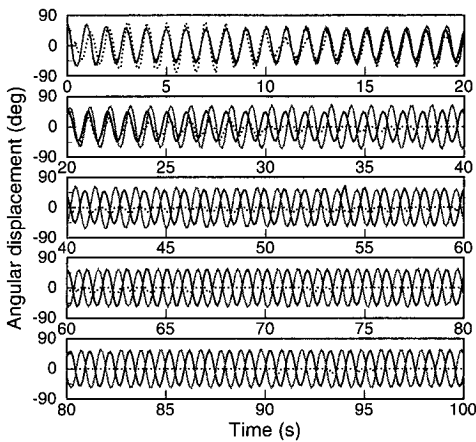
(a) $f_p = 0.95$ Hz(b) $f_p = 1.10$ Hz

Fig. 2 Experimental results; black full line: M-A, gray full line: M-B, dotted line: base plate (multiplied by 50)

た。その後の位相の変化はわずかで、60秒以後はM-Aの位相がわずかに進んだ状態でロックし、2台のメトロノームは同じ振動数で運動を続けた。このように、2台のメトロノームの位相がほぼ同位相でロックし、一定の振動数で運動を続ける現象を「同位相同期」と呼ぶことにする。また同図には、台の振動波形を50倍したもの(点線)も含めて示してある。2台のメトロノームが同位相同期した状態では、台の振動もメトロノームの振動と同期し、位相は2台のメトロノームとほぼ 180° ずれた関係を維持して運動を続けた。100秒以後はメトロノームのぜんまいがほどけ切るまで、このような位相関係を保ったまま運動が継続した。

図2(b)は、 f_p が(a)より高い場合の結果の例である。初期位相差 0° の運動開始後、位相差は大きく変

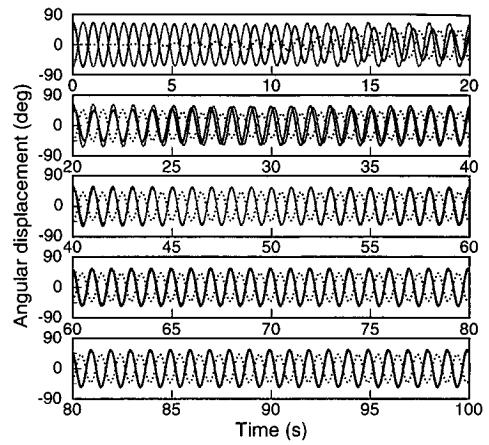
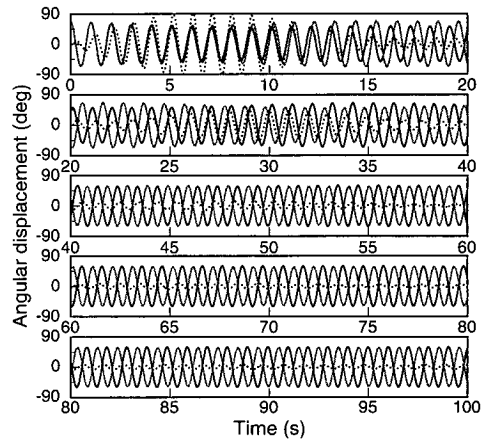
(a) $f_p = 0.93$ Hz(b) $f_p = 1.05$ Hz

Fig. 3 Calculated results; black full line: M-A, gray full line: M-B, dotted line: base plate (multiplied by 50)

化して、およそ40秒後にほぼ 180° となり、60秒以後では位相差をほぼ 180° に保ったまま、2台のメトロノームは一定の振動数で運動を続けた。このように、2台のメトロノームの位相がほぼ逆位相でロックし、一定の振動数で運動を続ける現象を「逆位相同期」と呼ぶことにする。台の振動の振幅は初め大きく変動するが、同期した60秒以後の振幅は小さく、ほとんど振動していないことがわかる。また、図2(a)の場合と同様に、メトロノームのぜんまいがほどけ切るまで、このような運動が継続した。

以上のような二つの形態の同期現象は、解析においても現れた。 $f_p = 0.93$ Hz, 1.05 Hzの場合の計算結果を図3に示す。実験の場合と同様に、 f_p が低い(a)の場合に同位相同期、 f_p が高い(b)の場合に逆位相同期が現れた。また、同期までの振幅および位相の変化

など、実験結果と定性的に一致した時刻歴応答が得られた。

4・2 同期時の位相差 台の固有振動数 f_p を変化させて同様な実験を行い、同期現象が現れた代表的な場合について、同期した後の M-A の角変位 θ_A を横軸、M-B の角変位 θ_B を縦軸にとってまとめた図を図 4 に示す。図 4 中 5 列 10 個のグラフは、左の列から $f_p = 0.850 \text{ Hz}$, 0.950 Hz , 1.020 Hz , 1.070 Hz , 1.170 Hz と高くなっており、上段の 5 個のグラフが初期位相差 0° 、下段の 5 個のグラフが初期位相差 180° で開始した場合の結果である。また、グラフ中の矢印は、時間の進む向きを表している。

両軸をこのように選ぶと、同期時には閉曲線が描かれる。例えば、位相差 0° の同位相同期するとき、閉曲線は原点を通る右上がりの直線、位相差 180° の逆位相同期するとき、原点を通る右下がりの直線となる。また、位相差が $\pm 90^\circ$ のとき、閉曲線は両座標軸を主軸とする楕円となる。すなわち、2 台のメトロノームの位相差が 0° または 180° からずれるほど、閉曲線の作る図

形が二次元的な広がりを持つことになる。

まず、図 4 の左側 2 列 4 個のグラフに着目すると、いずれの場合も右上がりの閉曲線が描かれており、それらは上下段で同じ図形であることから、初期位相差によらず、同位相同期が現れることがわかる。また、いずれの場合も閉曲線は反時計まわりなので、振動数の高い M-A の位相が M-B に対して進んでいる。ただし、閉曲線は左側の列の方が広がっていることから、 f_p が低いほど、M-A に対する M-B の位相遅れが大きくなることがわかる。ここで改めて、これらの閉曲線が右上がりになる場合、すなわち、位相差が $0 \pm 90^\circ$ でロックする同期現象を同位相同期と呼ぶことにする。

次に、右側 2 列 4 個のグラフに着目すると、いずれの場合も右下がりの閉曲線が描かれており、それらは上下段で同じ図形であることから、初期位相差によらない逆位相同期が現れていることがわかる。また、閉曲線はいずれも時計まわりで、閉曲線の作る図形は右側の列の方が広がっていることから、 f_p が高いほど、

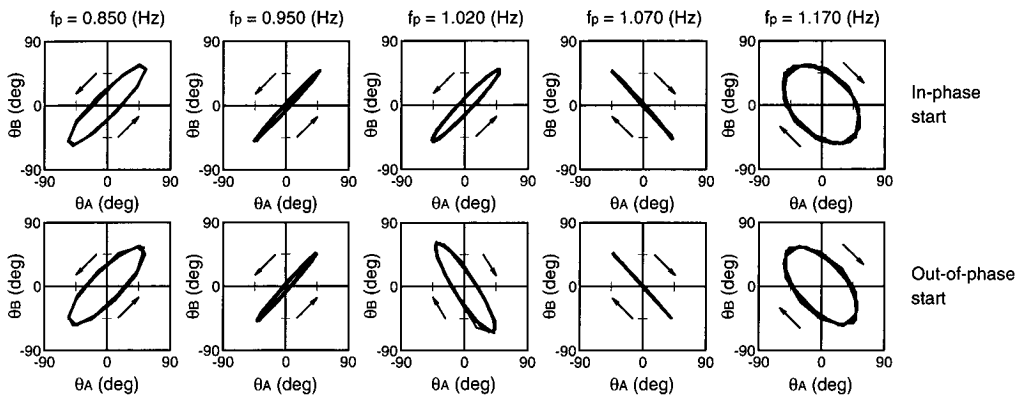


Fig. 4 Experimental results

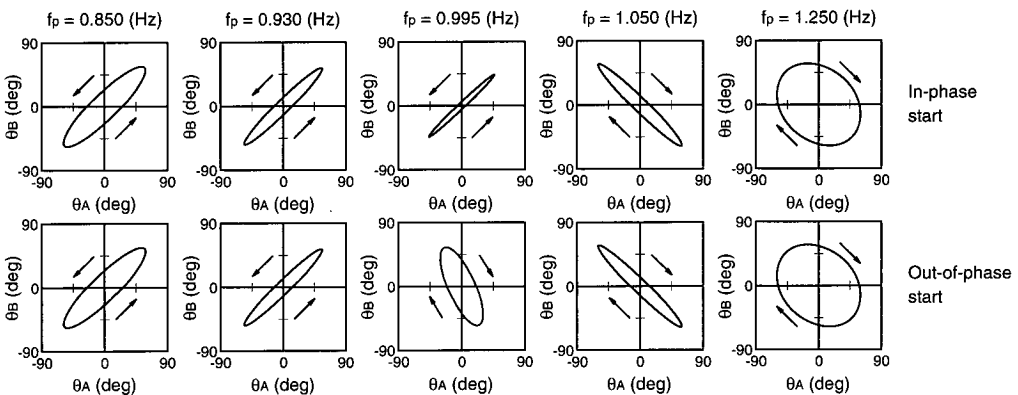


Fig. 5 Calculated results

M-A に対する M-B の位相遅れが大きくなることからわかる。ここで改めて、閉曲線が右下がりになる場合、すなわち、位相差が $180 \pm 90^\circ$ でロックする同期現象を逆位同期と呼ぶことにする。

以上のように、 f_p が低い場合に同位同期、高い場合に逆位同期が現れ、それは初期位相差によらない。しかし、 f_p がメトロノームの振動数に近い 1 Hz 付近では、初期位相差の影響が現れる場合がある。図 4 の中央の列 2 個のグラフからわかるように、 $f_p = 1.020$ Hz の場合には、初期位相差が 0° の場合に同位同期、 180° の場合に逆位同期が現れる。

解析結果を図 4 と同様にまとめたものが図 5 である。実験における上記のような傾向が、計算においてもやはり現れていることがわかる。

4.3 同期時の振動数 行った実験の結果すべてについて、台の固有振動数 f_p に対して同期振動数 f_s を示したグラフが図 6(a) である。図 6 では、初期位

相差によらず同位同期が現れた場合を○印、初期位相差によらず逆位同期が現れた場合を△印、初期位相差が 0° のときにのみ同位同期が現れた場合を●印、初期位相差が 180° のときにのみ逆位同期が現れた場合を▲印とした。また、十分時間が経過した後にも位相差は一定値にロックしないけれども、一方が他方を追い越すことはなく、位相差が $\pm 180^\circ$ に収まっているような場合を準同期状態として◇印、同期現象および準同期現象のいずれも現れなかった場合を非同期状態として✕印で横軸上に示した。なお、図 6 中の 2 本の点線は、固定した台の上で各メトロノームを単独に運動させたときの振動数 (f_A, f_B) を表す。

実験において同期現象が現れたのは f_p が $0.570 \sim 1.190$ Hz の範囲に限られており、 f_p がそれより低くても、高くても、初期位相差によらず同期現象は現れなかった。同期現象が現れた範囲のうち、 $0.570 \sim 1.005$ Hz では、初期位相差によらず同位同期が現れ、 $1.010 \sim 1.025$ Hz では、初期位相差が 0° の場合に同位同期、 180° の場合に逆位同期が現れた。また、 $1.030 \sim 1.035$ Hz では、初期位相差によらず準同期状態となり、 $1.040 \sim 1.190$ Hz では、初期位相差によらず逆位同期が現れた。

図 6(a) より、台の固有振動数 f_p がメトロノームの振動数に近い 1 Hz 付近を除くと、同期振動数 f_s は 2 本の点線の間にとまっており、 $f_B < f_s < f_A$ の関係にある。一方、 $f_p = 1$ Hz 付近では、 $f_s > f_A$ となっている。

解析結果を図 6(a) と同様にまとめたものが図 6(b) である。同図からわかるように、解析においても同期現象は f_p のある範囲においてのみ現れ、 f_p が低い方から、初期位相差によらず同位同期が現れる範囲、初期位相差により同位同期と逆位同期の両方が現れる範囲、準同期現象が現れる範囲、初期位相差によらず逆位同期が現れる範囲が存在するという結果となった。また、同期振動数に及ぼす台の固有振動数の影響についても、定性的・定量的に、実験結果と一致している。

5. 考察

以上に述べた実験結果と解析結果との比較から、本解析モデルの妥当性が示されたと考えられる。同期時における両メトロノームと台との位相差については、特に逆位相の場合に台の振動が小さいため、実験的には正確な計測が困難であった。そこで解析によって位相差を求め、まとめたものが図 7 である。ただし同図では、初期位相差によらず同位同期または逆位同期のみが現れた場合について、台に対する M-A と M

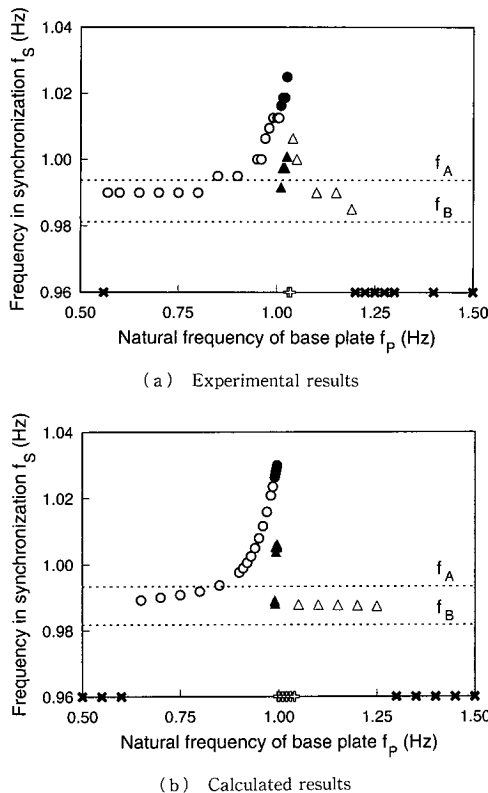


Fig. 6 Synchronized phenomena of two metronomes; ○: in-phase synchronization, △: out-of-phase synchronization, ●: in-phase synchronization only in case of in-phase start, ▲: out-of-phase synchronization only in case of out-of-phase start, ◇: quasi-synchronization, ✕: no synchronization

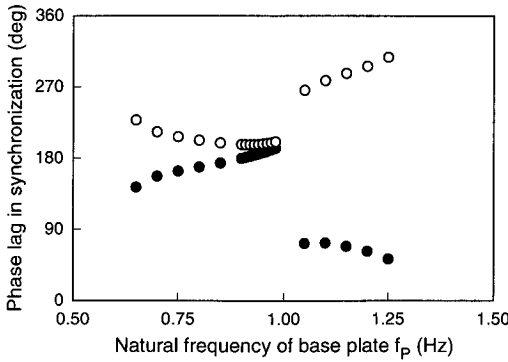


Fig. 7 Calculated results on phase lags of two metronomes to base plate in synchronization; ●: M-A, ○: M-B

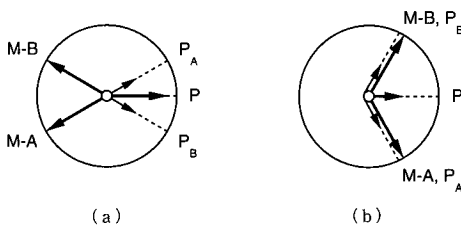


Fig. 8 Typical relationship of phases of two metronomes and base plate; P : observed base plate vibration, P_A : base plate vibration induced by M-A, P_B : base plate vibration induced by M-B; (a) in-phase synchronization, (b) out-of-phase synchronization

-Bの位相遅れを示してある。

まず、両メトロノーム間の位相差に着目すると、台の固有振動数 f_p が低いときに同位相同期、高いときに逆位相同期が現れており、同位相同期の場合は f_p が低いほど、逆位相同期の場合は f_p が高いほど、M-A に対する M-B の位相遅れが大きくなる。また、台に対する M-A および M-B の位相遅れは、位相遅れ 180° を境に、ほぼ上下対称となっている。

このような位相の関係を模式的に表したものが図8である。図8(a)は同位相同期、図8(b)は逆位相同期の場合であり、いずれも台(図8中 P)の位相を基準として、位相が進む向きを反時計まわりとしてある。また、矢印の大きさは振幅を表しており、台の振幅についてはメトロノームと比較して小さいので、大きさを誇張して示してある。

同位相同期時の場合には、メトロノームの振動数 f_A, f_B よりも台の固有振動数 f_p が低いことから、各メトロノームによって発生する台の振動は、各メトロノームの振動と逆位相になると考えられる。以下では簡単のために、その位相差を 180° とする。いま、図8(a)に示すように、M-A が第3象限、M-B が第2

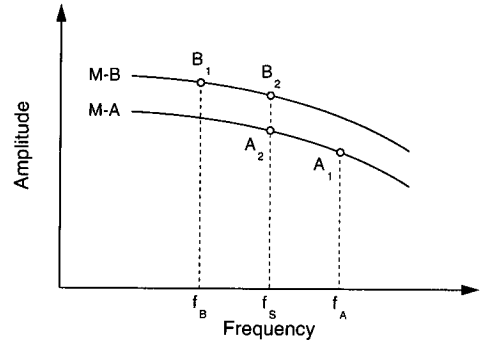


Fig. 9 Change in frequencies of two metronomes

象限に位置する状態を考えると、M-A によって発生する台の振動 P_A は第1象限、M-B によって発生する台の振動 P_B は第2象限に位置し、観察される台の振動 P は、それらの合成が現れる。

ここで、一方のメトロノームの位相と、他方のメトロノームによって発生する台の振動の位相の関係に着目する。図8(a)より、M-A に対して P_B の位相は進んでおり、M-B に対して P_A の位相は遅れていることがわかる。このとき、M-A は P_B からエネルギーを与えられ、逆に M-B は P_A からエネルギーを奪われる関係にある。

式(1)の左辺第3項に現れているように、メトロノームの振子はソフトスプリングの性質を持っており、この非線形性によって、同期のために必要となる振動数の変化が生じると考えられる。これを模式的に示したものが図9である。

メトロノームの振動数と振幅の関係を示す図9において、メトロノームと台との間にエネルギーの授受がない場合には、M-A は点 A_1 、M-B は点 B_1 の状態にあるとする。ただし、振動数はそれぞれ $f_A, f_B (f_A > f_B)$ である。ここで、位相が図8(a)の関係にあるとき、M-A は P_B からエネルギーを与えられることにより、点 A_1 よりも振幅が増加し、逆に M-B は P_A からエネルギーを奪われることにより、点 B_1 よりも振幅が減少する。このとき M-A の振動数は f_A よりも低くなり、M-B の振動数は f_B よりも高くなる。図8(a)では、1周期におけるこのようなエネルギー授受のバランスがとれて、各メトロノームの状態が点 A_2 、点 B_2 となり、両メトロノームの振動数が $f_s (f_B < f_s < f_A)$ で一致して、同位相同期が現れると考えられる。

なお、図8(a)の位相の関係で同期しているとき、この状態は擾乱に対しても安定である。例えば、M-A の位相が図8(a)の状態からわずかに進んだとする。 P_B の位相が M-A よりも 90° 進むとき、 P_B から

M-Aに最大のエネルギーが与えられるので、この擾乱によって、 P_B がM-Aに与えるエネルギーは増加する。M-Aの位相が進むことにより P_A の位相も進むとすれば、 P_A がM-Bから奪うエネルギーも増加する。このとき、M-Aの振動数は減少し、M-Bの振動数は増加するので、両者の位相差は小さくなり、擾乱による位相の変化が復元されることになる。

また、両メトロノームと台の位相の関係が図8(a)以外の場合について同様に考察すると、不安定な位置関係となるため、同期現象は現れないことがわかる。

逆位相同期の場合も、以上と同様な議論が成り立つ。ただし、メトロノームの振動数よりも台の固有振動数が高いことから、各メトロノームによって発生する台の振動は、各メトロノームの振動と同位相になると考えられる。その位相差を 0° として、M-Aと P_B 、M-Bと P_A の位相の関係に着目し、同位相同期の場合と同様に考えると、図8(b)の状態、すなわち、M-Aが第4象限、M-Bが第3象限に位置する逆位相同期のみが、安定に現れることがわかる。

6. 結 言

本報では、2台のメトロノームの同期現象について、実験的・解析的な検討を行い、以下の結論を得た。

(1) 台の固有振動数 f_P が、固定した台の上で各

メトロノームを運動させたときの振動数 f_A, f_B より低すぎても、高すぎても、同期現象は発生しない。

(2) $f_P < f_A \approx f_B$ のとき同位相同期、 $f_P > f_A \approx f_B$ のとき逆位相同期が、初期条件によらず現れる。

(3) $f_P \approx f_A \approx f_B$ のとき、初期条件に依存してどちらかの同期が現れる場合、さらに、メトロノームの振子の位相がある範囲で変動する準同期状態が現れる。

文 献

- (1) Blekhnman, I. I., *Synchronization in Science and Technology*, (1988), 147, ASME Press.
- (2) Jackson, E. A., *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Vol. 1 (1991), Cambridge, 203.
- (3) 蔵本由紀・ほか4名, パターン形成, (1991), 149, 朝倉書店.
- (4) 吉川研一, 非線形科学, (1992), 5, 学会出版センター.
- (5) 井上順吉・ほか2名, 機論, 32-234(1966), 184.
- (6) 井上順吉・ほか2名, 機論, 33-246(1967), 206.
- (7) 井上順吉・ほか2名, 機論, 35-274(1969), 1242.
- (8) 井上順吉・ほか2名, 機論, 41-350(1975), 2840.
- (9) 井上順吉・ほか2名, 機論, 42-353(1976), 103.
- (10) 井上順吉・ほか2名, 機論, 42-353(1976), 111.
- (11) 井上順吉・ほか1名, 機論, 48-430, C(1982), 812.
- (12) 井上順吉・ほか2名, 機論, 48-430, C(1982), 819.
- (13) 井上順吉・ほか2名, 機論, 49-437, C(1983), 39.
- (14) 高橋利衛, 振動工学演習(II), (1963), 246, オーム社.
- (15) Andronov, A. A., ほか2名, *Theory of Oscillators*, (1987), 168, Dover.